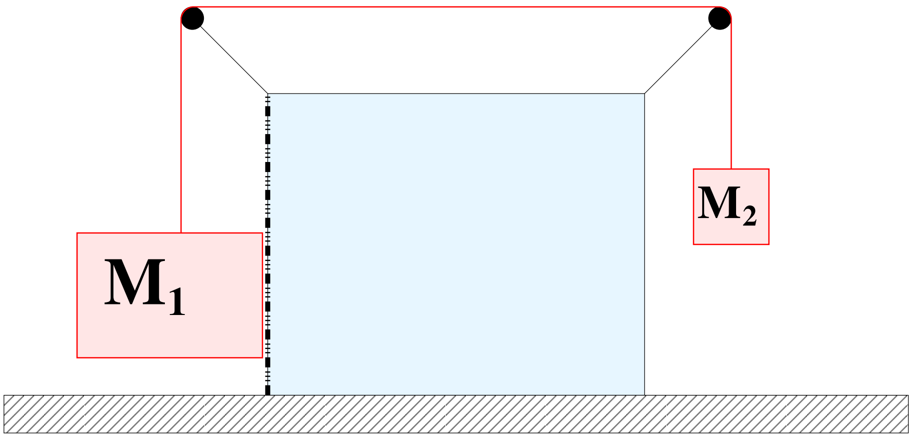
**Fisica Generale I (primo modulo)**
**A.A. 2008-09, 9 febbraio 2009**

**Esercizio 1.**
Due corpi di massa $M_1 = 10$kg e $M_2 = 5$Kg sono collegati da un filo ideale passante per due carrucole prive di massa, come in figura. La prima massa è tenuta a contatto con la parete verticale e subisce, durante il moto, una forza frenante $F = 10$N costante. La seconda massa, invece, non subisce alcuna forza frenante. Le masse, inizialmente ferme, siano lasciate libere di muoversi. **a)** Si calcoli la loro accelerazione. **b)** Dopo che la massa $M_1$ è caduta di $h = 10$m, si calcoli il lavoro compiuto dalla forza $F$ e dalla gravità, nonché la velocità finale delle due masse. **c)** Quale forza frenante sarebbe necessaria per mantenere le masse all'equilibrio?




**Soluzione**
**a)** Chiamiamo $T$ la tensione del filo, che agisce con la stessa intensità sulle due masse. Poi notiamo che le velocità delle due masse (e quindi anche le accelerazioni) devono essere uguali in modulo, dato che il filo è inestensibile. Scegliamo come positivo il verso dell'accelerazione concorde con $g$ per la massa 1 e discorde per la massa 2. Scriviamo le due equazioni del moto

$$\begin{cases} aM_1 = M_1 g - T - F \\ aM_2 = T - M_2 g \end{cases}$$

e troviamo la soluzione

$$a = \frac{(M_1 - M_2)\, g - F}{M_1 + M_2} = 2.6\text{m/s}^2$$

**b)** L'accelerazione è costante e quindi la legge oraria è $x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Ponendo $x(t_f) = h$ si ha

$$h = \frac{1}{2}at_f^2 \quad \Rightarrow \quad t_f = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 2.77\text{s}$$

da cui

$$v_f = at_f = \sqrt{2ha} = 7.22\text{m/s}.$$

In modo alternativo è possibile ricavare $v_f$ utilizzando il teorema delle forze vive:

$$\Delta E_k = L_{tot} = L_F + L_g$$

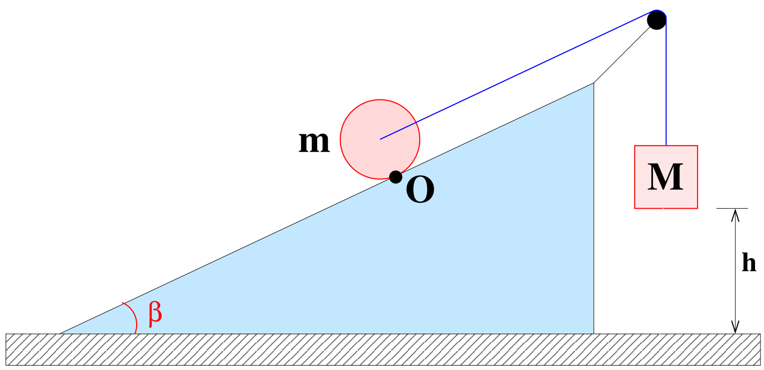
Per il lavoro della forza d'attrito e della forza peso si ha:

$$L_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = -hF = -100\text{J},$$
$$L_g = (M_1 - M_2)gh = 490\text{J}$$

**c)** Il sistema è in equilibrio se $a = 0$. Usando l'espressione trovata al punto a, si trova

$$F = g(M_1 - M_2) = 49\text{N}$$

**Esercizio 2.**
Si consideri un cilindro di massa $m = 1$kg e raggio $R = 3$cm, che si muove lungo un piano inclinato, e un altro corpo di una massa $M = 3$kg sospeso come in figura. I due corpi sono collegati da un filo ideale passante per una carrucola priva di massa. Il filo è collegato all'asse del cilindro tramite un anello privo di attrito. Il cilindro rotola sul piano senza strisciare. L'inclinazione del piano è di 30°. **a)** Si calcolino l'accelerazione $a$ e l'accelerazione angolare $\alpha$ del cilindro. **b)** Si calcoli la tensione del filo. **c)** Assumendo che il sistema parta da fermo nella configurazione in cui la massa $M$ dista $h = 0.8$m dal suolo, si calcoli la velocità angolare $\omega_f$ del cilindro quando la massa $M$ tocca terra.



