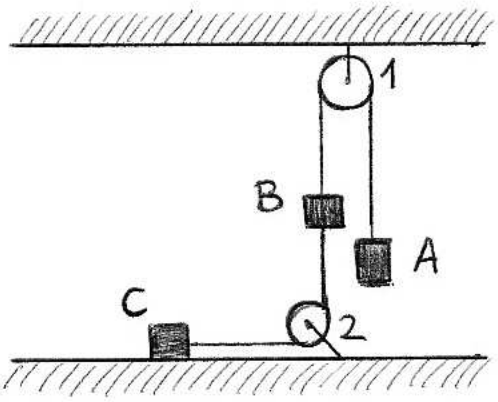
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2009-10, 30 Agosto 2010

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente ai corsi di Fisica Generale 1 e 2 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:

Esercizio I.1
Si consideri il sistema in figura. Le carrucole e le funi abbiano massa trascurabile. Le funi siano inestensibili. Siano T_1 e T_2 le tensioni delle funi che collegano rispettivamente A con B e B con C. Siano R_1 e R_2 le reazioni sui vincoli che sorreggono le carrucole.



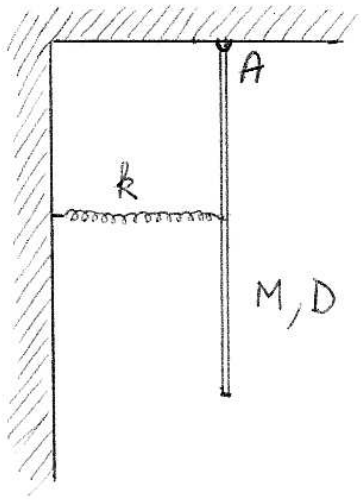
1. Si disegni il diagramma di corpo libero delle tre masse; si scrivano le equazioni del moto nell'ipotesi che m_A sia maggiore o uguale a m_B, e che il pavimento su cui scivola la massa C sia liscio; si calcolino: l'accelerazione delle masse, le tensioni T_1 e T_2 e le reazioni R_1 e R_2.

2. Si determini la condizione di equilibrio.

3. Si ricalcoli l'accelerazione, ma stavolta assumendo che vi sia attrito radente tra la massa C e il piano orizzontale, con coefficiente di attrito μ.

4. Se $m_A = 8$ Kg, $m_B = 6$ Kg, e $m_C = 10$ Kg, quanto deve valere il coefficiente d'attrito statico per mantenere le masse ferme?

Esercizio I.2
Un pendolo è composto da un'asta rigida sottile di lunghezza D e massa M, incernierata al soffitto nel punto A, come in figura. Una molla, di massa trascurabile e costante elastica k, collega orizzontalmente il punto medio dell'asta ad una parete verticale, a distanza $l = D/2$ dall'asta, corrispondente alla lunghezza a riposo della molla stessa.



1. Si calcolino i momenti delle forze agenti sull'asta quando questa è inclinata di un piccolo angolo θ rispetto alla verticale e si scriva l'equazione del moto del pendolo.

2. Si calcoli il periodo del pendolo assumendo che $M = 6$ kg, $D = 2$ m e $k = 10$ N/m.

3. Si scriva l'equazione del moto e l'espressione del periodo delle piccole oscillazioni nel caso in cui una massa m sia fissata all'asta in un punto a distanza d dal punto A.

4. Si dimostri che la stessa equazione del moto può essere ottenuta imponendo la conservazione dell'energia meccanica del pendolo.

