Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2009-10, 14 Giugno 2010

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fis. Gen. I:

Esercizio I.1
Si condideri un'asta rigida, sottile e omogenea, di massa $M = 0.3$Kg e lunghezza $d = 0.5$m. Agli estremi sono incernierati due anellini di massa $m = 0.1$Kg ciascuno. I due anellini possono scorrere senza attrito lungo due guide rettilinee, l'una verticale e l'altra orizzontale, che si incrociano in un punto O. Il tutto si trova nel campo di gravità con accelerazione g.

Inizialmente l'anellino sulla guida orizzontale è tenuto fermo da un vincolo rigido, in modo che l'asta è in quiete in una posizione tale che l'anello sulla guida verticale si trova al di sotto del punto O a distanza $d/2$ da questo. **a)** Si calcolino le componenti orizzontali e verticali delle reazioni vincolari sugli anelli; **b)** si calcoli l'energia meccanica del sistema.

Ad un certo istante il vincolo è rimosso e gli anelli sono lasciati liberi di scorrere lungo le guide. **c)** Quali grandezze si conservano durante il moto (energia? quantità di moto? momento angolare?); **d)** si esprima la relazione esistente tra i moduli delle velocità dei due anelli durante il moto.

Si consideri la situazione nell'istante in cui l'asta viene a trovarsi in posizione verticale. **e)** Si calcoli la velocità dell'anello sulla guida verticale e si esprima la relazione esistente tra la velocità dell'anello sulla guida orizzontale e la velocità angolare di rotazione dell'asta; **f)** si scriva l'espressione dell'energia meccanica e si calcoli la velocità dell'anello sulla guida orizzontale; **g)** Si calcoli il momento angolare rispetto a O e la quantità di moto del sistema.

Esercizio I.2
La stazione spaziale internazionale ha una massa di circa 3×10^5Kg e ruota attorno alla terra in un orbita circolare a 350Km di altitudine e con una velocità di circa 7.7Km/s. **a)** Sapendo che $G = 6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$, e che la massa e il raggio terrestre sono rispettivamente 6×10^{24} Kg e 6370Km, si calcoli il momento angolare, L_0, e l'energia meccanica, E_0, della stazione. Ad un certo istante viene acceso un motore che frena la stazione in un intervallo breve e mantenendo la traiettoria circolare, diminuendo la sua velocità angolare del 10%. Poi il motore viene spento. b) Si calcoli il momento angolare finale, L_f, e la variazione di energia meccanica, ΔE. **c)** Si traccino le curve di energia potenziale efficace per il moto radiale della stazione corrispondenti ai due valori L_0 e L_f e si discuta qualitativamente il tipo di traiettoria che la stazione seguirà dopo lo spegnimento del motore. **d)** La stazione cadrà sulla terra?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1
In un contenitore adiabatico di capacità termica trascurabile vengono posti 3Kg di ghiaccio alla temperatura $t_1 = -20°$C e un litro di acqua bollente. Si determinino le condizioni del sistema all'equilibrio termodinamico (temperatura finale, massa di ghiaccio, se presente, e massa d'acqua in fase liquida, se presente). Si calcoli la variazione di entropia del ghiaccio nella prima fase del processo, quando si riscalda fino al punto di fusione.
[Dati numerici: il calore specifico del ghiaccio vale $c_g = 2051$ J/(Kg K), quello latente di fusione vale $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/Kg. Il calore specifico dell'acqua in fase liquida vale $c_a = 4187$ J/(Kg K)]

Esercizio II.2
Un recipiente a pareti adiabatiche e rigide è diviso in tre parti uguali A, B e C da due setti anch'essi adiabatici. Nei tre comparti sono contenute rispettivamente: 2 moli di gas ideale monoatomico alla temperatura $T_A = 300$K, 1 mole di gas ideale biatomico alla temperatura $T_B = 350$K e 3 moli di gas ideale monoatomico alla temperatura $T_C = 400$K. Ad un certo istante vengono rimossi simultaneamente i due setti. Si determini:

- a) la temperatura finale del sistema;
- b) la variazione di entropia dell'universo.
- c) se si fosse rimosso prima il setto tra A e B e poi, una volta raggiunto l'equilibrio, quello tra B e C, quale sarebbe stata la temperatura finale? E la variazione di entropia?

Soluzione I.1

a) Conviene disegnare l'asta usando come assi cartesiani x e y le due guide orizzontale e verticale che si incontrano nell'origine O. Usiamo il suffisso 1 per l'anello vincolato alla guida verticale e chiamiamo y la sua coordinata. Analogamente usiamo il suffisso 2 per l'altro anello e x la sua coordinata. Chiamiamo $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$ le reazioni vincolari sui due anelli perpendicolari alle guide, in modo che $\mathbf{N_1}$ ha solo componente x e $\mathbf{N_2}$ solo componente y. Sia $\mathbf{F}$ la forza esercitata dal vincolo sull'anello 2 che ne impedisce inizialmente lo scorrimento. Tale forza ha solo componente x. La condizione di equilibrio dell'asta si trova imponendo che la risultante delle forze esterne agenti sul corpo rigido composto da asta più anelli sia nulla e che il momento delle forze sia nullo. Conviene scegliere come polo per il calcolo dei momenti il punto O' dove si trova l'anello 2 (ma il risultato non cambia se si sceglie un punto diverso). Allora le equazioni per l'equilibrio danno

$$N_1 = -F\,; \quad N_2 = (2m+M)g\,; \quad N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2m+M)g\,, \tag{1}$$

da cui si possono ottenere i valori numerici inserendo i dati del problema.

