Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2010-11, 25 agosto 2011

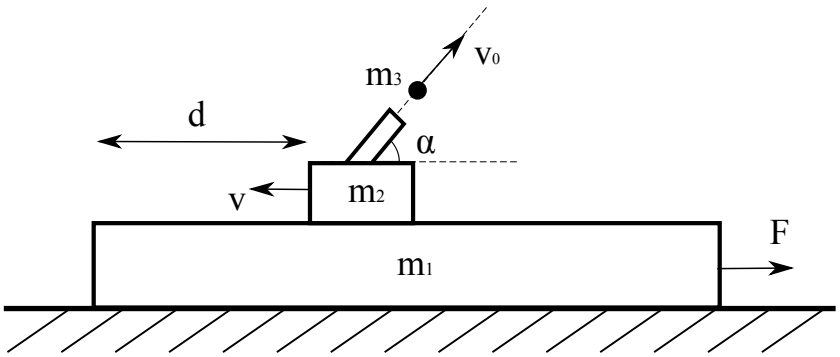
Cognome	
Nome	
Matricola	
Iscritto al Corso di Laurea in	◯ Matematica ◯ Fisica
Anno di Corso	◯ primo ◯ oltre il primo
Tipo di scritto svolto	◯ solo meccanica (esercizi I.1 e I.2) ◯ solo termodinamica (esercizi II.1 e II.2) ◯ tutto lo scritto

Note:

- Gli iscritti al corso di laurea in matematica possono svolgere la prova intera o solo una delle due parti.
- Gli iscritti al primo anno del corso di laurea in fisica che hanno già superato la prova intermedia di meccanica (sessione di gennaio-febbraio 2011) possono svolgere solo la parte di termodinamica. Tutti gli altri iscritti a fisica devono svolgere la prova per intero.
- Per coloro che svolgono la prova per intero: ai fini del superamento della prova è necessario svolgere in modo sufficiente almeno 3 esercizi su 4, di cui 2 di meccanica e uno di termodinamica.
- **Si raccomanda di esporre i risultati di ciascun esercizio, sia algebrici che numerici, in modo chiaro e ordinato!**

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso di Fis. Gen. I:

Esercizio I.1



Un blocco di massa $m_1 = 0.8$ Kg poggia su di un piano orizzontale. Al di sopra di esso poggia un secondo blocco dotato di un cannoncino e che giace ad una distanza $d = 1$ m dal bordo sinistro del blocco inferiore. Il sistema blocco-cannoncino possiede una massa pari ar $m_2 = 0.4$ Kg e contiene inoltre un proiettile di massa $m_3 = 0.05$ Kg. Si supponga che le superfici di contatto tra i due blocchi, così come quelle tra il blocco inferiore e il piano di appoggio siano perfettamente liscie in modo che non agisca alcuna forza di attrito.

1. Si calcoli la velocità di rinculo del blocco-cannone v supponendo che il proiettile venga sparato ad una velocità $v_0 = 10$ m/s e con un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'orizzontale.

Subito dopo lo sparo il blocco inferiore viene trainato con una forza F costante nella stessa direzione nella quale è stato sparato il proiettile.

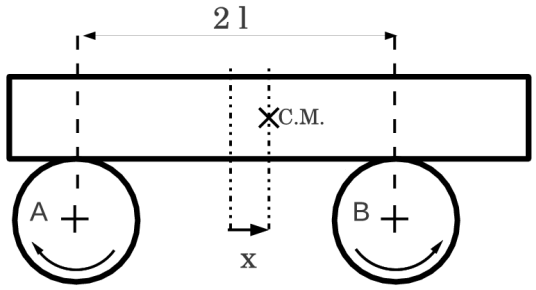
2. Si scrivano le equazioni del moto del blocco inferiore e del proiettile.

