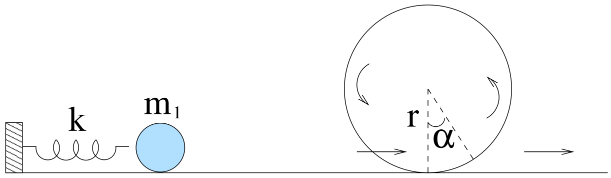
**Fisica Generale I (primo e secondo modulo)**
**A.A. 2008-09, 15 luglio 2009**

*Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente ai corsi di Fisica Generale 1 e 2 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:*

**Esercizio I.1**




Si consideri il sistema in figura. Il corpo di massa $m_1 = 1\text{kg}$ e dimensioni trascurabili è appoggiato alla molla di costante elastica $k = 24.5\text{kN/m}$ e massa trascurabile. La molla è tenuta compressa in modo che il corpo si trova inizialmente fermo ad una distanza $d$ rispetto alla posizione di equilibrio della molla stessa. Ad un certo istante, la molla è lasciata libera di espandersi e il corpo viene spinto lungo una superficie priva di attrito. La superficie forma un giro della morte con un raggio $r = 20\text{cm}$.
**a)** Calcolare la reazione vincolare esercitata dalla superficie sul corpo, in funzione della compressione $d$, quando questo si trova ad un generico angolo $\alpha$ del giro della morte.
**b)** Calcolare la compressione minima $d$ per cui la massa $m_1$ riesce a compiere per intero il giro della morte.
**c)** Si modifichi il sistema in figura aggiungendo un corpo di massa $m_2 = 2\text{kg}$, inizialmente fermo sul tratto orizzontale tra la massa $m_1$ e il giro della morte, ad una distanza da $m_1$ superiore a $d$. Assumendo che l'urto tra i corpi sia completamente anelastico, calcolare la compressione $d$ minima che permette ai corpi di completare il giro della morte.

**Esercizio I.2**
Un bastone uniforme di lunghezza $D = 0.5$ m appoggia con un estremo su una lastra orizzontale di ghiaccio che si assume priva di attrito. L'altro estremo è sostenuto in modo che il bastone formi con la lastra un'angolo $\alpha = 30°$. Si utilizzi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $x - y$ avente origine nel punto di contatto iniziale tra bastone e lastra e asse orizzontale $x$ parallelo alla lastra. Ad un certo istante il bastone viene lasciato cadere.

**a)** Si scriva la relazione tra la velocità di traslazione del centro di massa e la velocità angolare di rotazione del bastone attorno al centro di massa.
**b)** Si scriva l'energia meccanica in un generico istante durante la caduta.
**c)** Si calcoli la coordinata $x$ del centro di massa e la velocità del centro di massa, quando il bastone raggiunge la posizione orizzontale.
Si assuma ora che il bastone sia vincolato alla lastra in modo che il punto di contatto rimanga fisso e il bastone possa ruotare attorno ad esso.
**d)** Si ripeta il calcolo della velocità del centro di massa nel momento dell'impatto.
**e)** Se, dopo aver raggiunto la posizione orizzontale, il bastone rimbalza sulla lastra dissipando un decimo della sua energia meccanica, si calcoli l'angolo massimo raggiunto dopo il primo urto e quanti urti occorrono affinché tale angolo sia inferiore a $1°$.

---

*Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente al corso di Fisica Generale 3 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:*

**Esercizio II.1**
Un recipiente cilindrico isolato, di volume $V = 4$ litri è diviso in due camere uguali da una parete di sezione $S = 100$ cm$^2$ e volume trascurabile, perfettamente scorrevole. In una delle due camere è contenuta una mole di gas ideale monoatomico, mentre l'altra parte è vuota. La parete mobile è mantenuta in equilibrio da una molla di costante elastica $k = 104$ N/m, compressa di 10 cm.
Praticando un piccolo foro nella parete mobile, il gas diffonde nella camera vuota. Calcolare la variazione di energia interna e di entropia del gas (si trascuri la capacità termica delle pareti).

**Esercizio II.2**
Si consideri un gas, non ideale, la cui equazione di stato per una sola mole è data da

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$

con $a = 0.44$ Nm$^4$/mole$^2$ e $b = 0.52 \times 10^{-4}$ m$^3$/mole. Calcolare il lavoro compiuto da una mole di tale gas in una espansione isoterma reversibile dal volume iniziale $V_1 = 0.01$ m$^3$ al volume finale $V_2 = 0.02$ m$^3$, alla temperatura di 290 K. Si paragoni tale risultato con il lavoro calcolato per la stessa trasformazione, ma considerando l'approssimazione di gas ideale.