b) Dato che il sistema è in quiete, l'energia cinetica è nulla e l'energia meccanica si identifica con l'energia potenziale associata alla forza peso. Usando la quota $y = 0$ come riferimento, si ottiene

$$E = -(2m+M)\frac{gd}{4}\,. \tag{2}$$

c) Durante il moto si conserva l'energia (non ci sono attriti, la forza peso è conservativa e i vincoli non lavorano), ma non la quantità di moto né il momento angolare a causa della presenza di forze esterne.

d) La relazione tra i moduli delle velocità dei due anelli si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo formata dall'asta e dalle guide. Infatti le coordinate dei due anelli sono legate da

$$y = \sqrt{d^2 - x^2}\,. \tag{3}$$

Derivando rispetto al tempo e identificando $v_1 = dy/dt$ e $v_2 = dx/dt$, si ricava:

$$|v_1| = |\frac{x}{y}||v_2|\,. \tag{4}$$

e) Dal risultato precedente risulta che quando $x = 0$ (anello 2 che transita nel punto O) si ha $v_1 = 0$, cioè l'anello sulla guida verticale è istantaneamente fermo. In quello stesso istante la velocità angolare dell'asta è $\omega = v_2/d$.

f) L'energia meccanica comprende l'energia cinetica dell'anello 2 (la velocità dell'anello 1 è nulla nell'istante considerato), l'energia cinetica dell'asta

e l'energia potenziale del sistema. L'energia cinetica dell'asta può essere scomposta in energia cinetica del moto del centro di massa ($v_{CM} = v_2/2$) e energia cinetica di rotazione attorno al CM, ovvero $(1/2)Mv_{CM}^2 + (1/2)I_{CM}\omega^2$, dove $I_{CM} = Md^2/12$. Equivalentemente la stessa può essere uguagliata alla sola energia di rotazione rispetto alla posizione del primo anello, ovvero $(1/2)I\omega^2$, dove $I = Md^2/3$. Il risultato sarà lo stesso come conseguenza del teorema di König. Scriviamo dunque:

$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{Md^2}{3}\right)\frac{v_2^2}{d^2} - mgd - Mg\frac{d}{2}\,. \tag{5}$$

Usando la conservazione dell'energia ed eguagliando la (2) e la (5), otteniamo:

$$v_2 = \sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}gd} = 2.02\,\mathrm{m/s}\,. \tag{6}$$

g) La quantità di moto del sistema è:

$$P = \frac{Mv_2}{2} + mv_2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)v_2\,. \tag{7}$$

Il momento angolare rispetto ad O è quello dovuto alla rotazione dell'asta (i due anelli scorrono lungo assi che si incrociano in O e dunque non contribuiscono al momento angolare):

$$L = \frac{Mv_2 d}{3}\,. \tag{8}$$

Soluzione I.2

a) Il raggio dell'orbita circolare è $(R_T + h)$ dove h è la quota rispetto alla superficie della terra. Il momento angolare in modulo è dato dal prodotto del raggio per la quantità di moto (che sono vettori perpendicolari tra loro in questo caso). Dunque:

$$L_0 = m\,(R_T + h)\,v_0 = 1.55 \text{ x } 10^{16}\mathrm{Kgm^2/s}\,. \tag{1}$$

L'energia è data da

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R_T + h} = -8.97 \text{ x } 10^{12}\mathrm{J}\,. \tag{2}$$

b) Il momento angolare è direttamente proporzionale alla velocità, l'energia cinetica è proporzionale al quadrato della velocità, mentre l'energia potenziale non cambia. Dunque si ha

$$L_f = 0.9L_0 = 1.395 \text{ x } 10^{16}\mathrm{Kgm^2/s}\,, \tag{3}$$

e

$$|\Delta E| = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 - (0.9)^2) = 1.69 \text{ x } 10^{12} \text{J} \tag{4}$$

c) Basta ricordare che l'energia potenziale efficace per il moto radiale nel campo gravitazionale della terra, per un momento angolare di modulo L, vale $E_{\text{eff}}(r) = L^2/(2mr^2) - GmM_T/r$. Il moto iniziale della stazione, prima del frenamento, corrisponde alla situazione in cui l'energia meccanica E è uguale al valore minimo di E_{eff} in funzione di r; la posizione del minimo corrisponde al raggio dell'orbita circolare. Quando si riduce L, la curva di $E_{\text{eff}}(r)$ si abbassa e il mimimo si sposta verso valori di r minori (quote inferiori). Se L viene diminuito da L_0 a L_f tenendo fissa la distanza r iniziale, allora la stazione verrà a trovarsi su una nuova curva di $E_{\text{eff}}(r)$, allo stesso r ma ad un valore più basso di energia, trovandosi con il nuovo minimo della curva spostato verso quote inferiori. Dunque, la nuova traiettoria sarà una ellisse. La distanza massima dal centro della terra coincide con il raggio dell'orbita iniziale, mentre la distanza minima può essere calcolata imponendo l'eguaglianza tra la nuova energia E_f e la E_{eff} corrispondente a L_f.