5. Supponiamo che la stessa asta sia posta in verticale, incernierata al pavimento e con la massa m fissata all'estremo libero in alto ($d = D$). La molla sia ancora agganciata al punto medio dell'asta e alla parete verticale, come prima. Cosa cambia nell'equazione del moto rispetto al pendolo discusso in precedenza? L'angolo $\theta = 0$ è ancora un punto di equilibrio? Se $m = 1$ kg, qual è il valore minimo di k per cui l'equilibrio è stabile? Si scriva l'espressione dell'energia meccanica in funzione dell'angolo θ.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso di Fisica Generale I, anche equivalente al corso di Fisica Generale 3 per l'ordinamento vigente prima del 2008-09:

Esercizio II.1

Una mole di gas ideale biatomico è contenuta in un cilindro con pistone mobile. Inizialmente sul pistone agisce una forza esterna costante in modo che il gas si trova all'equilibrio ad una pressione P_A e un volume $V_A = 12{\times}10^{-3}$ m^3. Ad un certo istante la forza cessa di agire e il gas si espande adiabaticamente, muovendo il pistone contro la sola pressione atmosferica $P_B = 1.013$ bar. L'espansione viene arrestata quando il gas ha raggiunto un nuovo stato di equilibrio con volume $V_B = 25 \times 10^{-3}$ m^3 e pressione uguale a quella atmosferica. Successivamente il gas viene compresso isotermicamente e reversibilmente. Il calore ceduto dal gas in questa compressione sia $|Q_{BC}| = 3040$ J. Infine il sistema viene riportato allo stato iniziale con una trasformazione reversibile in cui il gas compie un lavoro $|W_{CA}| = 6500$ J. Si calcoli: a) la temperatura T_B; b) la variazione di energia interna nella trasformazione adiabatica AB e la temperatura T_A; c) la pressione P_A; d) il volume V_C; e) il calore Q_{CA}; f) la variazione di entropia dell'universo in un ciclo. g) Si tracci il ciclo nel diagramma P-V. [Nota: per la costante universale dei gas si usi il valore $R = 8.3143$ J/mole K]

Esercizio II.2

Un sistema è costituito da una macchina termica, una macchina frigorifera e tre serbatoi. I serbatoi hanno temperature costanti $T_0 = 280$K, $T_1 = 323$K e $T_2 = 373$K. In un ciclo la macchina termica preleva un calore Q_1 dal serbatoio a temperatura T_1 e cede un calore Q_0 al serbatoio freddo, compiendo un lavoro W. Tutto il lavoro W viene utilizzato dalla macchina frigorifera per prelevare un calore Q_0' dal serbatoio freddo, cedendo un calore Q_2 al serbatoio più caldo. Si sa che al termine di ogni ciclo la variazione di entropia dell'universo è pari a $\Delta S_u = 87.1$ J/K. Inoltre, il calore netto ceduto alla sorgente a temperatura T_0 è pari a $q = |Q_0| - |Q_0'| = 2.95 \times 10^5$J. Si calcolino i valori di Q_1 e Q_2.

Soluzione I.1

1) Per tracciare le forze e scrivere le equazioni del moto conviene dapprima stabilire la convenzione sul segno dell'accelerazione. Il moto delle tre masse è di fatto unidimensionale. Se chiamiamo a l'accelerazione della massa A (positiva se punta verso il basso), allora l'accelerazione di B è ancora a (positiva verso l'alto) come pure quella di C (positiva verso destra), dato che le funi sono inestensibili e la distanza tra A, B e C è costante. Con questa convenzione sul segno, le forze che agiscono sui tre corpi sono:

- A: il peso $m_A g$ positivo e la tensione $-T_1$ negativa;
- B: il peso $-m_B g$ negativo, la tensione T_1 positiva, e la tensione $-T_2$ negativa;
- C: la tensione T_2 positiva (mentre il peso e la reazione vincolare sono perpendicolari al moto e si compensano esattamente).

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m_A a &= m_A g - T_1 && (1)\\ m_B a &= -m_B g + T_1 - T_2 && (2)\\ m_C a &= T_2 && (3) \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + m_C}\, g && (4)\\ T_1 &= \frac{2m_A m_B + m_A m_C}{m_A + m_B + m_C}\, g && (5)\\ T_2 &= \frac{m_C(m_A - m_B)}{m_A + m_B + m_C}\, g\,. && (6) \end{aligned}$$

