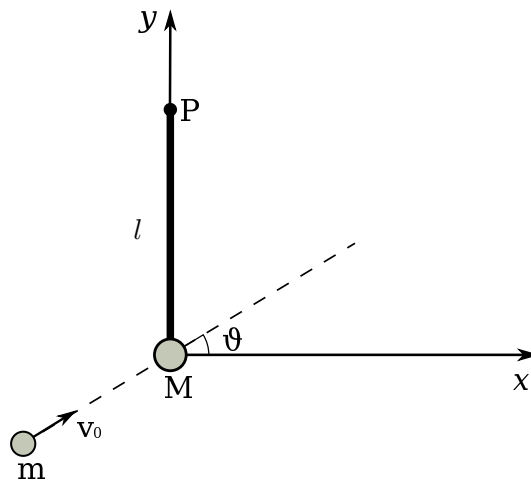


Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2010-11, 20 giugno 2011

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fis. Gen. I:

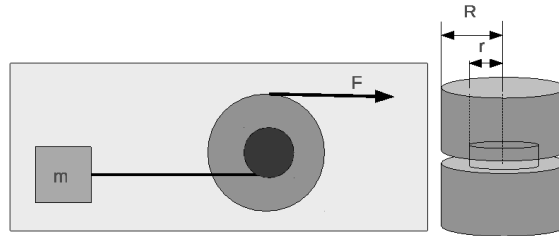
Esercizio I.1



Si consideri un corpo di massa $M = 2$ Kg inizialmente in quiete e attaccato ad un'asta lunga $l = 1$ m e di massa trascurabile. All'altra estremità l'asta è vincolata ad un perno P ed è libera di ruotare attorno ad esso nel piano orizzontale xy , senza attriti. Si supponga che un secondo corpo di massa $m = 1$ Kg, muovendosi nello stesso piano xy urti in maniera elastica il corpo di massa M . La velocità del corpo di massa m subito prima dell'urto è in modulo pari a $v_0 = 3$ m/s e forma un angolo θ con l'asse x , come in figura. L'urto sia frontale, in modo che l'angolo θ rimane lo stesso anche dopo l'urto.

1. Si scrivano le leggi di conservazione che caratterizzano l'urto.
2. Si scrivano le espressioni algebriche della velocità v del corpo di massa m e la velocità angolare ω del corpo di massa M immediatamente dopo l'urto.
3. Si verifichi che le espressioni appena trovate danno predizioni corrette nei due casi limite $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$ e, inoltre, che per $M > m$ la massa m inverte sempre il verso della velocità.
4. Si calcolino i valori numerici di v e ω con i dati assegnati e con $\theta = \pi/6$.
5. Si calcoli l'impulso $\vec{I} = \int \vec{F}(t)dt$ sviluppato dal perno durante l'urto. La componente x dell'impulso risulta sempre nulla. Perché?

Esercizio I.2



Un cilindro di massa $M = 2\text{kg}$ e raggio $R = 5\text{cm}$ è appoggiato verticalmente su un piano orizzontale liscio. Tramite un filo si applica al cilindro una forza costante $F = 12\text{N}$ all'altezza del suo centro di massa ed orientata come in figura. Con un secondo filo, avvolto entro un'apposita fessura e distante r dall'asse del cilindro, è collegato al cilindro un corpo di massa $m = 0.8\text{kg}$. Il secondo filo parallelo al piano si trova anch'esso all'altezza del baricentro del cilindro. La fessura non altera il momento d'inerzia del cilindro.

1. Si scrivano le equazioni del moto per cilindro e corpo e le relazioni tra le accelerazioni dei due corpi.
2. Si trovi il valore di r affinché l'accelerazione del corpo di massa m sia nulla.
3. Si calcoli la tensione esercitata dal secondo filo ed il rapporto tra velocità angolare e velocità traslazionale del cilindro nel caso (2).
4. Sempre nelle condizioni del caso (2) qual'è il lavoro fatto dalla forza $\mathbf{F}$ se il cilindro partendo da fermo si sposta di $L = 0.5\text{m}$?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1

Due moli di una sostanza in fase liquida vengono versati in un palloncino gonfiabile, inizialmente vuoto. Il palloncino viene chiuso in modo che contenga solo il liquido e viene posto in un forno in cui la temperatura e la pressione dell'aria sono tenute costanti e pari a $T = 400$ K e $P = 10^5$ Pa. In tali condizioni, il liquido inizia ad evaporare gonfiando il palloncino. Il calore latente di vaporizzazione sia $\lambda = 10$ Kcal/mol. Si supponga che il vapore si comporti come un gas ideale e che il volume iniziale del palloncino sia trascurabile rispetto al volume finale. Con queste ipotesi si calcolino:

1. il calore totale Q necessario a vaporizzare tutto il liquido;
2. il volume finale del gas;
3. il lavoro compiuto dal palloncino durante la vaporizzazione (trascurando le forze elastiche delle pareti del palloncino rispetto alla pressione);
4. la variazione di energia interna del liquido;
5. la variazione di entropia del liquido.