3. Si calcoli il tempo impiegato dal proiettile per ritornare alla stessa quota dalla quale è stato sparato.

4. Si calcoli la forza F necessaria affinchè il proiettile ricada sul blocco inferiore nella stessa posizione da cui è stato sparato (ad una distanza d dal bordo sinistro).

5. Con il valore di F appena trovato, si calcoli il tempo impiegato dal blocco-cannoncino per raggiungere il bordo sinistro del blocco inferiore. Si esegua il calcolo sia ponendosi nel sistema di riferimento non inerziale solidale al blocco inferiore, sia in quello inerziale.

Esercizio I.2



Un'asta di massa $M = 4$ Kg è appoggiata a due cilindri identici e imperniati nei rispettivi centri di massa A e B. La distanza tra i due centri di massa è pari a $2l = 0.6$ m. Il centro di massa dell'asta è spostato di una lunghezza x rispetto il punto mediano tra i due cilindri.

1. Determinare le reazioni vincolari nei punti di contatto tra i cilindri e l'asta supponendo $x = x_0 = 10$ cm.

2. Indicando il coefficiente di attrito dinamico tra cilindri ed asta con μ_d e supponendo che un motore mantenga in rotazione i due cilindri con velocità angolare ω uguale e contraria, come rappresentato in figura, si dimostri che il moto dell'asta è di tipo oscillatorio.

3. Determinare μ_d sapendo il periodo di oscillazione è pari a $T = 2.5$ s.

4. Si scriva la legge oraria del centro di massa dell'asta assumendo $\mu_d = 0.2$ e considerando che, all'istante in cui i cilindri cominciano a ruotare, il centro di massa si trovi in $x_0 = 0$ e possegga una velocità pari a $v_0 = 1$ m/s.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1

Due moli di un gas ideale biatomico compiono un ciclo costituito da quattro rami AB, BC, CD e DA quasistatici e reversibili, dove:

- AB e CD sono due trasformazioni adiabatiche;
- BC è un'isocora;
- DA è un'isobara.

Le temperature in A, C e D sono rispettivamente $T_A = 270$ K, $T_C = 600$ K e $T_D = 300$ K.

Si determini il lavoro compiuto complessivamente ed il rendimento della macchina termica che opera con questo ciclo. Come varia il rendimento con il numero delle moli di gas?

Esercizio II.2

Un gas ideale biatomico si trova inizialmente in uno stato caratterizzato dalle seguenti coordinate termodinamiche: $P_A = 1$ bar, $V_A = 20 \times 10^{-3}$ m^3 e $T_A = 288$ K. Il volume del gas viene ridotto a $V_B = 5 \cdot 10^{-3}$ m^3 tramite una compressione isoterma quasistatica e reversibile. Quindi dallo stato B il gas viene portato ad uno stato C tramite una trasformazione che comporta l'assorbimento di un calore $Q_{BC} = 4560$ J e una variazione di entropia dell'ambiente di $\Delta S^B_{amb}C = -9.63$ J/K. Infine, il gas viene riportato in A tramite un'espansione adiabatica reversibile.

Si calcoli il calore scambiato nel ciclo ed il suo rendimento. Si determini inoltre se la trasformazione BC è reversibile.

Soluzione I.1

1. Indichiamo con x la direzione parallela al piano di appoggio e con y quella perpendicolare ad esso. Siccome in direzione x tutte le forze agenti sul sitema cannone-pallina sono interne al sistema possiamo determinare la velocità di rinculo del cannone v utilizzando la conservazione della quantità di moto lungo x.

$$0 = m_3 v_0 \cos(\alpha) - m_2 v \tag{1}$$

dalla quale si ottiene

$$v = \frac{m_3}{m_2} v_0 \cos(\alpha) = 0.625 m/s. \tag{2}$$

2. Il bocco inferiore si muove in direzione x di moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a F/m e dunque le equazioni del moto sono

$$v_{1,x}(t) = \frac{F}{m_1} t \tag{3}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m_1} t^2. \tag{4}$$

