**Fisica Generale I (primo e secondo modulo)**
**A.A. 2010-11, 17 gennaio 2011**

*Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fis. Gen. I:*

**Esercizio I.1**
Si consideri una pallina puntiforme di massa $M = 3$ kg giacente su un piano orizzontale liscio. Tale pallina è collegata per mezzo di un'asta rigida di massa trascurabile ad un perno in un punto $O$ dello stesso piano. L'asta è lunga $R = 1$ m e può sostenere una tensione massima di modulo pari a $T_M = 100$ N. Inizialmente l'asta è ferma. Da un certo istante un motore agente sul perno impartisce all'asta un'accelerazione angolare costante, $\alpha$. Si calcoli:

1. la velocità angolare e tangenziale della pallina al momento della rottura dell'asta, sapendo che $\alpha = 2$ rad/s$^2$.

2. l'angolo e il numero di giri percorsi dalla pallina al momento della rottura dell'asta.

3. l'accelerazione angolare $\alpha$ necessaria affinché l'asta si rompa dopo aver compiuto esattamente un giro. Si calcoli inoltre la velocità angolare e tangenziale della pallina al momento della rottura dell'asta.

Si supponga che all'interno dell'asta, immaginata come un cilindretto cavo, sia contenuta una molla di massa trascurabile con lunghezza a riposo $l_0 = R$ e costante elastica $k = 500$ N/m. In seguito alla rottura dell'asta la molla si allunga e comincia ad esercitare una forza di richiamo. Si supponga inoltre che nello stesso istante della rottura dell'asta il motore che forniva l'accelerazione angolare venga spento e la molla venga tenuta in rotazione a velocità angolare costante (nota: la molla può deformarsi longitudinalmente, ma non piegarsi).

4. Si scriva l'equazione del moto della pallina lungo la direzione radiale dopo la rottura dell'asta e se ne discuta la soluzione.

**Esercizio I.2**
Si consideri una palla da biliardo di massa $M = 0.2$ kg e raggio $R = 4$ cm appoggiata su un tavolo orizzontale. Un giocatore colpisce la palla con la stecca in direzione orizzontale ad un'altezza $h$ dal tavolo fornendole un impulso $\int F(t)dt = 0.4$ Ns.

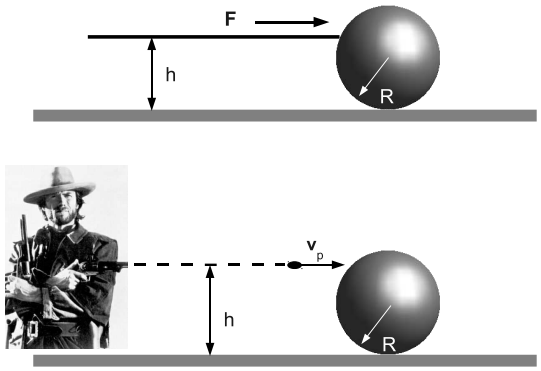
1. Nel caso $h = R$, si determini la velocità $v_0$ con cui la palla inizia a scivolare sul tavolo immediatamente dopo l'urto, e la sua energia cinetica.

2. Dopo l'urto la palla sia soggetta ad una forza di attrito radente costante, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.1$. Si scrivano le espressioni della velocità di traslazione e della velocità di rotazione della palla in funzione del tempo.

3. Si calcoli il tempo necessario affinché la palla raggiunga la condizione di puro rotolamento.

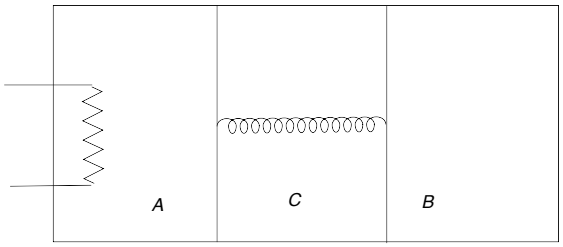
4. Nel caso $h \neq R$, si determini il valore di $h$ per cui la palla inizia un moto di puro rotolamento già immediatamente dopo l'urto, anche in assenza di attrito radente.

5. Si ripeta il calcolo del punto precedente, ma nel caso in cui un cow-boy qualunque colpisca la palla sparando con la sua Colt. La pallottola ha massa $m = 16$g, si muove di moto uniforme con velocità $v_p = 100\ m/s^2$ parallela al tavolo da gioco, colpisce la palla ad un'altezza $h$ e vi rimane conficcata in superficie. Si discuta qualitativamente il moto del centro di massa e il comportamento della reazione vincolare nel punto di appoggio col tavolo.



*Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:*

**Esercizio II.1**




Un contenitore adiabatico cilindrico di sezione $S = 10^{-2}$ m$^2$ e lunghezza $l = 1.8$ m è diviso in tre parti uguali $A, C, B$ da due setti adiabatici mobili collegati da una molla di costante elastica $k = 5 \cdot 10^3$N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 0.5$m, come in figura. Sia in A che in B sono contenuti $n = 0.2$ moli di un gas ideale biatomico mentre nella regione intermedia C dove si trova la molla non è contenuto gas. Inizialmente il sistema è in equilibrio con la lunghezza della molla pari a $l_m = 0.4$ m. Si determinino i valori $T_0$ e $p_0$ della temperatura e pressione del gas nelle zone A e C.

Il gas in A viene quindi riscaldato molto lentamente, per mezzo di una resistenza elettrica fino al punto in cui la lunghezza della molla che separa i due setti diventa $l'_m = 0.3m$. Calcolare il volume e la temperatura del gas in A e B ed il calore ceduto al gas.

**Esercizio II.2**
Un contenitore adiabatico è diviso in due parti A e B di volume $V_A = 2 \cdot 10^{-3}m^3$ e $V_B = 4 \cdot 10^{-3}m^3$ da un setto, anch'esso adiabatico. In A sono contenute 2 moli di di gas ideale biatomico alla temperatura di 300 K, mentre in B sono contenute 3 moli dello stesso gas alla temperatura di 800K. Ad un certo istante si toglie il setto ed i due gas si mescolano. Si determini:

1. la temperatura di equilibrio $T_0$
2. la variazione di entropia del gas.

**Soluzione I.1**

1. Il moto dall'asta sotto l'accelerazione del motore è un moto circolare uniformemente accelerato. Considerando le condizioni iniziali date dal problema otteniamo le seguenti equazioni del moto:

$$\alpha(t) = \alpha \tag{1}$$
$$\omega(t) = \alpha t \tag{2}$$
$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2. \tag{3}$$

La forza che agisce sull'asta è uguale in modulo alla forza centripeta che per i moti circolari è data dalla seguente espressione

$$|\vec{F_c}(t)| = MR[\omega(t)]^2 = MR\alpha^2 t^2. \tag{4}$$

Quando questa forza è uguale alla massima tensione, $T_M$, sopportabile dall'asta abbiamo la rottura. Questo ci dà la seguente condizione che fissa il tempo a cui avviene la rottura dell'asta, $t_r$

$$T_M = MR\alpha^2 t_r^2 \quad \Longrightarrow \quad t_r = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{T_M}{MR}}. \tag{5}$$

In realtà matematicamente si ottengono due soluzioni per il tempo di rottura ma quella che da un tempo negativo è stata scartata perché non è significativa dal punto di vista fisico. Sostituendo $t_r$ nell'equazione (2) possiamo calcolare la velocità angolare della pallina al momento della rottura dell'asta

$$\omega_r = \omega(t_r) = \sqrt{\frac{T_M}{MR}} = 5.77\, rad/s. \tag{6}$$

Partendo dalla velocità angolare possiamo ora calcolare il modulo della velocità tangenziale che è dato da

$$v_r = \omega_r R = \sqrt{\frac{T_M R}{M}} = 5.77\, m/s, \tag{7}$$

2. Sostituendo $t_r$ nell'equazione (3) troviamo l'angolo percorso dalla pallina al momento della rottura dell'asta

$$\theta_r = \theta(t_r) = \frac{T_M}{2MR\alpha} = 8.33\, rad, \tag{8}$$

che corrisponde a un giro e 117.46 gradi circa.

3. Per ottenere l'accelerazione angolare necessaria per compiere un giro è sufficiente invertire l'equazione (8) e calcolare $\alpha$ utilizzando $\theta = 2\pi$

$$\alpha = \frac{T_M}{4\pi MR} \approx 2.65\, rad/s^2. \tag{9}$$

Le velocità tangenziale e angolare al momento della rottura dell'asta sono invariate rispetto al punto 1. Questo può essere dedotto notando che le formule (6) e (7) non dipendono da $\alpha$.

