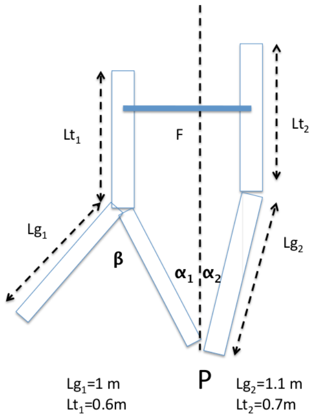
**Fisica Generale I (primo e secondo modulo)**
**A.A. 2009-10, 14 Gennaio 2010**

*Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente ai corsi di Fisica Generale 1 e 2 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:*

## Esercizio I.1


"Il tango è un pensiero triste che si balla"
E. S. Discepólo (Compositore di tango argentino)

Due ballerini di tango si trovano nella posizione statica indicata in figura. Questo sistema può essere approssimato dal sistema rigido riportato a lato: gli arti inferiori e la parte superiore del corpo (dorso + testa) dei ballerini sono sostituiti da barre sottili uniformi di densità lineare $\lambda = 20Kg \cdot m^{-1}$ e dimensioni indicate in figura. Le braccia sono invece rappresentate da una fune $F$ tesa e inestensibile, di massa trascurabile. I piedi dei ballerini poggiano in un punto fisso $P$ del pavimento. La prima gamba della ballerina è inclinata di un angolo $\alpha_1$ rispetto alla verticale passante per $P$, mentre la seconda gamba forma con la prima un angolo $\beta = 80°$. Le due gambe del ballerino sono invece parallele tra di loro ad un angolo $\alpha_2$ rispetto alla verticale passante per $P$. I torsi sono in posizione verticale. Si supponga che l'attrito con il pavimento sia tale da impedire ai piedi di scivolare in avanti, ma consenta al sistema di ruotare attorno all'asse verticale.

**a**) Se l'angolo $\alpha_1$ vale $20°$ si determini l'angolo $\alpha_2$ per cui il sistema rimane in equilibrio;

**b**) Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse verticale passante per il punto $P$;

**c**) Supponiamo che ad un certo istante i ballerini stiano ruotando attorno all'asse verticale passante per P, rimandendo rigidamente nella posizione indicata in figura. Sia $\omega_0 = 1.3 s^{-1}$ la velocità angolare del sistema. Successivamente, la rotazione rallenta fino ad arrestarsi, per effetto dell'attrito con il pavimento. Si calcoli l'energia dissipata nel processo.

**Esercizio I.2**

Due corpi A e B di dimensioni trascurabili e massa pari a $m = 0.4Kg$ giacciono su un piano orizzontale liscio e interagiscono tramite una molla di costante elastica $k = 10^3 N/m$ e lunghezza a riposo $H = 0.2m$. Inizialmente i due corpi sono tenuti fermi ad una distanza relativa di $h = 0.1m$. All'istante $t = 0$ il corpo B viene lasciato libero di muoversi, mentre il corpo $A$ rimane fissato. Nell'istante $t_0$ in cui la distanza tra A e B vale esattamente $H$, anche il vincolo che lega il corpo A al piano viene rimosso ed esso è lasciato libero di muoversi. Calcolare per $t > t_0$ la velocità del centro di massa del sistema, ed il valore massimo dell'energia cinetica, sia nel sistema di laboratorio che nel sistema di centro di massa.

---

*Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente al corso di Fisica Generale 3 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:*

**Esercizio II.1**

Un cilindro di raggio $r = 0.10m$, disposto verticalmente, è chiuso nella parte superiore da un pistone di massa $M = 5Kg$, collegato al fondo del cilindro da una molla di massa trascurabile, volume trascurabile, lunghezza a riposo $l_0 = 0.10m$ e costante elastica $k = 2 \cdot 10^3 N/m$. Il cilindro contiene $n = 0.6$ moli di gas ideale e sulla faccia esterna del pistone agisce la pressione atmosferica $p_0 = 1bar$. Supponendo che le pareti del cilindro siano formate da un materiale con buona conducibilità termica e che la temperatura esterna sia $T_0 = 295K$, si determini la posizione di equilibrio del pistone rispetto al fondo. Ad un certo istante la molla viene tagliata e il sistema, dopo una fase transiente, raggiunge un nuovo equilibrio meccanico. Ricavare, in queste nuove condizioni, il volume occupato dal gas ed il lavoro totale compiuto sul gas, assumendo che durante il processo l'ambiente esterno eserciti una pressione costante $p_0$.