La pallina invece si muove lungo x di moto rettilineo uniforme con velocità $v_0 \cos(\alpha)$

$$x_3(t) = v_0 \cos(\alpha) t \tag{5}$$

mentre in direzione y di moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$

$$v_{3,y}(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt \tag{6}$$

$$y_3(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{7}$$

3. Il tempo T impiegato dal proiettile a raggiungere la quota dal quale era stato sparato si trova imponendo $y_3(T) = 0$ e si ottiene

$$T = \frac{2 v_0}{g} \sin(\alpha) = 1.77 s. \tag{8}$$

4. Per fare in modo che la pallina ricada sul blocco nello stesso punto dal quale era stata lanciata bisogna che lo spazio percorso in direzione x dalla pallina durante il tempo di volo T sia uguale a quello percorso dal blocco. Dunque la condizione da imporre è $x_1(T) = x_3(T)$ dalla quale si ottiene

$$F = \frac{2 m_1 v_0 \cos(\alpha))}{T} = \frac{m_1 g}{\tan(\alpha)} = 4.53 N. \tag{9}$$

5. Calcoliamo il tempo τ che il sistema blocco-cannone impiega a raggiungere il bordo ponendoci nel sistema di riferimento non inerziale solidale al blocco inferiore. L'equazione del moto del blocco-cannone in questo sistema di riferimento si ottiene a partire da

$$m_2 a'_{2,x} = -m_2 a_{1,x} \tag{10}$$

in quanto l'unica forza di cui dobbiamo tener conto è la forza apparente $F_a = -m_2 a_{1,x}$. Avremo dunque che il moto del blocco-cannone è uniformemente acelerato con accelerazione $a'_{2,x} = -a_{1,x} = F/m_1$

$$v'_{2,x}(t) = -v - \frac{F}{m_1} t \tag{11}$$

$$x'_2(t) = -vt - \frac{1}{2}\frac{F}{m_1} t^2. \tag{12}$$

Il tempo τ si ottiene dalla condizione $x'_2(\tau) = -d$ che da la seguente equazione di secondo grado

$$\frac{1}{2}\frac{F}{m}\tau^2 + v\tau - d = 0. \tag{13}$$

Risolvendo questa equazione si hanno due soluzioni, una non fisica in quanto negativa e l'altra che invece coincide con la soluzione del quesito $\tau = 0.49s$.

Nel sistema di riferimento inerziale invece abbiamo che la posizione del blocco-cannone è data da $x_2(t) = -vt$ mentre quella del blocco inferiore è data dall'equazione (4). Imponendo che la somma della distanza percorsa dai due blocchi nel tempo τ sia uguale a d, ovvero imponendo che $|x_1(\tau)| + |x_2(\tau)| = d$ si ottiene un'equazione identica a (13). Vediamo dunque che il risultato fisico non dipende dal sistema di riferimento in cui risolviamo il calcolo.

Soluzione I.2

1. L'equilibrio si ha quando sia le forze che i momenti delle forze sono nulli. Chiamando R_A e R_B le reazioni vincolari nei punti di appoggio, il sistema da risolvere è il seguente:

$$R_A + R_B - Mg = 0 \tag{1}$$

$$R_A(l + x) - R_B(l - x) = 0\,, \tag{2}$$

da cui si trova

$$R_A = Mg\frac{l - x}{2l} = 2.33\text{N} \quad R_B = Mg\frac{l + x}{2l} = 1.67\text{N} \tag{3}$$

2. Quando i due cilindri ruotano le forze di attrito tra questi e l'asta producono due forze opposte, entrambe proporzionali allo spostamento del CM dell'asta (vedi sopra) e dunque si ottiene un'equazione del moto di tipo armonico. Infatti la prima equazione cardinale si scrive:

$$Ma_{CM} = \mu_d(R_A - R_B) \tag{4}$$

ovvero

$$M\ddot{x} = \mu_d Mg\left(\frac{l-x}{2l} - \frac{l+x}{2l}\right) = -\frac{\mu_d Mg}{l}x. \tag{5}$$

La frequenza di oscillazione è quindi

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{\mu_d g}{l}} \tag{6}$$

indipendente da ω e dalla massa e lunghezza dell'asta.