4. Al momento della rottura dell'asta la pallina rimane attaccata al perno centrale $O$ soltanto per mezzo della molla. Il testo ci dice inoltre che la molla viene mantenuta ad una velocità angolare costante che sarà uguale a $\omega_r$. Per studiare il moto in direzione radiale possiamo porci nel sistema di riferimento rotante a velocità angolare $\omega_r$. In questo sistema di riferimento ci sono due forze agenti sulla pallina, la forza centrifuga $\vec{F}_c$ e la forza elastica $\vec{F}_{el}$ (notare che possiamo omettere la forza di Coriolis in quanto il testo specifica che il moto della pallina avviene con velocità angolare costante)

$$\vec{F} = [-F_{el} + F_c]\hat{r} = [-k(r - R) + M\omega_r^2 r^2]\hat{r}, \tag{10}$$

dove $r$ indica la distanza tra la pallina e il perno $O$. Le equazioni del moto in direzione radiale sono dunque

$$M\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -k[r(t) - R] + M\omega_r^2 r(t) \tag{11}$$

ovvero

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2} = -(\omega_k^2 - \omega_r^2)r(t) + \omega_k^2 R, \tag{12}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto $\omega_k = \sqrt{k/M}$. Questa equazione si semplifica effettuando le seguenti sostituzioni $\tilde{r}(t) = r(t) - R\omega_k^2/(\omega_k^2 - \omega_r^2)$ e $\Omega^2 = \omega_k^2 - \omega_r^2$ , infatti

$$\frac{d^2\tilde{r}(t)}{dt^2} + \Omega^2\tilde{r}(t) = 0. \tag{13}$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale di secondo ordine è

$$\tilde{r}(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \tag{14}$$

e quindi

$$r(t) = R\omega_k^2/\Omega^2 + A\cos(\Omega t + \phi) \tag{15}$$

Imponendo le condizioni iniziali $r(t) = R$ e $\dot{r}(t) = 0$ si trova

$$r(t) = R\omega_k^2/\Omega^2 - R\left(\frac{\omega_k^2}{\Omega^2} - 1\right)\cos(\Omega t) \tag{16}$$

Questa equazione rappresenta un oscillatore armonico che oscilla attorno alla posizione di equilibrio $R\omega_k^2/\Omega^2 = 1.25\,m$, l'ampiezza delle oscillazioni è data da $R[(\omega_k/\Omega)^2 - 1] = 0.25\,m$ mentre il loro periodo è $\tau = 2\pi/\Omega = 0.54\,s$.

**Soluzione I.2**

1. La stecca colpisce la palla sulla linea del centro di massa (CM) $h = R$ e quindi rispetto a tale punto non fornisce alcun momento angolare. La palla subisce invece una variazione della propria quantità di moto nella direzione orizzontale pari all'impulso della forza:

$$\Delta P = Mv_0 = \int F(t)dt. \tag{1}$$

   Dato che l'impulso è noto, questa relazione permette di calcolare la velocità $v_0$ subito dopo l'urto, nonché l'energia cinetica $E_K = \frac{1}{2}Mv_0^2$.

2. La palla appena comincia a muoversi di moto lineare risente della forza d'attrito $\mathbf{F}_A = -\mu_d N\hat{\mathbf{x}}$, con $N = Mg$ la reazione vincolare ed $\hat{\mathbf{x}}$ il versore parallelo al moto rettilineo della palla. Rispetto al CM la forza d'attrito esercita un momento non nullo quindi le equazioni cardinali del moto si scrivono come

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_A \tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{b} \times \mathbf{F}_A \tag{3}$$

   con $\mathbf{b} = -R\hat{\mathbf{z}}$ il braccio della forza e $\hat{\mathbf{z}}$ è il versore verticale. Dalla prima equazione si ha $a = -\mu_d g$ e quindi il CM si muovo di moto decelerato uniforme:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - \mu_d g t. \tag{4}$$

   Essendo il momento angolare rispetto al CM dato da $L = I_{CM}\omega$ con $I = (2/5)MR^2$ e $\omega$ la velocità angolare, la seconda equazione cardinale fornisce un accelerazione angolare pari a $\alpha = 5\mu_d g/(2R)$. Quindi l'espressione per la velocità angolare sarà:

$$R\omega(t) = \frac{5}{2}\mu_d g t. \tag{5}$$

3. Si ha puro rotolamento quando velocità di traslazione e velocità angolare coincidono, ossia al tempo $\bar{t}$ tale che $R\omega(\bar{t}) = v(\bar{t})$:

$$\bar{t} = \frac{2v_0}{7\mu_d g}. \tag{6}$$

4. Affinché si abbia puro rotolamento sin dall'inizio (e quindi anche in assenza di attrito) si deve fornire una velocità angolare iniziale alla palla tramite la stecca. Ciò è possibile solo se $h \neq R$. In particolare, integrando l'equazione per la componente $z$ del momento angolare $L_{CM}/dt = \tau$ e tenendo conto che il momento angolare iniziale è nullo, si ottiene il momento angolare dopo l'urto nella forma $L_{CM} = b \times \int F(t)dt$ con $b = (h - R)$. Dunque la velocità di rotazione

$$R\omega_0 = \frac{5(h-R)}{2MR} \int F(t)dt \; . \tag{7}$$

Ponendo $R\omega_0 = v_0$ si ottiene:

$$h = \frac{7}{5}R. \tag{8}$$

5. In questo caso l'impulso è evidentemente fornito dalla pallottola. L'urto è completamente anelastico. Si conservano sia quantità di moto che momento angolare:

$$P_{in} = P_{fin} : \quad mv_p = (M + m_p)v_{cm} \tag{9}$$

$$L_{in} = L_{fin} : \quad (h - R)mv_p = I_T\omega \tag{10}$$

dove $v_{cm}$ è la velocità finale incognita del centro di massa del sistema palla-proiettile, $I_T$ il momento d'inerzia del sistema rispetto il CM della palla ed $\omega$ la velocità angolare finale incognita. Ora il momento d'inerzia complessivo si trova applicando il teorema di Huygens-Steiner: $I_T = 2/5MR^2 + mR^2$. Imponendo la condizione di puro rotolamento $v_{cm} = R\omega$ si trova il valore

$$h = \left(1 + \frac{2M + 5m}{5(M + m)}\right) R. \tag{11}$$

Si noti che per $m \to 0$ si ritrova il risultato $7/5R$ della domanda precedente, mentre se $m \to \infty$ si ottiene $h = 2R$.

Il centro di massa che non è più il centro della palla esegue un moto tipo cicloide. Ciò significa che la reazione vincolare del piano non è costante, dovendo tener conto della parte centrifuga del moto. Può quindi succedere che, se la velocità impressa è troppo elavata, la palla tenda a lasciare il piano d'appoggio e saltare.

**Soluzione II.1**

All'equilibrio si ha che

$$\begin{aligned} p_0 &= k\Delta l_m/S = 0.5bar \quad (1)\\ V_0 &= S(l-l_0)/2 = 7\cdot 10^{-3}m^3 \quad (2)\\ T_0 &= p_0V_0/nR = 210.5K \quad (3)\end{aligned}$$

Dopo la fase di riscaldamento si avrà che

$$p = k\Delta l'_m/S \qquad (\Delta l' = |l_0 - l'_m|). \quad (4)$$

Il volume in A si ottiene semplicemente da $V_A = lS - V_B - l'_m S = 10.73\cdot 10^{-3}m^3$. Il volume del gas in B si può ottenere utilizzando l'equazione delle adiabatiche reversibili:

$$p_0V_0^\gamma = pV_B^\gamma \quad \Rightarrow V_B = 4.27\cdot 10^{-3}m^3. \quad (5)$$

Tramite le equazioni di stato ricaviamo le temperature:

$$T_A = \frac{pV_A}{nR} = 645.3K \qquad T_B = \frac{pV_B}{nR} = 256.8K. \quad (6)$$

Il lavoro compiuto dalla molla durante la compressione è

$$W_{molla} = \frac{1}{2}k(\Delta l'_m)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 75J. \quad (7)$$

La variazione di energia interna è $\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = nc_V(T_A - T_0) + nc_V(T_B - T_0) = 1999J$. Quindi, il primo principio della termodinamica implica che

$$Q = \Delta U + Q = 2074J. \quad (8)$$

**Soluzione II.2**

1. Tenendo conto che il lavoro compiuto sul sistema è nullo, il primo principio della termodinamica implica

$$\begin{aligned} \Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0 \quad &\Rightarrow n_Ac_V(T_0 - T_A) = -n_Bc_V(T_0 - T_B)\\ \Rightarrow T_0 = 600K. \quad (1)\end{aligned}$$

2. Le variazioni di entropia si calcolano con le relazioni standard dei gas ideali e si ottiene: $S_A = 47.1J/K$ e $S_B = -7.8J/K$, quindi $\Delta S = 39.3J/K$.