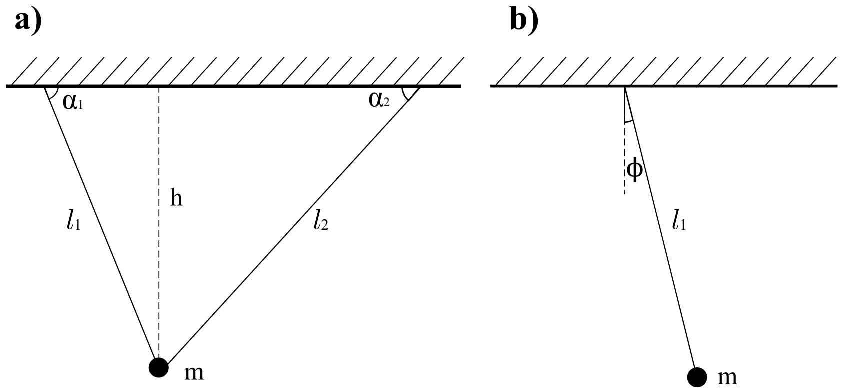
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2010-11, 18 Luglio 2011

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fis. Gen. I:

Esercizio I.1



Si consideri un punto materiale di massa m appeso al soffitto per mezzo di due fili inestensibili, il primo di lunghezza l_1 e il secondo l_2, entrambi di massa trascurabile, in modo che la distanza dal soffitto sia h, come rappresentato nella parte a della figura.

1. Calcolare i moduli delle tensioni dei fili T_1 e T_2 all'equilibrio in funzione delle lunghezze assegnate (suggerimento: esprimere il seno e il coseno degli angoli α_1 e α_2 in funzione di l_1, l_2 e h).

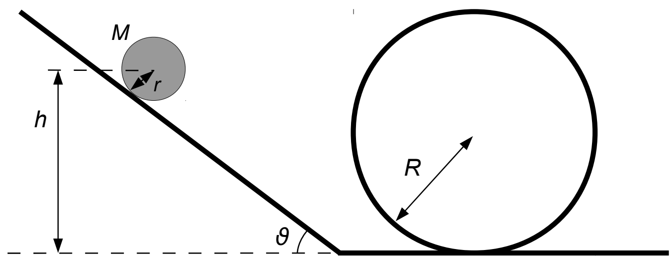
2. Commentare i risultati ottenuti nei casi $l_2 = h$, $l_2 = l_1$ e $l_2 \to \infty$.

Si consideri il caso in cui il sistema si trovi all'equilibrio ad un angolo generico α_1 $(0 < \alpha_1 < \pi/2)$. Ad un certo istante il secondo filo viene improvvisamente tagliato.

3. Usando la conservazione dell'energia si calcoli l'espressione della velocità del corpo in funzione dell'angolo ϕ (vedi parte b della figura), essendo $\phi_0 = \pi/2 - \alpha_1$ l'angolo al momento del taglio.

4. Usando il risultato del punto precedente si calcoli l'espressione della tensione del filo T_1 in funzione dell'angolo ϕ.

Esercizio I.2



Un cilindro di massa $M = 0.5$ Kg e raggio $r = 20$ cm, inizialmente fermo, si muove lungo un piano inclinato ad un angolo $\theta = 30°$ e, di seguito, percorre una guida circolare di raggio $R = 80$ cm come in figura. Si consideri dapprima il caso in cui il piano e la guida siano lisci (senza attrito) e che il cilindro non ruoti.

1. Si calcoli l'altezza minima, h, da cui occorre rilasciare il cilindro affinché esso percorra l'intero tratto circolare.

Si consideri invece il caso in cui il piano e la guida garantiscano, per tutta la durata del moto, le condizioni di puro rotolamento.

2. Si calcoli come prima l'altezza minima, h, da cui occorre rilasciare il cilindro affinché esso percorra l'intero tratto circolare; si discuta la differenza rispetto al caso precedente.

