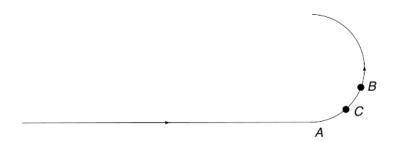
Fisica Generale I (primo e secondo modulo) A.A. 2009-10, 1 Febbraio 2010

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente ai corsi di Fisica Generale 1 e 2 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:

Esercizio I.1



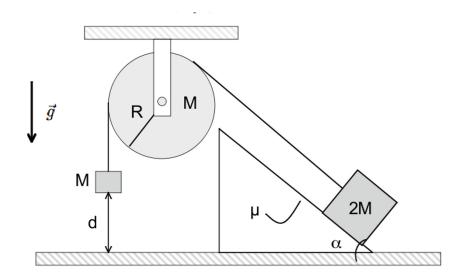
Una forza costante F agisce per un tempo $\Delta t = 10^{-2}$ sec su un corpo di massa m=0.1 Kg, inizialmente fermo. A seguito di ciò il corpo percorre un tratto rettilineo lungo d=0.72 m, che presenta un coefficiente di attrito dinamico $\mu=0.5$. In un punto A, alla fine del tratto rettilineo, il corpo entra in una guida liscia circolare di raggio R=0.4 m, posta in un piano verticale, e si arresta in un punto B, alla quota b=0.5R. Calcolare il valore della forza F ed il modulo della reazione vincolare della guida circolare nel punto C della guida che si trova ad una quota c=0.3R.

Esercizio I.2

Una macchina di Atwood (cfr. figura pagina seguente) consiste di una carrucola fissa di raggio R e massa uniforme M (un disco), attorno alla quale è avvolta una fune inestensibile di massa trascurabile che collega due blocchi di massa M e 2M. Il blocco più leggero è inizialmente posizionato ad una distanza d dal terreno. Il blocco più pesante invece, è adagiato su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Sia μ il coefficiente di attrito tra le superfici del piano inclinato e del blocco pesante. La forza peso agisce verso il basso. Si assuma che la fune non scivoli mai:

- (i) Si disegnino i diagrammi delle forze che agiscono sui due blocchi e sulla carrucola;
- (ii) Si determini la condizione sull'angolo α per cui il blocco leggero si muove verso l'alto;
- (iii) Si determini la condizione sull'angolo α per cui il blocco leggero si muove verso il basso;
- (iv) Se il blocco leggero si muove verso il basso, si determini la sua accelerazione in funzione dell'angolo α .

[Nota bene: Il momento d'inerzia del disco di massa m e raggio r calcolato rispetto all'asse di simmetria vale: $I=\frac{1}{2}mr^2$.]



Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente al corso di Fisica Generale 3 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:

Esercizio II.1

Una macchina termica funziona utilizzando due sorgenti di calore: una di esse è un serbatoio alla temperatura $T_2=300K$, mentre l'altra è costituita inizialmente da una massa M=3Kg di ghiaccio alla temperatura $T_1=273K$. Si determini il massimo lavoro ottenibile tramite tale macchina, utilizzata fino alla fusione completa del ghiaccio. Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda_F=3.3\times 10^5 J/Kg$.

Esercizio II.2

n=4 moli di un gas ideale monoatomico alla temperatura $T_1=520K$ sono contenute in un volume V_1 di un cilindro a pareti rigide e adiabatiche, collegato tramite un rubinetto ad un secondo cilindro anch'esso di pareti rigide e adiabatiche. Inizialmente il rubinetto è chiuso ed il secondo cilindro è vuoto. Il gas compie nel primo cilindro un'espansione adiabatica reversibile occupando il volume $V'_1=4V_1$. Si apre poi il rubinetto ed il gas fluisce nel secondo cilindro, di volume $V_2=V'_1$. Si calcolino la variazione di energia interna ed entropia in ciascuna trasformazione.