Esercizio II.2

Un gas ideale a 300 K occupa un volume di 0.5 m^3 a una pressione di 2×10^5 Pa. Il gas si espande adiabaticamente fino a quando il suo volume diventa 1.2 m^3 . Successivamente il gas viene compresso isobaricamente fino al volume iniziale. Infine viene aumentata la pressione tenendo il volume costante fino a riportare il gas nello stato iniziale. Si assuma che tutte le transizioni siano eseguite in maniera reversibile.

1. rappresentare il ciclo nel diagramma P-V;
2. determinare la temperatura alla fine di ciascuna trasformazione;
3. determinare il lavoro compiuto nel ciclo;
4. determinare il rendimento della macchina termica che usa lo stesso ciclo.

Soluzione I.1

1. Il perno esercita una forza esterna impulsiva durante l'urto e quindi la quantità di moto non si conserva. Tuttavia, il momento della forza esterna rispetto al polo P è nullo e di conseguenza si conserva il momento angolare. Inoltre l'urto è elastico e quindi si conserva l'energia cinetica. L'eguaglianza del momento angolare (lungo z , visto che il moto avviene nel piano xy) e quella dell'energia cinetica prima e dopo l'urto possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned} mv_0 l \cos \theta &= mvl \cos \theta + Ml^2 \omega \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Ml^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (1)$$

dove abbiamo indicato con v la componente della velocità finale $\vec{v}$ nella direzione del moto individuata dall'angolo θ . Se $v > 0$ la massa m prosegue nello stesso verso dopo l'urto; se $v < 0$ la massa m esce nel verso opposto.

2. Risolvendo algebricamente le equazioni (1) si possono ottenere le velocità v e ω . Il risultato del calcolo è il seguente:

$$v = v_0 \frac{\cos^2 \theta - (M/m)}{\cos^2 \theta + (M/m)} \quad (2)$$

$$\omega = \frac{2v_0}{l} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + (M/m)}. \quad (3)$$

3. Nel caso $\theta = \pi/2$ l'urto avviene parallelamente all'asta rigida e, dunque, la massa M non può muoversi. La massa m deve rimbalzare elasticamente invertendo il verso ma mantenendo il modulo della velocità. Le espressioni sopra sono coerenti con questa richiesta, visto che inserendo $\theta = \pi/2$ si ottiene $v = -v_0$ (stesso modulo ma verso opposto) e $\omega = 0$, come atteso. Nel caso $\theta = 0$ invece l'urto avviene perpendicolarmente all'asta che, quindi, non può rispondere con una forza impulsiva. Di conseguenza deve conservarsi anche la quantità di moto. Dalle espressioni precedenti si ottiene

$$v = v_0 \frac{1 - (M/m)}{1 + (M/m)} \quad (4)$$

$$\omega = \frac{2v_0}{l} \frac{1}{1 + (M/m)}, \quad (5)$$

e si può facilmente verificare che

$$mv + Ml\omega = mv_0 \quad (6)$$

come ci si attende dalla conservazione della quantità di moto, essendo $l\omega$ la velocità della massa M dopo l'urto. Infine, dall'espressione generale di v risulta che il segno della velocità d'uscita è fissato dal segno di $[\cos^2 \theta - (M/m)]$. Dato che $\cos^2 \theta$ vale al massimo 1, il segno è sempre negativo se $M > m$.

