Fisica Generale I (primo modulo)
A.A. 2008-09, 12 gennaio 2009

Esercizio 1.
Un proiettile di massa $m = 100$g e dimensioni trascurabili viene sparato con velocità $v_0 = 10$m/s contro un blocco di legno di massa $M = 1$Kg inizialmente fermo.

a) Se il blocco viene tenuto rigidamente fermo, il proiettile penetra per una profondità $d = 10$cm, fino ad arrestarsi, per effetto di una forza frenante costante. Quanto vale tale forza?

b) Se invece il blocco è lasciato libero di muoversi, qual'è la sua velocità finale, nell'ipotesi che la forza tra proiettile e blocco sia la stessa e che il proiettile urti il blocco lungo una retta passante per il centro di massa?

c) In quest'ultimo caso, qual'è la nuova profondità di penetrazione d' ?

d) Se invece la direzione iniziale del proiettile corrisponde ad una retta che dista $b = 4$cm dal centro di massa del blocco, quanto vale il momento angolare iniziale del sistema rispetto al centro di massa del blocco? Quali quantità sono conservate nell'urto? Si discuta qualitativamente il moto del sistema dopo l'urto.

Soluzione 1.

a) Il blocco è soggetto a vincoli esterni, non trascurabili nell'urto. Non si conservano né la quantità di moto né l'energia cinetica. Detta $\vec{F}$ la forza frenante e W il lavoro da essa svolto, usando il teorema delle forze vive, $W = \Delta E_k$, si ottiene

$$W = E_{ki} \qquad \Rightarrow \qquad Fd = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{mv_0^2}{2d} = 50\text{N}$$

b) Il blocco è libero, senza vincoli (non appoggia su alcun piano!). In tali condizioni la quantità di moto totale del sistema blocco+proiettile si conserva:

$$p_i = p_f \qquad \Rightarrow \qquad mv_0 = (m+M)v_f \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \frac{m}{m+M}v_0 = 0.909\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Si applica il teorema delle forze vive analogamente al punto a) dove E_{kf} era nulla. Qui invece si ha

$$W' = E_{ki} - E_{kf} \qquad \Rightarrow \qquad Fd' = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad d' = \frac{mv_0^2 - (m+M)v_f^2}{2F} = 9.09\text{cm}$$

d) A differenza del caso al punto b), dove il momento angolare era nullo prima dell'urto, qui si ha un momento angolare iniziale associato al moto del proiettile. Se riferito al CM del blocco vale

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \qquad L = rp\sin\theta$$

dove θ è l'angolo compreso fra $\vec{r}$ e $\vec{p}$. Quindi in modulo

$$r = \frac{b}{\sin\theta}, \qquad L = pb = mv_0 b = 0.04\text{Js}$$

- L'energia cinetica totale non si conserva (urto anelastico).
- La quantità di moto totale si conserva (non ci sono forze esterne).
- Il momento angolare si conserva (non ci sono forze esterne, quindi nemmeno momenti di forze esterne).

Il centro di massa del sistema proiettile+blocco si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_f. Per la conservazione del momento angolare si ha al contempo una rotazione del sistema attorno al suo centro di massa. L'asse di rotazione e la frequenza di rotazione dipendono dalla forma del blocco e dal momento d'inerzia del sistema. Parte dell'energia cinetica iniziale si trasforma in energia cinetica di rotazione.

Esercizio 2.
Una molecola è costituita da due atomi, che chiameremo A e B, di massa M_A e m, rispettivamente. Si supponga che la massa dell'atomo B sia molto più piccola di quella dell'atomo A, di modo che sia possibile considerare l'atomo A sempre in quiete. Gli atomi interagiscono tramite una forza, che è diretta lungo la retta congiungente A e B e vale:

$$\mathbf{F}(r) = k\left[\frac{12\sigma^{12}}{r^{13}} - \frac{6\sigma^6}{r^7}\right]\mathbf{u}_r\,, \qquad (1)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore che indica la posizione di B rispetto ad A, $\mathbf{u}_r$ è il corrispondente versore, mentre k e σ sono costanti positive assegnate.