Fisica Generale I (primo e secondo modulo) A.A. 2009-2010, 1 Febbraio 2010

Cognome	
Nome	
Matricola	
Iscritto al Corso di Laurea in	○ Matematica○ Fisica
Anno di Corso	○ primo○ oltre il primo
Tipo di scritto svolto	 ○ solo meccanica (esercizi I.1 e I.2) ○ solo termodinamica (esercizi II.1 e II.2) ○ tutto lo scritto

Note:

- Gli iscritti al corso di laurea in matematica possono svolgere la prova intera o solo una delle due parti. Lo stesso vale per gli studenti di fisica iscritti al II anno di corso o agli anni successivi.
- Gli iscritti al primo anno del corso di laurea in fisica che hanno già superato la prova intermedia di meccanica (sessione di gennaio-febbraio 2009) possono svolgere solo la parte di termodinamica.
- Gli iscritti al primo anno del corso di laurea in fisica che non hanno superato la prova intermedia devono svolgere la prova per intero.
- Per coloro che svolgono la prova per intero: ai fini del superamento della prova è necessario svolgere in modo sufficiente almeno 3 esercizi su 4, di cui 2 di meccanica e uno di termodinamica.
- Si raccomanda di esporre i risultati di ciascun esercizio, sia algebrici che numerici, in modo chiaro e ordinato!

Soluzione I.1

Sia t_0 l'istante in cui la forza impulsiva F descritta nel testo smette di agire sul corpo di massa m e si fissi per semplità $x_0 = x(t_0) = 0$, origine O di un sistema di riferimento in cui \mathbf{e}_1 rappresenta il versore orizzontale (verso da sinistra a destra) ed \mathbf{e}_2 il versore verticale ascendente. Secondo tali convenzioni, risulta che $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_1$. Lungo il persorso da O ad A, il corpo massivo è sottoposto alla forza di attrito $-mg\mu\mathbf{e}_1$ che agisce nella direzione del moto. Ne segue che $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{e}_1$,

$$v(t) = v_0 - \mu gt , \qquad (1)$$

dove $v_0 = \frac{F\Delta t}{m}$. Per integrazione rispetto al tempo, si trova che

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2 \ . \tag{2}$$

Dalla condizione $x(t_A) = d$, si ha che

$$t_A = \frac{1}{\mu g} \left[v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \right] . \tag{3}$$

La velocità del corpo quando arriva in A vale

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \ . \tag{4}$$

Essendo la guida circolare liscia per ipotesi, l'energia che il corpo possiede in A si conserva:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgb. (5)$$

Dalla (5), segue il vincolo sul modulo della forza impulsiva F, i.e.

$$F = \frac{m}{\Delta t} \sqrt{(R + 2\mu d)g} \approx 33N. \tag{6}$$

Siano \mathbf{n} , \mathbf{t} i versori normale e tangente alla guida circolare nel punto C. Detto α l'angolo che la verticale passante per A forma con il raggio della guida passante per C, è immediato dimostrare che:

$$\mathbf{e}_1 = -\sin\alpha \,\mathbf{n} - \cos\alpha \,\mathbf{t}$$
, $\mathbf{e}_2 = \cos\alpha \,\mathbf{n} - \sin\alpha \,\mathbf{t}$. (7)

Poiché la guida è liscia, la reazione vincolare risulta puntualmente normale al vincolo, ovvero

$$\mathbf{\Phi} = \phi \, \mathbf{n} \, . \tag{8}$$

La seconda legge di Newton

$$-mg(\cos\alpha\,\mathbf{n} - \sin\alpha\,\mathbf{t}) + \phi\mathbf{n} = m\left(\frac{v^2}{R}\,\mathbf{n} + R\ddot{\alpha}\,\mathbf{t}\right)$$
(9)

proiettata lungo il versore ${\bf n},$ provvede alla condizione necessaria per calcolare ϕ nel punto C :

$$\phi \Big|_{C} = mg \cos \alpha + \frac{mv_C^2}{R} \ . \tag{10}$$

Dalla conservazione dell'energia, segue che

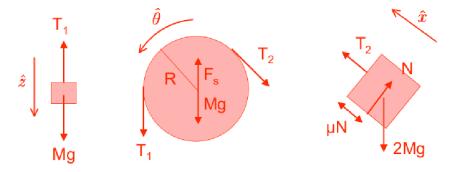
$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgc = mgb \tag{11}$$

per cui $v_C^2=2RG/5$. Considerato che $\cos\alpha=\frac{7}{10},$ il risultato finale è

$$\mathbf{\Phi}_C = \left(\frac{11}{10} m g\right) \mathbf{n} \approx (1.1N) \mathbf{n} . \tag{12}$$

Soluzione I.2

Per quanto riguarda la domanda (i), i diagrammi richiesti sono:



