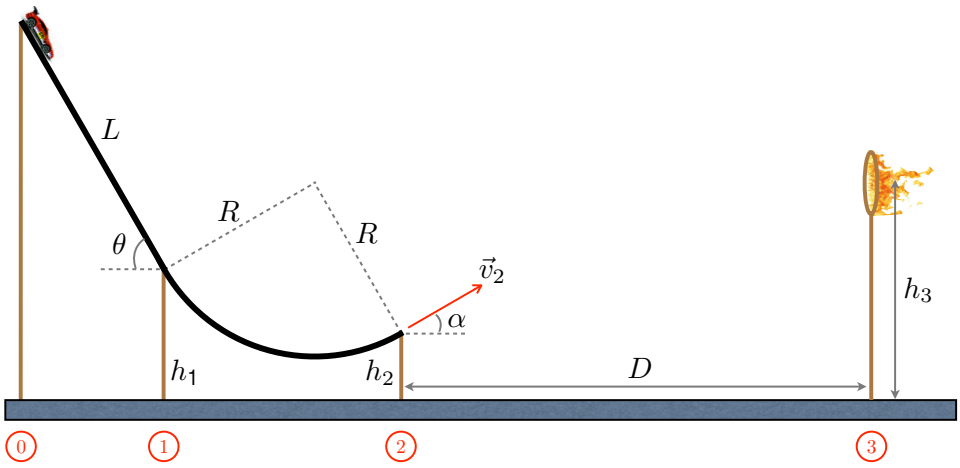
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2011-2012, 4 settembre 2012

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Una Hot Wheels (approssimabile con un punto materiale) partendo da ferma percorre una pista costituita da due parti: una rampa di lunghezza $L = 70$ cm inclinata di $\theta = 60°$ rispetto all'orizzontale e un tratto curvo costituito da quarto di circonferenza di raggio R. Rampa e settore circolare sono privi di attrito e sono connessi lisciamente ad un'altezza $h_1 = 20$ cm come in figura. Il tratto circolare termina ad un'altezza $h_2 = h_1/2$. Si consideri $g = 9.81$ m/s^2.

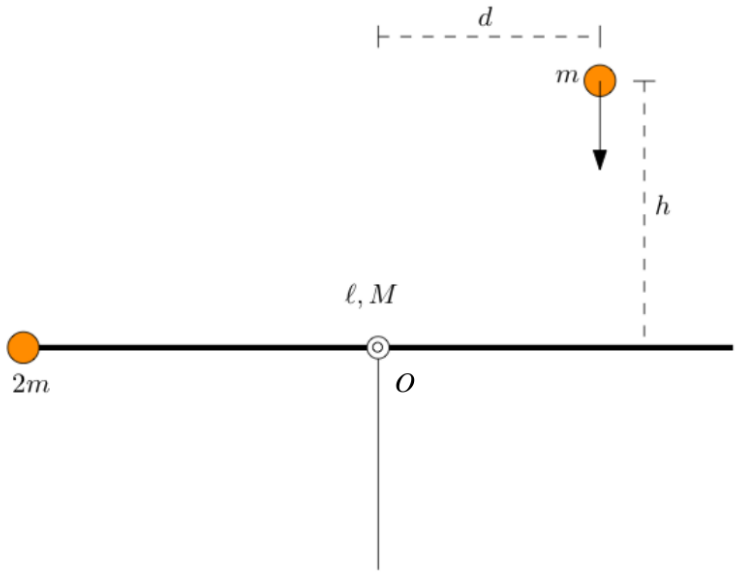
1. Qual è il modulo della velocità $\vec{v}_1$ raggiunta dalla macchinina al punto 1 (punto di collegamento fra la rampa e il settore circolare)?

2. Quali sono modulo e direzione (angolo α) della velocità $\vec{v}_2$ raggiunta dalla macchinina al punto 2 (termine del settore circolare)?

3. Alla distanza $D = 80$ cm viene posta un'asta con un cerchio infuocato. A quale altezza h_3 deve essere posto il centro del cerchio affinché la Hot Wheels riesca a passarci attraverso?

4. Se nel tratto rettilineo L fosse stata presente una forza di attrito costante con coefficiente di attrito $\mu = 0.5$, la macchinina sarebbe riuscita nella sua impresa, considerando l'altezza h_3 del punto precedente? Di quanti centimetri e in che direzione (alto-basso) si sarebbe dovuto spostare il centro del cerchio infuocato?