Per come sono disposte le funi sulle carrucole, le reazioni vincolari necessarie a mantenerle fisse sono $R_1 = 2T_1$ e $R_2 = \sqrt{2}T_2$.
2) Si ha equilibrio se $m_A = m_B$ con m_C qualsiasi. In tale situazione la presenza della massa C è irrilevante (ovviamente se le funi hanno massa trascurabile) e il sistema si riduce al caso semplice di una macchina di Atwood all'equilibrio. Inoltre $T_1 = m_A g = m_B g$ e $T_2 = 0$.
3) Se c'è attrito radente, allora cambia l'equazione del moto della massa C, dato che si aggiunge una forza $-\mu m_C g$. La nuova equazione del moto è

$$m_C a = T_2 - \mu m_C g \qquad (7)$$

da sostituire alla (3). Risolvendo di nuovo il sistema si ottiene la nuova accelerazione

$$a = \frac{m_A - m_B - \mu m_C}{m_A + m_B + m_C}\, g\,. \qquad (8)$$

Questa espressione ha senso se le masse sono in moto, con la massa A che scende e la massa C che viene trainata verso destra. In tal caso, μ va inteso come coeffiente di attrito dinamico. La stessa espressione può essere usata per determinare il caso limite in cui le masse rimangono ferme, a causa dell'attrito, malgrado la massa A sia maggiore della massa B. Questo caso limite corrisponde a $\mu m_C = m_A - m_B$. In tale situazione μ va inteso come coefficiente di attrito statico.
4) Dal punto precedente segue che il μ necessario a tenere ferme le masse è

$$\mu = \frac{m_A - m_B}{m_C} = \frac{(8-6)\text{Kg}}{10\text{Kg}} = 0.2\,. \tag{9}$$

Soluzione I.2

1) Le forze che agiscono sull'asta sono tre: la reazione vincolare nel punto A, la forza peso e la forza elastica. La rotazione dell'asta avviene attorno al punto A che, quindi, conviene scegliere come polo per il calcolo dei momenti delle forze. La reazione vincolare ha momento nullo rispetto ad A. La forza peso e la forza elastica sono tra loro perpendicolari: la forza peso ha modulo Mg ed è verticale rivolta verso il basso; la forza elastica ha modulo $k(D/2)\sin\theta$, essendo $(D/2)\sin\theta$ l'allungamento della molla, ed è orizzontale. Entrambe queste due forze producono un momento diretto perpendicolarmente al piano di rotazione dell'asta e concorde. In modulo il momento della forza peso è $Mg(D/2)\sin\theta$ e quello della forza elastica è $k(D/2)^2\sin\theta\cos\theta$, essendo $(D/2)\cos\theta$ il braccio di quest'ultima rispetto ad A. Entrambi si oppongono alla rotazione (si comportano come forze di richiamo verso la posizione di equilibrio $\theta = 0$). Quindi il momento totale può essere scritto come

$$\tau = -\left[\frac{MgD}{2} + \frac{kD^2}{4}\cos\theta\right]\sin\theta\,. \tag{1}$$

Se l'angolo θ è piccolo, si può approssimare la funzione seno con l'angolo e la funzione coseno con il valore 1, da cui:

$$\tau = -\left[\frac{MgD}{2} + \frac{kD^2}{4}\right]\theta\,. \tag{2}$$

L'equazione del moto è

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau\,, \tag{3}$$

con $I = MD^2/3$. Quindi

$$\frac{MD^2}{3}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{MgD}{2} + \frac{kD^2}{4}\right)\theta\,, \tag{4}$$

che è un'equazione armonica del tipo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0\,, \tag{5}$$

con

$$\omega^2 = \frac{3}{4M}\left(k + \frac{2Mg}{D}\right)\,. \tag{6}$$

2) Il periodo $T = 2\pi/\omega$ è dato da

$$T = 2\pi\left[\frac{3}{4M}\left(k + \frac{2Mg}{D}\right)\right]^{-1/2}\,. \tag{7}$$