4. Basta inserire i valori numerici nelle espressioni (2) e (3).
5. L'impulso sviluppato dal perno è uguale alla variazione di quantità di moto del sistema durante l'urto:

$$\vec{I} = \int \vec{F}(t) dt = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta \vec{p}. \quad (7)$$

Scomponiamo il calcolo lungo le direzioni x e y . Nella direzione y si ha

$$I_y = \Delta p_y = m(v - v_0) \sin \theta = -\frac{2Mv_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta + (M/m)}. \quad (8)$$

Nella direzione x invece

$$I_x = \Delta p_x = mv_x + Ml\omega - mv_{0x} = m(v - v_0) \cos \theta + Ml\omega \quad (9)$$

da cui, inserendo le espressioni di v e ω , si ottiene $I_x = 0$ indipendentemente dall'angolo e dagli altri dati assegnati. Effettivamente l'impulso lungo x è sempre nullo, ma ciò è coerente con il fatto che l'asta non può opporre alcuna reazione di tipo impulsivo perpendicolarmente ad essa, dato che il perno la lascia comunque libera di ruotare. Quindi, in conclusione,

$$\vec{I} = I_y \hat{y} = -\frac{2Mv_0 \sin \theta}{\cos^2 \theta + (M/m)} \hat{y}. \quad (10)$$

Soluzione I.2

1. L'unica forza agente sul corpo di massa m è la tensione della fune T e quindi (prendendo positivo il verso concorde alla forza F):

$$ma_{co} = T. \quad (1)$$

Per il cilindro le equazioni del moto (equazioni cardinali) possono esser scritte per il moto del centro di massa e per il momento angolare rispetto ad un asse passante per il centro di massa:

$$\frac{dP_{cil}}{dt} = Ma_{cil} = F - T, \quad (2)$$

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha = RF + rT \quad \text{con} \quad I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (3)$$

Nelle equazioni precedenti si è sfruttato che (i) la corda è inestensibile e senza massa; (ii) la rotazione avviene rispetto ad un asse principale di rotazione; (iii) si considera positivo il verso del momento angolare entrante nel piano; (iv) la fessura nel cilindro non modifica il momento d'inerzia I dello stesso.

Infine la relazione tra le accelerazioni

$$a_{co} = a_{cil} - r\alpha \quad (4)$$

fornisce la quarta equazione per le quattro incognite del sistema.

2. Da (1) e (4) si ha che $a_{co} = 0$ corrisponde rispettivamente a $T = 0$ e $a_{cil} = r\alpha$. Sostituendo T in (3) inoltre otteniamo la relazione $a_{cil} = R\alpha/2$ e quindi:

$$r = \frac{R}{2} = 2.5\text{cm}. \quad (5)$$

3. Nel caso 2. si è trovato $T = 0$ e detta ω la velocità angolare dalla relazione tra le accelerazioni si ha

$$v_{cil} = \frac{R\omega}{2}. \quad (6)$$

4. Il lavoro W_F fatto dalla forza $\mathbf{F}$ coincide con la variazione di energia cinetica del sistema che nelle condizioni del punto 2. coincide con la variazione di energia cinetica del cilindro soltanto. Essendo quest'ultimo inizialmente fermo possiamo scrivere:

$$W_F = \frac{1}{2}Mv_{cil}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{2}Mv_{cil}^2 \quad (7)$$

Dove si è utilizzato il risultato al punto 3. per la velocità. Il cilindro si sposta di L in un tempo $t = \sqrt{2a_{cil}L} = \sqrt{2LM/F}$ s e dunque $v_{cil} = a_{cil}t = \sqrt{2LF/M}$ e

$$W_F = 3LF = 18\text{J}. \quad (8)$$

Da notare la differenza col semplice lavoro su punto materiale o corpo non rotante pari ad $LF = 6\text{J}$.

Soluzione II.1

- a) Il calore è dato dal prodotto del calore latente per la quantità di sostanza vaporizzata:

$$Q = n \lambda = 20\text{Kcal} = 83.72\text{KJ}$$

dove $n = 2$ è il numero di moli.

b) Per calcolare il volume finale occupato dal gas, V_f , usiamo l'equazione di stato del gas:

$$V_f = \frac{nRT}{P} = (2 \times 8.314 \times 400/10^5)\text{m}^3 = 0.0665\text{m}^3 = 66.5\text{litri}.$$

c) L'espansione avviene contro la pressione atmosferica, che rimane costante, quindi

$$W = \int dV P = P\Delta V \simeq PV_f = (10^5 \times 0.0665)\text{J} = 6650\text{J}$$

essendo $V_f \gg V_i$, dove V_i è il volume iniziale.

d) La variazione di energia interna è data dal I principio:

$$\Delta U = Q - W = (83720 - 6650)\text{J} = 77070\text{J}$$

e) La variazione di entropia si ottiene considerando una isoterma reversibile che connette gli stati iniziali e finali (che sono alla stessa temperatura):

$$\Delta S = Q/T = (83720/400)\text{J/K} = 209.3\text{J/K}.$$

Soluzione II.1

Non ancora disponibile.