Esercizio I.2



Una sbarra di lunghezza $l = 2$ m e massa $M = 3$ kg è libera di ruotare senza attrito attorno al suo punto medio O in un piano verticale. Ad uno dei suoi estremi è collegata una massa $2m = 2$ kg, ed inizialmente la sbarra è mantenuta ferma in posizione orizzontale tramite una forza esterna. Una seconda massa $m = 1$ kg viene lasciata cadere sulla sbarra da una altezza $h = 30$ cm ad essa relativa, in modo da colpirla ad una distanza $d = 75$ cm dal punto O. Immediatamente prima dell'urto la forza esterna che agiva sulla sbarra viene tolta, lasciandola libera di ruotare. L'urto è istantaneo e la massa m resta incollata alla sbarra.

1. Qual è il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O subito prima dell'urto? Di che tipo è l'urto tra la massa m e l'asta e quali grandezze si conservano nell'urto? Si prenda il valore di $g = 9.81$ m/s^2.
2. Che espressione e valore ha il momento di inerzia del sistema formato dalla sbarra e dalle masse subito dopo l'urto, calcolato rispetto all'asse passante per O?
3. Si determini modulo, direzione e verso della velocità angolare ω del sistema subito dopo l'urto.
4. Si calcoli l'energia meccanica del sistema dopo l'urto e si dica se la sbarra raggiunge la posizione verticale, con la massa $2m$ al di sopra del punto medio della sbarra.
5. Detto θ l'angolo tra la sbarra e la direzione verticale, si scriva l'equazione del moto del sistema e si discuta qualitativamente la soluzione.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1
Un blocco di metallo di massa $m = 10$ Kg e calore specifico $c = 835$ J/(Kg K) è inizialmente in equilibrio con un ambiente alla temperatura $T_A = 300$ K. Ad un certo istante, il blocco viene spostato e posto a contatto termico unicamente con un serbatoio alla temperatura di fusione del metallo T_f. Il serbatoio fornisce al blocco una quantità di calore al secondo pari a $P = 4180$ J/s. Dopo 10 minuti il blocco inizia a fondere e impiega 5 minuti a fondere completamente. Determinare:
a) la temperatura T_f del serbatoio;
b) il calore latente di fusione del metallo;
c) la variazione di entropia del blocco.
A fusione avvenuta, il metallo viene separato dal serbatoio e posto nuovamente a contatto con l'ambiente, ritornando alla temperatura T_A. Calcolare per il processo complessivo:
d) la variazione di entropia del metallo;
e) la variazione di entropia dell'universo.

Esercizio II.2
Si consideri una mole di anidride carbonica. L'equazione di stato del gas sia approssimabile tramite l'equazione di Van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)\ (v - b) = RT \tag{1}$$

dove v è il volume molare, $a = 3.64$ l^{2}atm/mol^2, $b = 0.0427$ l/mol e $R = 8.314$ J/(mol K).
a) Sapendo che i parametri a e b sono legati al volume critico e alla pressione critica dalle relazioni $v_c = 3b$ e $P_c = a/(3v_c^2)$, si calcoli v_c in m^3/mol e P_c in Pa.
b) Con i dati appena ricavati, si calcoli la temperatura critica T_c.
c) Si consideri un'espansione quasistatica isoterma alla temperatura $T = 290$ K, dal volume iniziale $v_1 = 10$ l al volume finale $v_2 = 20$ l. Si calcoli il lavoro compiuto dal gas nell'espansione e lo si confronti con quello che avrebbe svolto se fosse un gas ideale. La differenza è grande o piccola? Perché?
d) Si calcoli la variazione di entropia del gas nella stessa espansione, trascurando eventuali variazioni di energia interna.

Soluzione esercizio I.1

1. La rampa di lunghezza L è liscia e l'unica forza in gioco è la forza peso che è una forza conservativa. Si può dunque applicare la conservazione dell'energia meccanica tra il punto 0 (partenza) e il punto 1 (punto di collegamento fra rampa e settore circolare). Considerando come zero di riferimento per l'energia potenziale il livello del terreno, si ha:

$$mg\,(h_1 + L\sin\theta) + 0 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2\,. \tag{2}$$

Si poteva scegliere come riferimento per l'energia potenziale direttamente l'altezza h_1 e in questo caso la conservazione dell'energia meccanica sarebbe stata:

$$mgL\sin\theta + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2\,. \tag{3}$$