Inserendo i valori numerici assegnati, si trova: $T = 2.14$ s.
3) La massa appesa all'asta ne modifica il momento d'inerzia, che diventa $I = (1/3)MD^2 + md^2$. Inoltre, all'equazione del moto viene ad aggiungersi il momento della nuova forza peso: $mgd\sin\theta \sim mgd\theta$. L'equazione del moto quindi diventa:

$$\left(\frac{MD^2}{3} + md^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{MgD}{2} + mgd + \frac{kD^2}{4}\right)\theta\,, \tag{8}$$

che dà un moto armonico con periodo

$$T = 2\pi\left[\frac{\left(\frac{MD^2}{3} + md^2\right)}{\left(\frac{MgD}{2} + mgd + \frac{kD^2}{4}\right)}\right]^{1/2}\,. \tag{9}$$

4) L'energia meccanica del sistema, per un generico angolo θ, è

$$E = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{D}{2}\sin\theta\right)^2 + (md + MD/2)\,g(1 - \cos\theta)\,, \tag{10}$$

avendo imposto che l'energia potenziale sia nulla quando $\theta = 0$. La conservazione dell'energia meccanica può essere scritta nella forma $dE/dt = 0$. Calcolando esplicitamente la derivata dell'espressione precedente e semplificando il fattore comune $d\theta/dt$ si ottiene

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{MgD}{2} + mgd + \frac{kD^2}{4}\right)\sin\theta\,, \tag{11}$$

come al punto precedente.
5) Se la cerniera è in basso e l'asta ha l'estremo libero in alto, il momento associato alla forza peso (sull'asta e sulla massa m) ha segno opposto rispetto al momento della forza elastica. In particolare la forza peso tende a indurre una rotazione che aumenta θ, cioè a far cadere l'asta, mentre la forza elastica esercita un momento di richiamo. Il momento totale è

$$\tau = \left(\frac{MgD}{2} + mgD\right)\sin\theta - \frac{kD^2}{4}\cos\theta\sin\theta\,. \tag{12}$$

L'equazione del moto è

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(\frac{MgD}{2} + mgD\right)\sin\theta - \frac{kD^2}{4}\cos\theta\sin\theta\,. \tag{13}$$

Il punto $\theta = 0$ è sempre di equilibrio, in quanto il momento delle forze si annulla quando l'asta è verticale, ma l'equilibrio può essere stabile, instabile o indifferente, a seconda del valore del secondo membro dell'equazione. Per piccoli angoli si può scrivere

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(\frac{MgD}{2} + mgD - \frac{kD^2}{4}\right)\theta\,. \tag{14}$$

Si vede che per

$$k \geq \frac{4g}{D}\left(\frac{M}{2} + m\right) \tag{15}$$

il secondo membro è negativo, quindi l'equazione del moto descrive oscillazioni armoniche e il punto $\theta = 0$ corrisponde ad equilibrio stabile. Con i valori assegnato delle masse e della lunghezza D, il valore minimo di k risulta pari a 78.4 N/m.

L'energia meccanica è data da

$$E = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (m + M/2)gD\cos\theta + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2\,, \tag{16}$$

dove l'allungamento della molla, per un angolo θ generico, si ottiene calcolando la distanza tra i due punti di ancoraggio, sull'asta e sulla parete:

$$\Delta l = \frac{D}{2}\left(\sqrt{(1+\sin\theta)^2 - (1-\cos\theta)^2} - 1\right)\,. \tag{17}$$

Soluzione II.1

a) Nel punto di equilibrio B si conoscono pressione e volume. Si può ricavare la temperatura dell'equazione di stato dei gas ideali:

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 304.6K\,. \tag{1}$$

b) La trasformazione AB è adiabatica, perciò $Q_{AB} = 0$ e $\Delta U = -W$. Il lavoro si calcola facilmente perchè il gas lavora contro la pressione atmosferica P_B costante, compiendo un lavoro positivo pari a: $W = P_B\Delta V$. Dunque

$$\Delta U = -P_B(V_B - V_A) = -1317J\,. \tag{2}$$

Essendo che per un gas ideale $\Delta U = nc_v\Delta T$, si ha

$$\Delta T = T_B - T_A = \frac{\Delta U}{nc_v}\,. \tag{3}$$

Per un gas biatomico si ha $c_v = (5/2)R$. Dunque

$$T_A = T_B - \frac{2\Delta U}{5nR} = T_B + 63.4K = 368K\,. \tag{4}$$

c) Avendo V_A e T_A, la pressione in A si calcola dall'equazione di stato:

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.55\text{bar} = 2.517\text{Atm}\,. \tag{5}$$

d) Nell'isoterma di un gas ideale $\Delta U = 0$ e dunque $Q = W$. D'altra parte il lavoro è esprimibile in termini dei volumi:

$$W_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B}\,. \tag{6}$$

Dunque

$$Q_{BC} = W_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B}\,, \tag{7}$$

da cui

$$V_C = V_B \exp\left(\frac{Q_{BC}}{nRT_B}\right) = V_B e^{-1.2} = 7.53 \times 10^{-3}\text{m}^3\,, \tag{8}$$

dove si è usato il valore $Q_{BC} = -3040J$ (il calore è ceduto dal gas nella compressione). Si può calcolare anche la pressione in C, dall'equazione di stato:

$$P_C = \frac{nRT_B}{V_C} = 3.36\text{bar} = 3.32\text{Atm}\,. \tag{9}$$

e) Applicando il I principio alla trasformazione CA si ottiene

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA} = nc_V(T_A - T_C) + W_{CA} = nc_V(T_A - T_B) + W_{CA}\,. \tag{10}$$

Inserendo i valori numerici si ottiene $Q_{CA} = 7818$ J.
f) La variazione di entropia dell'universo è somma delle variazioni di entropia nelle tre trasformazioni. Le trasformazioni BC e CA sono reversibili e non danno alcun contributo a ΔS_u. L'unico contributo non nullo a ΔS_u viene dalla espansione adiabatica irreversibile AB, in cui però l'ambiente non scambia calore con il sistema. Rimane solo la variazione di entropia del gas in AB, che si ottiene dall'espressione dell'entropia per un gas ideale:

$$\Delta S = nc_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 65\,\text{J/K}\,. \tag{11}$$

g) La posizione dei punti di equilibrio A, B e C si ricava dai valori calcolati dei volumi e delle pressioni. La trasformazione AB è irreversibile. La BC è un ramo di iperbole. La CA è reversibile, ma il suo andamento nel piano P-V non è noto nel problema; qualitativamente si tratta di collegare i due punti di equilibrio con una linea continua, che richiede altre informazioni per essere determinata.

Soluzione II.2

Le incognite sono due: Q_1 e Q_2. Occorre legare questi calori alla variazione di entropia dell'universo ΔS_u che è nota. Inoltre, le due macchine operano con lo stesso lavoro W. Per quanto riguarda l'entropia basta osservare che in un ciclo le due macchine tornano allo stato di partenza e, quindi, la loro variazione di entropia complessivamente è nulla. Quindi ΔS_u si identifica con la sola variazione di entropia dei serbatoi, che si può scrivere nella forma

$$\Delta S_u = -\frac{|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_0|}{T_0} - \frac{|Q_0'|}{T_0} + \frac{|Q_2|}{T_2}\,, \tag{1}$$

avendo fatto attenzione al segno corretto della variazione di entropia di ciascun serbatoio per ciascun calore ceduto o assorbito. Usando la definizione di q si può scrivere

$$\Delta S_u = -\frac{|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} + \frac{q}{T_0}\,. \tag{2}$$

L'altra relazione tra le incognite si può derivare dal I principio applicato alle due macchine. Infatti, in un ciclo si ha $\Delta U = 0$, che implica

$$|W_{\text{termica}}| = |Q_1| - |Q_0|\,;\;\; |W_{\text{frigo}}| = |Q_2| - |Q_0'|, \tag{3}$$

ma questi lavori sono uguali per ipotesi. Perciò:

$$|Q_1| - |Q_2| = q\,. \tag{4}$$

Le equazioni (2) e (4) costituiscono un sistema di due equazioni lineari a due incognite che, una volta risolto, fornisce le soluzioni:

$$|Q_2| = \frac{q\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) - \Delta S_u}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = 1.28 \times 10^5 J \tag{5}$$

e

$$|Q_1| = |Q_2| + q = 4.23 \times 10^5 J. \tag{6}$$