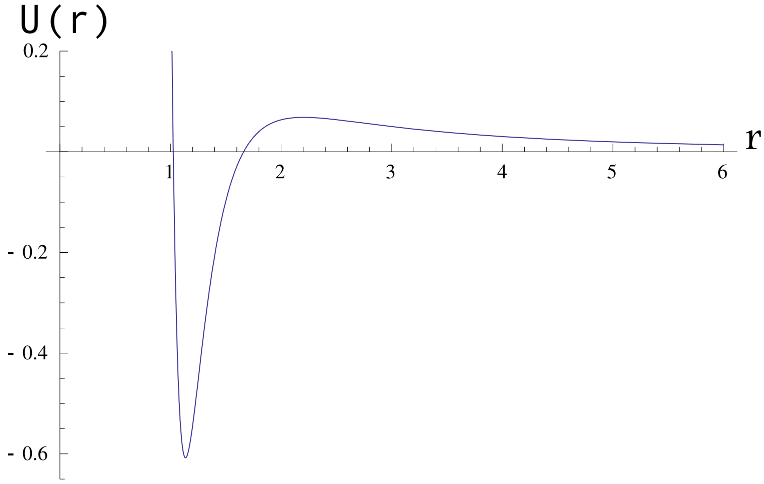
a) Si supponga che l'atomo B abbia velocità trascurabile. Si calcoli la distanza r in cui il sistema è in equilibrio.

b) Si calcoli l'energia potenziale associata alla forza F.

c) Si calcoli il lavoro che è necessario compiere per dissociare la molecola, ovvero per allontanare indefinitamente l'atomo B, partendo dalla sua posizione di equilibrio.

d) Si supponga ora che l'atomo B si muova attorno ad A avendo un momento angolare L. Si scriva l'equazione necessaria a determinare il raggio di un'orbita circolare compatibile con un L assegnato.

e) Si consideri il grafico in figura, raffigurante l'energia potenziale efficace, somma dell'energia potenziale dovuta alla forza F (già calcolata al punto (b)) e dell'energia potenziale centrifuga, per una certa scelta dei parametri k, σ, m ed L. Indicare per quale/i distanza/e r_0 l'atomo B compie un moto circolare. Si descriva qualitativamente il moto dell'atomo se la distanza iniziale tra A e B è leggermente i) superiore o ii) inferiore a r_0.



Soluzione 2.

a) L'atomo B è in equilibrio quando la forza agente su di esso è nulla. Ponendo $F(r) = 0$ si ricava

$$r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma$$

b) Per una forza centrale conservativa si può scrivere

$$F(r) = -\frac{d}{dr}U(r)$$

dove $U(r)$ è l'energia potenziale definita a meno di una costante arbitraria $U(\gamma)$:

$$U(r) = U(\gamma) - \int_{\gamma}^{r} F(r)dr$$

Possiamo fissare la costante scegliendo $U(\infty) = 0$. Si trova:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = k\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

c) Per definizione di $U(r)$, il lavoro fatto contro la forza F per portare l'atomo B da una distanza r_0 fino ad una distanza infinita è:

$$W = -\int_{r_0}^{\infty} F(r)dr = U(\infty) - U(r_0) = -U(r_0)$$

Osserviamo che r_0, essendo la distanza di equilibrio, corrisponde alla distanza in cui l'energia potenziale è minima, $U(r_0) = U_{\min}$. Inserendo in U il valore trovato al punto a) per r_0 si ottiene $W = \frac{k}{4}$.

d) Si ha moto circolare uniforme quando la forza che agisce su B per effetto di A è uguale in modulo (ma opposta in verso) alla forza centrifuga dovuta alla rotazione di B (nel sistema inerziale ciò equivale a dire che la forza deve dare esattamente l'accelerazione centripeta richiesta per il moto circolare). Essendo la forza centrifuga uguale a

$$F = m\omega^2 r = \frac{L^2}{mr^3}$$

si ricava l'equazione

$$r^{10} - \alpha r^6 + \beta = 0 \tag{2}$$

avendo posto

$$\alpha = \frac{6km\sigma^6}{L^2}, \qquad \beta = \frac{12k\sigma^{12}m}{L^2}.$$

Le soluzioni con $r > 0$ della (2) corrispondono ad orbite circolari. La stessa equazione può essere ottenuta cercando il minimo dell'energia potenziale efficace:

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + k\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6\right] \tag{3}$$

e) Il grafico in figura rappresenta l'energia potenziale efficace (3), per un L assegnato. Le soluzioni dell'equazione (2) corrispondono alla posizione del minimo e del massimo della curva (il massimo locale in prossimità di $r \simeq 2.2$). Se l'atomo si trova alla distanza in cui l'energia potenziale è minima e la sua energia cinetica radiale è nulla, allora il moto è circolare, coerentemente con il punto precedente. Se si trova ad una distanza leggermente superiore o leggermente inferiore, il moto seguirà un'orbita legata con distanza che oscilla attorno a r_0 tra due estremi individuati dalle intersezioni della curva con la retta orizzontale che indica l'energia dell'atomo. Se l'atomo si trova vicino al massimo della curva, sempre con energia cinetica radiale nulla, allora o si allontana indefinitamente (se stava inizialmente a destra del massimo) o rimane legato in un orbita chiusa (se stava inizialmente a sinistra del massimo).