**Esercizio II.2**

Una bombola di volume $V_A = 5 \cdot 10^{-3} m^3$ contiene 4 moli di elio alla temperatura di $T_A = 300K$. La bombola è collegata tramite un rubinetto ad un palloncino vuoto di volume iniziale trascurabile. Ad un certo istante si apre il rubinetto ed il palloncino si gonfia fino ad occupare il volume $V_B = 2 \cdot 10^{-3} m^3$. Supponendo che il processo avvenga senza scambi di calore con l'ambiente, che si trova a pressione $p_0 = 1bar$, si determini, ad equilibrio raggiunto:

**a**) la temperatura finale del gas $T_f$;

**b**) la pressione finale del gas $p_f$;

**c**) la variazione di entropia dell'universo $\Delta S_u$.

# Soluzione degli esercizi di meccanica

## Soluzione I.1

**(a)** Si tratta di imporre le condizioni di equilibrio statico al sistema in esame. Per un sistema generico le condizioni sono

$$\mathbf{R}_{ext} = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{M}_P = \mathbf{0}\,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{R}_{ext}$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema e $\mathbf{M}_P$ è la somma dei momenti delle forze esterne calcolati rispetto al polo $P$. Delle due equazioni, la prima è irrilevante in quanto contiene anche la forza vincolare che il pavimento esercita sul sistema nel punto fisso $P$ e che compensa esattamente il peso delle barre per qualsiasi valore dell'angolo incognito. La seconda equazione invece può essere esplicitata calcolando separatamente i momenti delle forze esterne agenti su ciascuna barra e sommando i risultati (le forze dovute alla fune sono forze interne e non vanno considerate ai fini dell'equilibrio). A tale scopo si nota che la reazione vincolare in $P$ ha momento nullo rispetto allo stesso punto e, quindi, le forze esterne che entrano nella condizione di equilibrio sono solo i pesi delle barre applicati ai rispettivi centri di massa. Si nota anche che tutti i vettori posizione e tutte le forze sono complanari e quindi il momento delle forze è diretto perpendicolarmente al foglio. Preso come positivo il verso uscente dal foglio, la somma delle componenti dei momenti diventa:

$$\begin{aligned} M_P &= \lambda g L_{g1}\left(\frac{3}{2}L_{g1}\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}L_{g1}\sin(\beta-\alpha_1) + L_{t1}\sin\alpha_1\right) \\ &- \lambda g L_{g2}(L_{g2}+L_{t2})\sin\alpha_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla condizione di equilibrio $M_P = 0$ si ottiene l'espressione dell'angolo incognito:

$$\alpha_2 = \arcsin\left[\frac{L_{g1}}{L_{g2}(L_{g2}+L_{t2})}\left(\frac{3}{2}L_{g1}\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}L_{g1}\sin(\beta-\alpha_1) + L_{t1}\sin\alpha_1\right)\right]. \tag{3}$$

Inserendo i valori numerici assegnati, si ottiene il risultato $\alpha_2 \approx 35°$.

**(b)** Per calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse verticale passante per $P$, è sufficiente calcolare i momenti d'inerzia di ciascuna barra rispetto allo stesso asse e sommarli. Per quanto riguarda il torso dei ballerini, si tratta di due barre di massa $\lambda L_{t1}$ e $\lambda L_{t2}$ poste rispettivamente a distanza $L_{g1}\sin\alpha_1$ e $L_{g2}\sin\alpha_2$ dall'asse; la somma dei loro momenti d'inerzia è quindi $\lambda L_{t1}L_{g1}^2(\sin\alpha_1)^2 + \lambda L_{t2}L_{g2}^2(\sin\alpha_2)^2$. Per quanto riguarda le gambe, invece, conviene prima calcolare il momento d'inerzia di un'asta di lunghezza $L$ per rotazioni attorno ad un asse passante per il proprio CM e tale da formare un angolo $\theta$ tra l'asse e l'asta:

$$I = 2\int_0^{L/2} \lambda(x\sin\theta)^2 dx = \frac{\lambda L^3}{12}(\sin\theta)^2 \tag{4}$$

Questa espressione può essere applicata al calcolo del momento d'inerzia di ciascuna gamba, combinandola con il teorema di Steiner. Per le gambe del ballerino si ha $I = (2/3)\lambda L_{g2}^3(\sin\alpha_2)^2$; per la gamba della ballerina con estremo in $P$ si ha $I = (1/3)\lambda L_{g1}^3(\sin\alpha_1)^2$; per la seconda gamba della ballerina, il teorema di Steiner dà $I = (1/12)\lambda L_{g1}^3(\sin(\beta-\alpha_1))^2 + \lambda L_{g1}[\sin\alpha_1 + (1/2)\sin(\beta-\alpha_1)]^2$. Sommandoli tutti si ottiene il momento d'inerzia del sistema:

$$\begin{aligned} I/\lambda &= L_{g1}^2\left(\frac{4}{3}L_{g1} + L_{t1}\right)\sin^2\alpha_1 + L_{g2}^2\left(\frac{2}{3}L_{g2} + L_{t2}\right)\sin^2\alpha_2 \\ &+ \frac{L_{g1}^3}{3}\sin^2(\beta-\alpha_1) + L_{g1}^3\sin\alpha_1\sin(\beta-\alpha_1). \end{aligned}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene $I \approx 27\ \ Kg\cdot m^2$.

