Fisica Generale 1 e 2

Prova scritta – 21 luglio 2008

Problema 1

Un sistema è costituito da tre dischi di massa m = 4 Kg e raggio r = 0.1 m disposti come segue. Un primo disco è posto orizzontalmente e può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale fisso passante per il suo centro. Gli altri due dischi sono disposti appena sopra il primo, sempre in posizione orizzontale, con i loro centri fissati a due assi verticali imperniati alle due estremità di un diametro del primo disco. I perni permettono ai due dischi di ruotare, ma presentato attrito. I due dischi superiori non si toccano.

Ad un istante iniziale i due dischi superiori vengono messi in rotazione nello stesso senso, con velocità angolare ω_0= 21 rad/s, con il primo disco fermo, e poi il sistema viene lasciato completamente libero. Determinare lo stato del sistema quando l'attrito ha smesso di agire. Calcolare la variazione complessiva di energia cinetica. Discutere la differenza con il caso in cui i due dischi ruotino inizialmente in senso opposto.

Problema 2

Un convoglio ferroviario, del peso di 400 tonnellate, sta viaggiando a 108 km/h lungo un binario rettilineo orizzontale. Ad un certo istante il conducente viene avvisato che il ponte successivo è crollato. Egli aziona immediatamente il freno di emergenza. In quel momento la testa del treno si trova a 500 m dal precipizio. Il freno esercita una forza di attrito radente di coefficiente μ = 0.1 (in assenza di freno l'attrito sia trascurabile). La temperatura dei freni, che è inizialmente di 20° C, aumenta di 3×10^{-6} gradi per ogni Joule di lavoro compiuto ed i freni smettono improvvisamente di funzionare quando la loro temperatura raggiunge i 500° C. Quant'è lo spazio di frenata? Qual è la velocità del treno al termine della frenata? Il treno precipita?

Si consideri la stessa situazione di prima, salvo che il binario è in salita con pendenza costante del 5%. Si calcoli lo spazio di frenata minimo per non precipitare nel burrore.

SOLUZIONI

Problema 1

I due dischi superiori rallentano la rotazione per effetto dell'attrito sui loro perni. Il sistema però conserva il momento angolare totale rispetto al centro del primo disco, in quanto il momento delle forze esterne è nullo. Quindi il primo disco si mette a ruotare. Dopo un tempo lungo ($t \to \infty$) l'attrito arresta completamente la rotazione dei due dischi superiori rispetto agli assi passanti per i loro centri e il sistema, nel suo complesso, si comporta come un unico corpo rigido in rotazione attorno all'asse del primo disco, privo di attrito.

Per determinare lo stato finale del sistema utilizziamo la conservazione del momento angolare e il teorema di König. Chiamiamo I il momento d'inerzia di ciascun disco riferito al suo centro: $I= (1/2)\ mr^2$.

All'istante iniziale, il momento angolare totale vale

$L_0 = 2\ I\ \omega_0$

dato che il momento angolare del disco inferiore è nullo e il centro di massa di ciascuno dei due dischi superiori è fermo.

Il momento angolare finale vale invece

$L_f = I\ \omega + 2\ (I + mr^2)\ \omega$

dove il termine in parentesi è il momento d'inerzia di ciascun disco superiore rispetto all'asse passante per il centro del disco inferiore. Si ha quindi

$L_f = 7\ I\ \omega$

Essendo 7I il momento d'inerzia del sistema complessivo. La conservazione del momento angolare impone che $L_f = L_0$ e dunque

$\omega = (2/7)\ \omega_0 = 6$ rad/s .

Per quanto riguarda l'energia cinetica, si ha:

$E_0 = 2\ (1/2)\ I\ \omega_0^2 = I\ \omega_0^2$

$E_f = (1/2)\ 7\ I\ \omega^2 = (1/2)\ 7\ I\ (2/7)^2\ \omega_0^2 = (2/7)\ \omega_0^2$

Da cui

$\Delta E = (\ 1 - 2/7\ )\ \ I\ \omega_0^2 = (5/7)\ I\ \omega_0^2 = (5/14)\ m\ \omega_0^2\ \ r^2 = 6.3$ J

Nel caso in cui i due dischi superiori ruotino inizialmente in senso opposto, il momento angolare iniziale è nullo e lo rimarrà fino al termine, quando i due dischi si saranno arrestati a causa dell'attrito, mentre il disco inferiore non si sarà mai mosso. La variazione di energia cinetica in questo caso sarà semplicemente pari all'energia cinetica iniziale: $\Delta E = I\ \omega_0^2$.

Problema 2

Il massimo lavoro che può essere svolto dai freni è fissato dalla variazione massima di temperatura, Δt, e dal *rate* di riscaldamento, γ, in questo modo:

$W_{max} = \Delta t / \gamma$

essendo $\Delta t = (500\text{-}20)$ C = 480 C e $\gamma = 3 \times 10^{-6}$ C/J. Dunque $W_{max} = 1.6 \times 10^8$ J. Dato che la forza di attrito è costante, lo spazio di frenata è dato da:

$d = W_{max} / F_{att} = W_{max} / (\mu M g) = 1.6 \times 10^8 / (0.1 \times 4 \times 10^5 \times 9.8)$ m = 408 m

La frenata termina prima del precipizio. La velocità al termine della frenata si ricava dal teorema delle forze vive. L'energia cinetica iniziale è

$(E_{kin})_0 = (1/2) M v_0^2 = (1/2) \times 4 \times 10^5 \times (30)^2$ J $= 1.8 \times 10^8$ J.

Quella finale è $E_{kin} = (E_{kin})_0 - W_{max} = 0.2 \times 10^8$ J $= (1/9)\,(E_{kin})_0$. Da cui la velocità finale $v = (1/3)\, v_0 = 10$ m/s. Dunque, il massimo lavoro frenante non è comunque sufficiente a fermare il treno (rimane energia cinetica dopo la frenata) e il treno continuerà il suo moto fino a precipitare.

Nel secondo caso, la situazione limite corrisponde al treno che arriva al burrone a velocità nulla percorrendo 500 m lungo il pendio in salita, equivalenti a $\Delta h = 25$ m di variazione di quota. Il teorema delle forze vive in questo caso dà:

$(E_{kin})_0 = W_{att} + \Delta E_p = d\, F_{att} + Mg\, \Delta h$

Essendo $\Delta E_p = Mg\, \Delta h = 0.98 \times 10^8$ J. Da cui si ottiene il nuovo spazio di frenata

$d = [(E_{kin})_0 - \Delta E_p]/ F_{att} = [(E_{kin})_0 - \Delta E_p] / (\mu M g \cos \alpha)$.

Ora $\cos \alpha = [1 - (\text{sen}\, \alpha)^2] = [1 - (0.05)^2] = 0.99875$ (si può approssimare a 1 senza problemi). Risulta

$d = [1.8 - 0.98] \times 10^8 / (0.1 \times 4 \times 10^5 \times 9.8)$ m = 209 m

che è minore dello spazio di frenata massimo compatibile con il funzionamento dei freni.