**Fisica Generale I (primo e secondo modulo)**
**A.A. 2008-09, 15 luglio 2009**

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |
| Iscritto al Corso di Laurea in | ◯ Matematica<br>◯ Fisica |
| Anno di Corso | ◯ primo<br>◯ oltre il primo |
| Tipo di scritto svolto | ◯ solo meccanica (esercizi I.1 e I.2)<br>◯ solo termodinamica (esercizi II.1 e II.2)<br>◯ tutto lo scritto |

**Note:**

- Gli iscritti al corso di laurea in matematica possono svolgere la prova intera o solo una delle due parti. Lo stesso vale per gli studenti di fisica iscritti al II anno di corso o agli anni successivi.
- Gli iscritti al primo anno del corso di laurea in fisica che hanno già superato la prova intermedia di meccanica (sessione di gennaio-febbraio 2009) possono svolgere solo la parte di termodinamica.
- Gli iscritti al primo anno del corso di laurea in fisica che non hanno superato la prova intermedia devono svolgere la prova per intero.
- Per coloro che svolgono la prova per intero: ai fini del superamento della prova è necessario svolgere in modo sufficiente almeno 3 esercizi su 4, di cui 2 di meccanica e uno di termodinamica.
- **Si raccomanda di esporre i risultati di ciascun esercizio, sia algebrici che numerici, in modo chiaro e ordinato!**

**Soluzione I.1**
**a)** l'energia meccanica $U$ data dalla somma dell'energia cinetica più quella potenziale è conservata e pari all'energia elastica iniziale $E_k$

$$U = \frac{1}{2}m_1 v^2(\alpha) + m_1 g r[1 - \cos(\alpha)]$$

$$E_k = \frac{1}{2}kd^2$$

da cui eguagliando le precedenti si ricava

$$v^2(\alpha) = \frac{k}{m_1}d^2 - 2gr[1 - \cos(\alpha)]$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{k}{rm_1}d^2 - 2g[1 - \cos(\alpha)]$$

La componente radiale delle forze (reazione vincolare più forza peso) deve essere pari alla forza centripeta. La reazione vincolare sarà diretta verso il centro della stessa circonferenza e pari a

$$|\vec{N}| = m_1 a_c + m_1 g \cos(\alpha) = m_1 \frac{v^2(\alpha)}{r} + m_1 g \cos(\alpha) = \frac{kd^2}{r} - gm_1(2 - 3\cos(\alpha)]$$

**b)** Affinché la massa non si stacchi dalla guida, deve essere che $N > 0$. Dalla precedente imponendo il limite $N = 0$ per $\alpha = \pi$, ovvero $a_c = g$, si ricava

$$d_{min} = \sqrt{\frac{5m_1 rg}{k}} = 2\text{cm}$$

**c)** Durante l'urto si conserva l'impulso totale ed i due corpi procedono appiccicati. Detta $v_i$ la velocità iniziale del primo blocco e $v_f$ quella immediatamente dopo l'urto dei due blocchi si ha:

$$(m_1 + m_2)v_f = m_1 v_i$$

Come al punto b) si impone che alla sommità del giro della morte sia $N = 0$, ovvero $g = a_c$. Detta $v_{top}$ la velocità tangenziale nel punto più alto, dato che

$$a_c = \frac{v_{top}^2}{r}, \qquad v_i = \sqrt{\frac{k}{m_1}}d$$

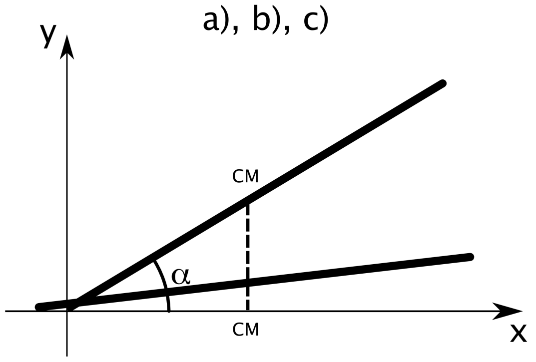
ed imponendo la conservazione dell'energia meccanica dopo l'urto