3. Scrivere le equazioni del moto durante la discesa lungo il piano inclinato e calcolare l'accelerazione.

4. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s necessario per garantire la condizione di puro rotolamento durante la discesa lungo il piano.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1

In una calda sera d'estate, un appartamento con finestre e porte chiuse si comporta come un contenitore adiabatico. Il termometro segna 32°C.

Ad un certo punto, viene estratta dal frigorifero una bottiglia contenente 2 litri d'acqua alla temperatura di 4° C. L'acqua viene lasciata sul tavolo dove raggiunge l'equilibrio termico con l'aria circostante. La temperatura dell'appartamento non cambia apprezzabilmente (il termometro segna ancora 32°C). Si calcoli la variazione di entropia dell'aria, dell'acqua e dell'universo in questo processo. Supponendo che nell'appartamento ci siano 250 m^3 di aria, di densità $\rho = 1.1$ Kg m^{-3} e calore specifico a pressione costante 1000 J/(Kg K), quant'è la reale variazione di temperatura della stanza? Era ragionevole trascurarla nel calcolo precedente?

Viene poi azionato un ventilatore che compie 1000 giri al minuto. Il suo motore a regime esercita un momento $\tau = 10$ N m e viene tenuto acceso per tre minuti. Si calcoli la temperatura finale dell'aria, quando il ventilatore ha smesso di agire. E' maggiore o minore di quella iniziale? Si dia una motivazione del risultato. Si calcoli la variazione di entropia dell'aria a seguito dell'azione del ventilatore.

Esercizio II.2

Un gas ideale monoatomico esegue un ciclo costituito da quattro rami: AB, BC, CD, e DA. La trasformazione AB avviene lungo un'isobara reversibile, quella BC lungo un'isocora irreversibile, quella CD lungo un'isobara reversibile, mentre DA avviene lungo un'isocora irreversibile. Sapendo che $P_A = 4$ Atm, $P_C = 2$ Atm, $V_A = 1$ lt e $V_B = 4$ lt, si calcoli

1. il lavoro compiuto dal sistema nell'intero ciclo;
2. il calore scambiato con l'esterno nei diversi tratti;
3. il rendimento del ciclo;
4. la variazione di entropia dell'universo nel ciclo.

Soluzione I.1

1. Fissiamo un sistema di riferimento che abbia l'asse x parallelo al soffitto e l'asse y perpendicolare ad esso. Le forze che agiscono sul punto materiale sono le tensioni dei due fili $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ e la forza peso $\vec{P}$. Siccome siamo in situazione di equilibrio sappiamo che la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul punto materiale deve essere nulla $\vec{P}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$. Scomponendo questa relazione lungo le direzioni x e y otteniamo

$$\begin{aligned} x: \quad T_1\cos(\alpha_1)-T_2\cos(\alpha_2) &= 0 \\ y: \quad T_1\sin(\alpha_1)+T_2\sin(\alpha_2) &= mg \end{aligned} \tag{1}$$

Esprimiamo ora i coseni e i seni degli angoli in funzione delle lunghezze assegnate h, l_1 e l_2. Otteniamo

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1) &= \frac{h}{l_1} \qquad \cos(\alpha_1) = \frac{\sqrt{l_1^2-h^2}}{l_1} \\ \sin(\alpha_2) &= \frac{h}{l_2} \qquad \cos(\alpha_2) = \frac{\sqrt{l_2^2-h^2}}{l_2} \end{aligned} \tag{2}$$

Possiamo ora ricavare le tensioni T_1 e T_2 in funzione delle lunghezze h, l_1, l_2 risolvendo le equazioni (1) e usando le relazioni (2). Si ottiene il seguente risultato

$$T_1 = mg\frac{l_1}{h}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{l_1^2-h^2}}{\sqrt{l_2^2-h^2}}} \tag{3}$$

$$T_2 = mg\frac{l_2}{h}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{l_2^2-h^2}}{\sqrt{l_1^2-h^2}}} \tag{4}$$

2. Nel caso in cui $l_2 = h$ otteniamo $T_1 = 0$ e $T_2 = mg$. Questo è quanto ci si aspettava in quanto il filo 2 è verticale e regge tutto il peso del punto materiale. Al contrario il filo 1 non sostiene alcun peso.

