Soluzione Prova Scritta di Fisica Generale 1 e 2

Prova del 14/01/2008

Esercizio 1

Sia ω il modulo della velocità angolare e $\mathbf{F}$ la forza esercitata dall'asta sulla massa M. Nel sistema di laboratorio le equazioni del moto sono:

$$F \cos\theta = Mg \tag{1}$$
$$F \sin\theta = M\omega^2 d \sin\theta. \tag{2}$$

Questo sistema ha due soluzioni: per $\theta = 0$ si ottiene $F = Mg$. Inoltre, per $\frac{g}{\omega^2 d} \leq 1$ (ovvero per $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{d}} = 2.6$ rad/s) esiste un'altra soluzione

$$F = Md\omega^2 \tag{3}$$
$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 d}. \tag{4}$$

Inserendo i dati numerici forniti, $\omega = 4$ rad/s, $d = 1.5$ m, $M = 20$ Kg, si ottiene $\theta = 66°$.

Quando la lunghezza dell'asta è dimezzata, $d \to d' = d/2$, il nuovo angolo di equilibrio risulta essere

$$\theta' = arc\cos\left(\frac{g}{\omega^2 d'}\right) = 35^0 \tag{5}$$

Il lavoro compiuto dall'asta si ottiene applicando il teorema delle forze vive:

$$W = \Delta E_k \tag{6}$$
$$W_{peso} + W_{asta} = \Delta E_k \tag{7}$$
$$W_{asta} = \Delta E_k - W_{peso} = \Delta E_k + \Delta U \tag{8}$$

quindi $W_{asta} = \frac{1}{2}M\omega^2(d'^2 \sin^2\theta' - d^2 \sin^2\theta) + Mg(d'\cos\theta' - d\cos\theta) = ... = -\frac{1}{2}M\omega^2\frac{3}{4}d^2$

Infine calcoliamo il momento angolare rispetto ad un punto posto lungo l'asse verticale, a distanza $dcos\theta$ dalla cima. Si noti che $d'\ cos\theta' = d\ cos\theta$. Nella situazione iniziale si ha:

$$L_z = M\omega d^2 \sin^2\theta \simeq 150\ Js. \tag{9}$$

Dopo l'accorciamento dell'asta, si ha:

$$L'_z = M\omega d'^2 \sin^2\theta' \simeq 15\ Js. \tag{10}$$

La variazione del momento angolare è dovuta a un momento di forze esterne agenti sul palo. Il momento è diretto lungo il palo come pure ΔL.

Esercizio 2

Consideriamo innanzi tutto il caso di urto elastico seguito da una fase di puro rotolamento. Data la presenza di una forza esterna di attrito $\mathbf{F}_A$ con il pavimento, che induce il rotolamento, il momento totale *non* si conserva. Si conservano invece il momento angolare rispetto al punto A di contatto della sfera e l'energia cinetica:

$$mvR = mv'R + I_A\omega \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{12}$$

dove v' è la velocità del proiettile dopo l'urto e V è la velocità del centro di massa della sfera dopo l'urto. Inoltre $I_A = (MR^2 + I)$ è il momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto con la superficie, che contiene $I = \frac{2}{5}MR^2$, momento d'inerzia della sfera rispetto al centro di massa; infine si ha che $\omega = \frac{V}{R}$ è la velocità angolare di rotolamento puro. Da queste relazioni si ottiene

$$V = \frac{2m}{m + \frac{7}{5}M}v. \tag{13}$$

Dal momento che la forza d'attrito durante la fase di rotolamento non compie lavoro, l'energia meccanica totale si conserva e si ha che l'altezza massima raggiunta dal centro di massa è tale per cui l'incremento dell'energia potenziale della sfera è pari all'energia cinetica iniziale. Si ottiene quindi:

$$h = \frac{7}{10}\left(\frac{2m}{m + \frac{7}{5}M}\right)^2 \frac{v^2}{g} \tag{14}$$

L'altezza massima del centro rispetto alla superficie è data da $h_{max} = h + R$ in quanto all'inizio il centro è già posto ad un distanza R dalla superficie.

Nel caso di urto completamente anelastico l'energia cinetica non è conservata. La conservazione del momento angolare impone $mvR = (m + M)VR + I\omega$. Ripetendo il calcolo dell'altezza massima come nel punto precedente si ottiene:

$$h_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m + M}\,\frac{m}{m + \frac{7}{5}M}\right)^2 \frac{v^2}{g} + R \tag{15}$$

L'energia cinetica dissipata nell'urto si ottiene dalla differenza di energia cinetica prima e dopo l'urto e vale:

$$E_{diss} = \frac{1}{2}mv^2\frac{\frac{7}{5}M}{m + \frac{7}{5}M}. \tag{16}$$