d) La stazione cadrà sulla terra. Questo lo si vede facendo il calcolo della distanza minima dal centro della terra nella nuova orbita ellittica, come detto al punto precedente, e verificando che questa distanza è minore del raggio terrestre. Oppure, in alternativa si può vedere che il nuovo minimo di $E_{\text{eff}}(r)$, ottenuto dall'equazione

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{L_f}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}\right) = 0\,, \tag{5}$$

si trova in $r_{\min} = (0.9)^2 r_0$, anch'esso minore del raggio terrestre R_T.

Soluzione II.1

Supponiamo che l'acqua bollente ceda un calore Q_1 al ghiaccio in modo da portare quest'ultimo alla temperatura di fusione di $t_f = 0°\text{C}$. Il valore di Q_1 si ottiene da

$$Q_1 = m_g c_g (t_f - t_1) = 1.23 \times 10^5 \text{J}\,. \tag{1}$$

Questo calore fa abbassare la temperatura dell'acqua di

$$\Delta t = Q_1/m_a c_a = 29.4°\text{C}\,, \tag{2}$$

portandola alla nuova temperatura di $t'_a = 70.6°\text{C}$. A questo puunto il ghiaccio inizia a fondere. Al più l'acqua può fornirgli un calore pari a

$$Q_2 = m_a c_a (t'_a - t_f) = 2.957 \times 10^5 \text{J}\,. \tag{3}$$

Tale calore può fondere una quantità di ghiaccio pari a

$$m_{fuso} = Q_2/\lambda = 0.896\text{Kg}\,. \tag{4}$$

Quindi, rimangono 2.104Kg di ghiaccio all'equilibrio con 1.896Kg di acqua alla temperatura di 0°C.

La variazione di entropia si calcola ipotizzando un processo reversibile che scaldi il ghiaccio da t_1 a t_f tramite contatti termici con serbatoi a temperatura crescente. Occorre convertire le temperature in temperature assolute. Si ha quindi

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_f} \frac{m_g c_g \delta T}{T} = m_g c_g \log \frac{T_f}{T_1}. \tag{5}$$

Essendo $T_1 = 253.15$K e $T_f = 273.15$K, si ottiene $\Delta S = 468$J/K

Soluzione II.2

La rigidità delle pareti assicura che il lavoro compiuto sul sistema sia nullo, mentre ladiabaticità assicura che il calore scambiato con lambiente sia nullo. Quindi, come conseguenza diretta del I principio, la variazione di energia totale deve essere nulla. Per ciascun gas, la viariazione di energia interna può essere espressa come il prodotto del numero di moli, del calore specifico a volume costante (diverso per gas monoatomico e gas biatomico) e la variazione di temperatura. Se T è la temperatura finale, allora si ha:

$$n_A c_A (T - T_A) + n_B c_B (T - T_B) + n_C c_C (T - T_C) = 0 \tag{1}$$

da cui segue che T è la media pesata delle temperature iniziali:

$$T = \frac{n_A c_A T_A + n_B c_B T_B + n_C c_C T_C}{n_A c_A + n_B c_B + n_C c_C}. \tag{2}$$

Inserendo i valori numerici e sapendo che $c = (3/2)R$ e $(5/2)R$ rispettivamente per gas monoatomici e biatomici, si ottiene $T = 357.5$K.

La variazione di entropia dell'universo coincide con quella dei gas contenuti nel recipiente, dato che le pareti sono adiabatiche. La variazione di entropia di ciascun gas si ottiene facilmente dalla relazione

$$(\Delta S)_i = n_i c_i \log \frac{T}{T_i} + n_i R \log \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{iniz}}}, \tag{3}$$

dove $V_{\text{fin}}/V_{\text{iniz}} = 3$ per tutti tre i gas. Quindi la variazione totale di entropia è data da

$$\Delta S = n_A c_A \log \frac{T}{T_A} + n_B c_B \log \frac{T}{T_B} + n_C c_C \log \frac{T}{T_C} + 3nR \log 3. \tag{4}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene $\Delta S = 61.4$J/K.

Se si rimuove prima un setto e poi l'altro, nulla cambia per quanto riguarda la temperatura finale, perché la media pesata delle temperature non cambia se si fa in due passaggi, mediando prima le temperature di due gas e poi mediando il risultato con la temperatura del terzo terzo. Non cambia nemmeno la variazione di entropia, perché l'entropia è una funzione di stato e gli stati iniziali e finali sono gli stessi.