   Nel caso $l_2 = l_1 = l$ il problema è simmetrico e dunque ci aspettiamo di ottenere due tensioni uguali. Facendo i calcoli otteniamo infatti $T_1 = T_2 = mgl/2h$.

   Nel caso $l_2 \to \infty$ si ottienene $T_1 = mgl_1/h$ e $T_2 = mg\sqrt{l_1^2-h^2}/h$. Se poi calcoliamo le componenti delle tensioni lungo x e y otteniamo $T_1^{(x)} = mg\sqrt{l_1^2-h^2}/h$, $T_1^{(y)} = mg$, $T_2^{(x)} = mg\sqrt{l_1^2-h^2}/h$ e $T_2^{(y)} = 0$. Osserviamo dunque che il filo 1 sostiene tutto il peso in direzione y ed ha una componente in direzione x non nulla dovuta al fatto che non è posto verticalmente. Il filo 2 invece non sostiene alcun peso, essendo orizzontale, e ha solo il ruolo di bilanciare la componente lungo x della tensione del filo 1. Per questo motivo abbiamo ottenuto $T_1^{(x)} = T_2^{(x)}$.

3. Come suggerito nel testo questo punto si risolve utilizzando la conservazione dell'energia. All'istante iniziale, quando viene tagliato il filo, avremo che l'energia sarà soltanto potenziale in quanto il punto materiale ha velocità nulla. Fissando come punto zero per il calcolo dell'energia potenziale la quota minima raggiunta dal pendolo durante il suo moto possiamo scrivere l'energia del corpo all'istante iniziale come segue
$$E_i = mgl_1[1 - \cos(\phi_0)] \tag{5}$$
Quando il filo forma un generico angolo ϕ con la verticale avremo invece, in generale, che la velocità è non nulla e l'energia sarà data da un termine cinetico e uno potenziale
$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + mgl_1[1 - \cos(\phi)] \tag{6}$$
Eguagliando queste due espressioni si ottiene che il modulo della velocità in funzione dell'angolo è dato da
$$v = \sqrt{2gl_1[\cos(\phi) - \cos(\phi_0)]} = \sqrt{2g[l_1\cos(\phi) - h]}. \tag{7}$$

4. Per calcolare la tensione del filo in funzione dell'angolo ϕ ci mettiamo nel sistema di riferimento solidale con il punto materiale e scriviamo il bilancio delle forze in direzione normale. Questo sarà uguale a zero perchè in direzione normale, nel sistema di riferimento scelto, non ho alcuna accelerazione. Le forze in gioco sono la tensione del filo, la forza peso proiettata sulla direzione normale e la forza centrifuga (sistema di riferimento non inerziale). Otteniamo dunque
$$T_1 - mg\cos(\phi) - m\frac{v^2}{l_1} = 0. \tag{8}$$
Ricavando T_1 e sostituendo l'espressione per v otteniamo
$$T_1 = mg[3\cos(\phi) - 2\cos(\phi_0)] = mg\left[3\cos(\phi) - 2\frac{h}{l_1}\right]. \tag{9}$$

Soluzione I.2

1. Affinchè il cilindro percorra l'intero tratto circolare senza staccarsi si deve avere che la reazione vincolare della guida deve essere sempre

rivolta verso l'interno del tratto circolare. In particolare ciò deve esser vero nel punto più alto della traiettoria, detto A.