**Soluzione**
Affinché il cilindro rotoli senza strisciare, deve esserci un momento di forze non nullo. Conviene calcolare il momento delle forze rispetto al CM. In tal caso la forza peso e la tensione della fune hanno momento nullo. L'unico contributo non nullo viene dalla forza d'attrito volvente, $F_A$, responsabile del rotolamento e applicata nel punto di contatto $O$ tra il cilindro e il piano. Tale punto è istantaneamente fermo. Il momento di tale forza ha modulo $RF_A$. Le equazioni del moto per la rotazione del cilindro e la traslazione di ciascuna massa sono quindi:

$$\begin{cases} I\alpha = RF_A \\ ma = T - mg\sin\beta - F_A \\ Ma = Mg - T \end{cases}$$

dove $I = (1/2)mR^2$ è il momento d'inerzia del cilindro e dove abbiamo scelto come positivo il verso dell'accelerazione concorde con $g$ per la massa $M$. Il segno, come il modulo, della forza d'attrito è incognito. Infine possiamo usare la condizione di rotolamento puro: $a = \alpha R$.

**a)** Risolvendo il precedente sistema si trova:

$$a = \frac{2g(M - m\sin\beta)}{3m + 2M} = 5.44\mathrm{m/s^2}$$

$$\alpha = a/R = 181\mathrm{rad/s^2}$$

**b)** Lo stesso sistema di equazioni fornisce la tensione:

$$T = M(g - a) = 13.1\mathrm{N}$$

**c)** Dalla legge oraria $x(t) = \frac{1}{2}at^2$, ponendo $x(t_f) = h$ trovo

$$\frac{1}{2}at_f^2 = h \qquad \Rightarrow \qquad t_f = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Essendo $\omega(t) = \alpha t$, si ha

$$\omega_f = \omega(t_f) = \sqrt{\frac{2h}{a}}\alpha = \frac{\sqrt{2ha}}{R} = 98.3\mathrm{rad/s^2}$$

**c)** [procedimento alternativo] Si usi la conservazione dell'energia meccanica

$$\begin{aligned} E_m &= gh(t)M - gh(t)m\sin\beta + \frac{1}{2}Mv(t)^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}I\omega(t)^2 = \\ &= gh(t)(M - m\sin\beta) + \left(\frac{3}{4}m + \frac{1}{2}M\right)v^2 \end{aligned}$$

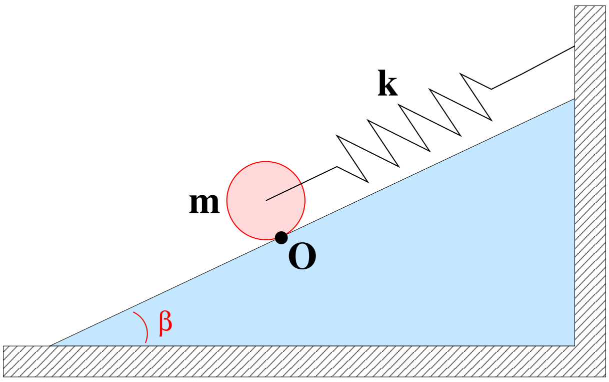
All'istante iniziale si ha $v = 0$, $h = 0$ e quindi $E_m = 0$. In quello finale $v(t_f) = v_f$, $h(t_f) = h$ e dovrà valere per la conservazione dell'energia meccanica $E_m = 0$. Si ricava quindi $v_f$:

$$v_f = \sqrt{\frac{4gh(M - m\sin\beta)}{3m + 2M}}$$

da cui

$$\omega_f = v_f/R = \sqrt{\frac{4gh(M - m\sin\beta)}{(3m + 2M)R^2}} = 98.3\text{rad/s}^2$$

**Esercizio 3.**
Si consideri lo stesso cilindro e lo stesso piano inclinato dell'esercizio precedente. Stavolta però l'asse del cilindro sia collegato al vertice superiore del piano inclinato tramite una corda elastica di costante elastica $k = 1.5\text{N/m}$, come in figura. **a)** Si scriva l'energia meccanica del sistema in un istante generico. **b)** Si derivi l'equazione del moto del cilindro (sempre nell'ipotesi di puro rotolamento). **b)** Si calcoli il periodo di oscillazione.




**Soluzione**
**a)**

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Il momento d'inerzia rispetto al centro di massa vale $I = \frac{1}{2}mR^2$. Si può fissare il sistema di riferimento tale che $x_0 = 0$ e $h = x\sin\beta$. La condizione di puro rotolamento impone che $v = \omega R$. Pertanto:

$$E_m = \frac{3}{4}mv^2 + mgx\sin\beta + \frac{1}{2}kx^2$$

**b)** L'energia meccanica si conserva, dato che le forze sono conservative tranne la forza d'attrito volvente, che però non compie lavoro (il punto di applicazione è istantaneamente fermo). Dunque l'equazione del moto può essere ricavata imponendo tale conservazione nella forma:

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}m\ddot{x} + mg\sin\beta + kx\right)\dot{x} = 0$$

da cui togliendo la soluzione banale $v(t) = \dot{x} = 0$, si ha

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x + \frac{2}{3}g\sin\beta = 0$$

**b)** [procedura alternativa] Analogamente a quanto fatto per l'esercizio 2:

$$\begin{cases} I\alpha = F_A R \\ I = \frac{1}{2}mR^2 \\ ma = -mg\sin\beta - F_A - kx \\ v = \omega R \qquad (a = \alpha R) \end{cases}$$

da cui risolvendo si ottiene

$$\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x + \frac{2}{3}g\sin\beta = 0$$

**c)** L'equazione precedente ha soluzione armonica con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{3m}} = 6.28\mathrm{s}$$