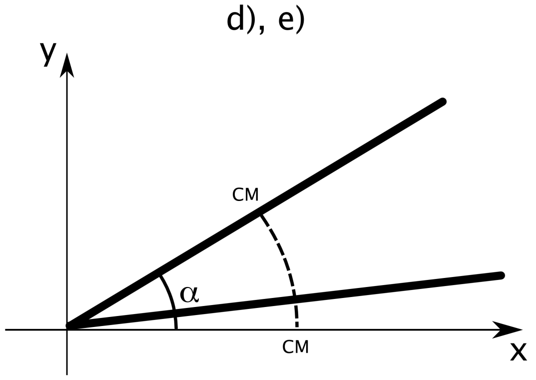
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = 2(m_1 + m_2)gr + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{top}^2$$

si ottiene

$$d_{min} = \sqrt{\frac{5rg}{km_1}}(m_1 + m_2) = 6\text{cm}$$

**Soluzione I.2**




**a)** Sul bastone non agiscono forze lungo l'asse $x$. Le uniche forze agenti sono la forza peso applicata al centro di massa (CM) e la reazione vincolare della lastra di ghiaccio. Di conseguenza la coordinata $x$ del CM rimarrá costante durante tutta la caduta. Ad ogni istante la coordinata $y$ del CM sará data da $y_{CM} = D/2 \sin\theta$, dove $\theta$ è l'angolo che il bastone forma con l'asse $x$. Derivando rispetto al tempo si ottiene il legame tra la velocità del centro di massa e la velocità con cui cambia l'angolo $\theta$:

$$v_{CM} = \frac{d}{dt} y_{CM} = \frac{D}{2}\dot{\theta}\cos\theta. \tag{1}$$

Osservando infine che $\theta$ coincide con l'angolo che parametrizza la rotazione del bastone attorno al CM, si conclude che l'equazione sopra lega appunto la velocità di traslazione del CM alla velocità di rotazione del bastone attorno al CM.

**b)** Separando il moto in traslazione del CM e rotazione attorno al CM si può esprimere l'energia meccanica del sistema ad un generico istante:

$$E = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgy_{CM}, \tag{2}$$

dove $I = mD^2/12$ è il momento di inerzia del bastone rispetto al CM. Da cui, usando la relazione tra $v_{CM}$ e $\dot{\theta}$, si ha

$$E = \frac{mD^2\dot{\theta}^2}{8}\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right) + \frac{mgD}{2}\sin\theta. \tag{3}$$

**c)** Come discusso sopra, la coordinata $x$ del CM rimane costante e uguale a quella iniziale:

$$x_{CM} = \frac{D}{2}\cos\alpha = 0.217 \text{ m}. \tag{4}$$

L'energia meccanica nell'istante iniziale ($\theta = \alpha$) é $E_i = mgD\sin(\alpha)/2 = mgD/4$. All'istante finale $\theta = 0$ quindi $E_f = mD^2\dot{\theta}_f^2/6$. La conservazione dell'energia meccanica $E_f = E_i$ consente di trovare $\dot{\theta}_f$ e di consequenza:

$$v_{CM,f} = \sqrt{\frac{3gD}{8}} = 1.356 \text{ m}/s. \tag{5}$$

**d)** Nel caso in cui il bastone sia imperniato nel punto di contatto non si ha piú un moto rettilineo del CM, dato che la forza vincolare ha componenti anche lungo $x$. Tuttavia, l'energia iniziale $E_i$ è la stessa del punto c). Inoltre, la velocità del centro massa all'istante finale (e solo in questo istante) è diretta lungo $y$. Perciò l'equazione $E_f = E_i$ fornisce lo stesso risultato ottenuto al punto c).

**e)** Dopo il primo rimbalzo, il bastone ha a disposizione una energia meccanica $E_1 = 9E_i/10$. Con questa nuova energia meccanica, il massimo angolo $\alpha_1$, raggiunto quando il bastone è fermo, è dato dall'equazione:

$$E_1 = mg\frac{D}{2}\sin\alpha_1, \tag{6}$$

da cui $\alpha_1 = 26.74°$. Allo stesso modo, dopo $N$ rimbalzi l'energia meccanica rimasta sará $E_N = (9/10)^N E_i$. Tale energia deve essere minore dell'energia $mg\frac{D}{2}\sin\alpha_m$, sufficiente a raggiungere un'angolo massimo $\alpha_m$. Imponendo $E_N = mg\frac{D}{2}\sin\alpha_m$, si ha:

$$N = \log_{9/10}(2\sin\alpha_m), \tag{7}$$

da cui $N \geq 32$.