3. Noto il periodo $T = 2\pi/\omega_{osc} = 2.5$s si determina il coefficiente di attrito dinamico invertendo la precedente relazione:

$$\mu_d = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{l}{g} = 0.39. \tag{7}$$

4. La soluzione generale dell'equazione del moto Eq. (5) si scrive al solito come $x(t) = A\cos(\omega_{osc}t) + B\sin(\omega_{osc}t)$ dove in questa caso, usando Eq. (6), si ha $\omega_{osc} = 2.5$rad/s. Date le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$m/s si trova

$$x(t) = \frac{\sin(2.5t)}{2.5}\ m \tag{8}$$

Soluzione II.1

Il lavoro totale può essere ottenuto dal primo principio della termodinamica. Dal momento che $\Delta U_{tot} = 0$ e AB e CD sono adiabatiche si ha:

$$W_{tot} = Q_{tot} = Q_{DA} + Q_{BC}, \tag{1}$$

dove:

$$Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = -1746\ J \tag{2}$$

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) \tag{3}$$

Occorre quindi ricavare la temperatura nello stato B. A tal fine sfruttiamo il fatto che lungo un'adiabatica reversibile:

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}, \qquad T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}. \tag{4}$$

Inoltre osserviamo che:

- $V_C = V_B$, poiché gli stati B e C sono collegati da un'isocora
- $V_D/V_A = T_D/T_A$, poiché gli stati D e A sono collegati da un'isobara

Si ottiene quindi

$$\frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{T_D}{T_A}\right)^{\gamma}. \tag{5}$$

da cui si ricava $T_B = 517$K. Quindi $Q_{BC} = 3421.2$ J ed il lavoro totale $W_{tot} = 1675.2$ J.

Il rendimento si ricava subito da

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{BC}} = 0.49. \tag{6}$$

Il rendimento non dipende dal numero di moli, in quanto tale variabile si elide nel rapporto.

Soluzione II.2

Il numero di moli di gas non è dato, ma può essere facilmente determinato dall'equazione di stato dei gas:

$$n = \frac{p_A V_A}{RT} = 0.835. \tag{1}$$

Durante la compressione isoterma AB non vi è variazione di energia interna, quindi utilizzando il primo principio della termodinamica, l'equazione di stato e la definizione di lavoro si ha:

$$Q_{AB} = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} = -2771.7\ J. \tag{2}$$

Il calore scambiato nel ciclo vale quindi

$$Q = W_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} = 1788.3J. \tag{3}$$

Quindi il rendimento è $\eta = W_{tot}/Q_{BC} = 0.392$.

In un ciclo il gas non varia la sua entropia: $\Delta S^{AB}_{gas} + \Delta S^{BC}_{gas} + \Delta S^{CA}_{gas} = 0$. Dato che CA è un'adiabatica reversibile, vale $\Delta S^{CA}_{gas} = 0$. Allora deve essere che $\Delta S^{BC}_{gas} = -\Delta S^{AB}_{gas}$. D'altra parte, la variazione di entropia nell'isoterma è data da $\Delta S^{AB}_{gas} = nR \log V_B/V_A = -9.631$ J/K, da cui si conclude che $\Delta S^{BC}_{gas} = 9.631$ J/K. Si vede che la variazione di entropia del gas in BC è uguale ed opposta alla variazione di entropia dell'ambiente nella stessa trasformazione, assegnata come dato iniziale del problema. Dunque la variazione di entropia dell'universo è nulla in BC e la trasformazione è effettivamente reversibile.