Detta v la velocità del centro di massa, la componente normale della prima equazione cardinale in A si scrive:

$$Mv^2/(R-r) = N + Mg, \quad N \geq 0. \tag{1}$$

La velocità minima in A, per aver $N = 0$ risulta quindi essere $v_{min}^2 = g(R-r)$ (ossia banalmente tutta l'accelerazione centripeta del centro di massa è fornita dalla forza di gravità).

Si può ora usare la conservazione dell'energia per trovare il valore di h necessario affinchè la pallina arrivi nel punto A con velocità v_{min}. Nel caso in cui non ci sia attrito il cilindro traslerà senza ruotare e dunque la relazione tra l'energia iniziale e quella in A si scrive:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg(2R-r), \tag{2}$$

e quindi $h_{min} = (5/2)R - (3/2)r = 1.7\text{m}$.

2. Nel caso in cui ci sia attrito e il moto sia di puro rotolamento invece va aggiunta anche l'energia cinetica di rotazione rispetto al centro di massa:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg(2R-r) + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}v^2, \tag{3}$$

dove $I = (1/2)Mr^2$ è il momento d'inerzia del cilindro e si è usato il fatto che trattandosi di puro rotolamento la velocità angolare del cilindro rispetto al centro di massa è $\omega = v/r$. In questo caso dunque: $h_{min} = (11/4)R - (7/4)r = 1.85\text{m}$.

3. Scomponendo il moto lungo la direzione parallela al piano, x, e lungo la direzione perpendicolare al piano, y, e indicando con F la forza agente tra il cilindro e il piano, l'equazione del moto per la traslazione si scrive:

$$x: \qquad 0 = N - Mg\cos(\theta) \tag{4}$$
$$y: \qquad Ma = Mg\sin(\theta) - F\,. \tag{5}$$

Scegliendo come polo il centro di massa del cilindro, l'equazione del moto per la rotazione è la seguente:

$$I\alpha = rF\,. \tag{6}$$

Scegliendo invece come polo il punto di contatto, si ha

$$(I + Mr^2)\alpha = Mg\sin(\theta)r. \tag{7}$$

Risolvendo le equazioni (5) e (7) [o in maniera analoga le equazioni (5) e (6)] e imponendo che $a = \alpha r$ (puro rotolamento) si trova il valore dell'accelerazione $a = (2/3)gr\sin(\theta) = 3.27\text{m/s}^2$

4. Dalle equazioni del moto si trova anche $F = (1/3)Mg\sin(\theta)$. Poiché il valore massimo di F è fissato dalla coefficiente di attrito statico tramite la relazione $F \leq \mu_s N$, e dato che $N = mg\cos(\theta)$, segue che $\mu_s \geq (1/3)\tan(\theta) = 0.19$.

Soluzione II.1

La variazione di entropia dell'acqua può essere calcolata in questo modo:

$$\Delta S_{H_20} = \int \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\rm rev} = mc\int_{T_{frigo}}^{T_{aria}} \frac{dT}{T} = mc\log\left(\frac{T_{aria}}{T_{frigo}}\right) = 806.6 \text{ J/K} \tag{1}$$

dove c è il calore specifico dell'acqua. Il calore complessivamente assorbito dall'acqua vale: $Q_{H_20} = m\ c\ \Delta T = 234.4$ kJ. La variazione di entropia dell'aria nella stanza sarà dunque

$$\Delta S_{aria} = \int \left(\frac{\delta Q}{T_{aria}}\right)_{rev} = -\frac{Q_{H_20}}{T_{aria}} = -768.6\text{J/K}, \tag{2}$$

dove abbiamo ipotizzato che l'aria si comporti come un ambiente a temperatura costante.

La massa d'aria contenuta nell'appartamento è $M_{aria} = \rho V = 275$ Kg. La diminuzione di temperatura dell'aria nel processo reale è quindi, in modulo, pari a $\Delta T = |Q_{H_20}|/(M_{aria}c_{aria}) = 0.8$ K. Tale variazione di temperatura è abbastanza piccola rispetto a quella dell'acqua e poteva essere ragionevolmente trascurata nei calcoli precedenti (l'errore è facilmente stimabile eseguendo il calcolo esatto).