**(c)** L'energia di rotazione iniziale dei due ballerini è:

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + V \tag{5}$$

essendo $V$ il potenziale gravitazionale. L'energia finale è data semplicemente da:

$$E_f = V \tag{6}$$

dove $V$ è lo stesso, dato che la quota dei baricentri dei ballerini non varia durante il moto. L'energia dissipata risulta essere quindi:

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}I\omega_0^2. \tag{7}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene $\Delta E \approx 23$ J.

### Soluzione I.2

Sia $h' = H - h = 0.1m$. Dalla conservazione dell'energia ricaviamo la velocità di $B$ subito prima del momento $t_0$, in cui tutta l'energia potenziale iniziale si è trasformata in energia cinetica:

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}}h' \tag{8}$$

In quello stesso istante la quantità di moto totale è uguale a quella di $B$ e la velocità del centro di massa risulta essere la metà di $v_B$:

$$v_{CM} = \frac{mv_B}{2m} = \frac{v_B}{2}\,. \tag{9}$$

Per $t > t_0$ sul sistema non agiscono forze esterne nella direzione del moto e la velocità del centro di massa rimane costante e uguale al valore trovato in (9). Si trova $v_{CM} = 2.5 m/s$.

L'energia del sistema si conserva e il valore massimo dell'energia cinetica nel sistema di riferimento del laboratorio è dato dal valore dell'energia potenziale iniziale:

$$T_{lab} = \frac{1}{2} k h'^2 \,. \tag{10}$$

Si trova $T_{lab} = 5.0$ J.

Usando il teorema di König per l'energia cinetica si trova l'energia corrispondente nel sistema di riferimento del centro di massa:

$$T_{CM} = T_{lab} - \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \tag{11}$$

Il risultato è $T_{CM} = 2.5$ J.

## Soluzione degli esercizi di termodinamica

### Soluzione II.1

Il gas si trova inizialmente in equilibrio termico con l'esterno, alla temperatura $T_0$ e alla pressione $p_1$, che è data dalla condizione di equilibrio meccanico:

$$p_1 = p_0 + \frac{k(l_1 - l_0)}{\pi r^2} + \frac{Mg}{\pi r^2}, \tag{12}$$

dove $l_1$ è la lunghezza della molla all'equilibrio. Dall'equazione di stato otteniamo una relazione tra $p_1$, $l_1$ e $T_0$:

$$\pi r^2 l_1 p_1 = nRT_0. \tag{13}$$

Combinando queste relazioni si ottiene un'equazione di secondo grado per $l_1$, la cui unica soluzione positiva è $l_1 \simeq 0.39m$.

Dopo il taglio della molla si raggiunge una nuova posizione di equilibrio determinata dalle relazioni:

$$p_2 = p_0 + \frac{Mg}{\pi r^2} \simeq 1.016 \cdot 10^5 N/m^2 \tag{14}$$

e

$$V_2 = \pi r^2 l_2 = \frac{nRT_0}{p_2} \tag{15}$$

da cui si ottiene $l_2 \simeq 0.46m$. Nell'ipotesi che la pressione esterna rimanga costante durante la trasformazione, il lavoro vale:

$$W = p_0(V_2 - V_1) \simeq 220J. \tag{16}$$

### Soluzione II.2

Il processo è costituito da una adiabatica irreversibile in cui il gas compie lavoro contro la pressione esterna. Il lavoro è quindi:

$$W = p_0[(V_A + V_B) - V_A] \simeq 200J \tag{17}$$

Usando $W = -nc_v(T_f - T_A)$ si trova $T_f = T_A - \frac{W}{nc_v} \simeq 267K$.

La pressione finale è ricavabile dall'equazione di stato del gas:

$$p_f = \frac{nRT_f}{V_A + V_B} \simeq 13bar \tag{18}$$

La variazione di entropia è pari a quella di un gas (trasf. adiabatica) e vale quindi:

$$\Delta S_u = \Delta S_{gas} = nc_v ln\left[\frac{T_f(V_A + V_B)^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}}\right] \simeq 0.4\, J \cdot K^{-1} \quad (\gamma = 5/3). \tag{19}$$