Si noti in particolare che il verso della forza di attrito dipende dal fatto che il blocco leggero si muova in su piuttosto che in giù. Affinché il blocco leggero si muova verso l'alto, domanda (ii), dev'essere che $T_1 > Mg$, $T_2 > T_1$ e la forza peso agente sul blocco pesante vinca la tensione T_2 e l'attrito,

$$2Mg\sin\alpha > T_2 + 2\mu Mg\cos\alpha , \qquad (1)$$

ovvero

$$Mg < T_1 < T_2 < 2Mg - 2\mu Mg \cos \alpha \implies \sin \alpha - \mu \cos \alpha > \frac{1}{2}$$
. (2)

Analogamente, perché il blocco leggero si muova verso il basso, domanda (iii), dev'essere che $Mg > T_1$, $T_1 > T_2$ e la tensione T_2 agente sul blocco pesante sia tale da vincere la forza peso e l'attrito:

$$Mg > T_1 > T_2 > 2Mg \sin \alpha + 2\mu Mg \cos \alpha \implies \sin \alpha + \mu \cos \alpha < \frac{1}{2}$$
. (3)

Infine, per rispondere alla domanda (iv), conviene introdurre l'asse z verticale discendente e l'asse x parallelo al piano inclinato con verso nella direzione della tensione T_2 . Si scrivano ora le equazioni della dinamica per i blocchi e la carrucola:

blocco leggero:
$$M\ddot{z} = Mg - T_1$$
 (4)

blocco pesante:
$$2M\ddot{x} = T_2 - 2Mg\sin\alpha - 2\mu Mg\cos\alpha$$
 (5)

carrucola:
$$I\ddot{\theta} = RT_1 - RT_2$$
. (6)

Tenuto conto che il momento di inerzia di un disco di massa M e raggio R vale $I=\frac{1}{2}MR^2$, possiamo riscrivere (6) come

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = RT_1 - RT_2 \ . \tag{7}$$

Il fatto che la fune sia priva di massa, inestensibile e non scivoli per ipotesi, introduce un vincolo che lega i tre oggetti del nostro sistema, ovvero

$$\dot{z} = R\dot{\theta} = \dot{x} \implies \ddot{z} = R\ddot{\theta} = \ddot{x}.$$
(8)

Tenuto conto di (4), (7) e (8),

$$T_1 = \frac{1}{3}Mg + \frac{2}{3}T_2 \tag{9}$$

Da (5), (7), (8) e (9), segue che

$$T_2 = \frac{2}{7} Mg(2 + 3\sin\alpha + 3\mu\cos\alpha)$$
 (10)

Le equazioni (9) e (10), forniscono

$$T_1 = \frac{1}{7} Mg(5 + 4\sin\alpha + 4\mu\cos\alpha)$$
 (11)

L'equazione (4) e (11) danno finalmente il risultato cercato:

$$\ddot{z} = \frac{g}{7}(2 - 4\sin\alpha - 4\mu\cos\alpha) \ . \tag{12}$$

Soluzione II.1

Il massimo lavoro ottenibile è quello di una macchina di Carnot che lavora tra le stesse sorgenti; in questo caso il rendimento vale

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.09 \;, \tag{1}$$

il massimo calore che puo' essere ceduto alla sorgente fredda, fino alla fusione completa del ghiaccio è (in modulo):

$$Q_1 = M\lambda_F = 9.9 \times 10^5 J \ . \tag{2}$$

Il corrispondente calore assorbito dalla sorgente calda vale

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 = 10.9 \times 10^5 J \tag{3}$$

Quindi il lavoro massimo ottenibile è $W = Q_2 - Q_1 = 10^5 J$.

Soluzione II.2

Per ottenere la temperatura T'_1 dopo l'espansione adiabatica reversibile si utilizza l'equazione delle adiabatiche:

$$T_1'(V_1')^{\gamma-1} = T_1(V_1)^{\gamma-1} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{5}{3},$$
 (1)

da cui si ottiene $T_1'=206.4~K$. La variazione di energia interna è quindi $\Delta U_1=nc_V(T_1'-T_1)=-10429J$. La variazione di entropia e' ovviamente nulla.

Nella seconda espansione si ha $\Delta U_2 = 0$ (espansione libera). Per calcolare la variazione di entropia si puo' utilizzare un qualsiasi percorso che connette gli estremi (e.g. un isoterma reversibile). Si trova

$$\Delta S_2 = nR \log \frac{V_2 + V_1'}{V_1'} = 28.8J/K \ . \tag{2}$$