A questo punto, l'aria è soggetta al lavoro esterno adiabatico compiuto dal ventilatore. In tre minuti, tale lavoro è pari a $W_{est} = \tau\phi$ dove $\phi = 3 \times 2\pi \times 10^3$ è l'angolo totale compiuto dal mulinello. Quindi l'aumento di temperatura dell'aria è pari a $\Delta T = W_{est}/(M_{aria}c_{aria}) = 0.68$ K. La variazione di entropia in questa fase vale

$$\Delta S = M_{aria}c_{aria}\log\frac{T_{aria} + \Delta T}{T_{aria}}. \tag{3}$$

Soluzione II.2

Il lavoro è compiuto solo lungo le isobare e vale:

$$W = W_{AB} + W_{CD} = (V_B - V_A)(P_A - P_B) \tag{1}$$

e inserendo i valori numerici si ottiene:

$$W = W_{AB} + W_{CD} =\simeq 3 \times 10^{-3}\text{m}^3 \times 2.013 \times 10^5\text{Pa} = 608\text{J}. \qquad (2)$$

Usando l'equazione di stato dei gas perfetti, i calori scambiati nei rami isobari sono

- $Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = \frac{c_P}{R}(P_B V_B - P_A V_A) \simeq 3000\text{J}$
- $Q_{CD} = nc_P(T_D - T_C) = \frac{c_P}{R}(P_D V_D - P_C V_C) \simeq -1500\text{J}$

Nei rami isocori, indipendentemente dal fatto che le trasformazioni siano irreversibili, il lavoro compiuto dal gas è nullo e ciò implica, dal primo principio, che il calore scambiato è pari alla variazione di energia interna. Questa può essere espressa tramite il calore specifico a volume costante e la variazione di temperatura, in modo tale che

- $Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = \frac{c_V}{R}(P_C V_C - P_B V_B) \simeq -1200\text{J}$
- $Q_{DA} = \Delta U_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = \frac{c_V}{R}(P_A V_A - P_D V_D) \simeq 300\text{J}$

Si noti che non è necessario conoscere il numero di moli n.

Quindi $Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA}$, $Q_{ced} = Q_{BC} + Q_{CD}$ ed il rendimento vale $\eta = 1 + |Q_{ced}|/|Q_{ass}| = 0.18$. Si noti che, per questo ciclo, il carattere irreversibile delle trasformazioni isocore non ha implicazioni sul rendimento.

Le trasformazioni AB e CD sono reversibili quindi, in questi rami, la variazione di entropia dell'universo è nulla. Nei rami irreversibili DA e BC occorre calcolare separatamente la variazione di entropia del sistema e quella dei serbatoi. Per quella del sistema basta ricordare l'espressione di ΔS per un gas ideale in termini dei rapporti delle temperature e dei volumi. A volume costante basta conoscere il rapporto delle temperature, che è anche uguale al rapporto tra le pressioni, grazie all'equazione di stato. Dunque si ha:

$$\Delta S^{gas}_{DA} = -\Delta S^{gas}_{BC} = n\frac{3}{2}R\log 2 \qquad (3)$$

La viaziazione di entropia dell'ambiente dipende invece dalle temperature T_i dei serbatoi con cui il sistema è posto a contatto. Nel ciclo si avrà $\Delta S_{univ} = \Delta S^{DA}_{amb} + \Delta S^{BC}_{amb}$. Se facciamo l'assunzione che le trasformazioni isocore DA e BC si realizzino ponendo a contatto il sistema con due soli serbatoi a temperature rispettivamente T_A e T_C, allora si ottiene:

$$\Delta S_{amb} = -\frac{|Q_{DA}|}{T_A} + \frac{|Q_{BC}|}{T_C} = (-300/48 + 1200/96)J/K = 6.15J/K. \qquad (4)$$

Altre scelte daranno valori diversi.