Il risultato è ovviamente lo stesso:

$$v_1 = \sqrt{2gL\sin\theta} = \sqrt{\sqrt{3}gL} = 3.45\text{ m/s} = 12.4\text{ km/h}\,. \tag{4}$$

2. Anche il settore circolare è privo di attrito e si può dunque applicare nuovamente la conservazione dell'energia meccanica. Una scelta possibile è quella di considerare il punto di partenza 0 e il punto 2 (termine del settore circolare) scegliendo come riferimento il livello del terreno

$$mg\,(h_1 + L\sin\theta) + 0 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2\,, \tag{5}$$

oppure direttamente l'altezza h_2

$$mg\,(h_1 + L\sin\theta - h_2) + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_2^2\,. \tag{6}$$

Altra possibilità era quella di considerare la conservazione dell'energia fra i punti 1 e 2 usando il risultato per v_1 precedentemente calcolato:

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2\,, \tag{7}$$

prendendo come riferimento il livello del terreno, oppure

$$mg\,(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{8}$$

prendendo come riferimento l'altezza h_2. Anche in questo caso il risultato è indipendente dalla scelta dell'intervallo (essendo la forza peso l'unica forza in gioco) e del riferimento per l'energia potenziale:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2g\,(h_1 - h_2 + L\sin\theta)} = \sqrt{g\left(h_1 + \sqrt{3}L\right)} = \\ &= 3.72\text{ m/s} = 13.4\text{ km/h}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Per quanto riguarda la direzione di $\vec{v}_2$ è sufficiente studiare la geometria del problema: il raccordo fra rampa e settore circolare è tale per cui la rampa è tangente all'arco di circonferenza e quindi perpendicolare al raggio R di sinistra. Essendo l'arco un quarto di circonferenza, i due raggi sono fra loro perpendicolari. Infine anche la velocità di uscita $\vec{v}_2$ sarà tangente all'arco di circonferenza e quindi perpendicolare al raggio di destra. Ne segue che $\vec{v}_2$ è perpendicolare al tratto L e quindi, per differenza da 180°, $\alpha = 30°$.

3. Nel momento in cui la macchinina lascia la pista, essa segue una traiettoria parabolica. Per ricavare l'altezza h_3 è sufficiente impostare le equazioni del moto parabolico con $x = D$ e $y = h_3$:

$$\begin{cases} D &= v_2 \cos\alpha\, t \\ h_3 &= h_2 + v_2 \sin\alpha\, t - \dfrac{1}{2} g t^2 \,. \end{cases} \tag{10}$$

Ricavando $t = \frac{D}{v_2 \cos\alpha}$ dalla prima e sostituendo nella seconda si ha:

$$\begin{aligned} h_3 &= h_2 + \tan\alpha D - \frac{1}{2}\frac{g D^2}{v_2^2 \cos\alpha^2} = \\ &= \frac{1}{2} h_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} D - \frac{2}{3}\frac{g D^2}{v_2^2} = 26.0 \text{ cm} \,. \end{aligned} \tag{11}$$

4. Nel caso in cui sulla rampa L vi sia una forza di attrito costante, si può ancora considerare la conservazione dell'energia meccanica togliendo il lavoro della forza dissipativa. Dato che la forza di attrito è data da $F_a = \mu N$, dove $N = mg\cos\theta$ è la normale al piano, si ha:

$$mg\,(h_1 + L\sin\theta) + 0 - \mu mg\cos\theta L = mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1'^2 \tag{12}$$

da cui

$$\begin{aligned} v_1' &= \sqrt{2gL\,(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = \sqrt{gL\left(\sqrt{3} - \mu\right)} = \\ &= 2.91 \text{ m/s} = 10.5 \text{ km/h} < v_1 \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Si può utilizzare ora la conservazione dell'energia fra i punti 1 e 2 come fatto in precedenza, usando però la nuova velocità v_1:

$$mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1'^2 = mgh_2 + \frac{1}{2} m v_2'^2 \,, \tag{14}$$

da cui

$$\begin{aligned} v_2' &= \sqrt{2g\,(h_1 - h_2 + L\,(\sin\theta - \mu\cos\theta))} = \\ &= \sqrt{g\left(h_1 + L\left(\sqrt{3} - \mu\right)\right)} = \\ &= 3.23 \text{ m/s} = 11.6 \text{ km/h} < v_2 \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Infine il moto parabolico è descritto dalle stesse equazioni del punto precedente, per cui è sufficiente sostituire v_2' nella (11):

$$h_3' = h_2 + \tan\alpha D - \frac{1}{2}\frac{gD^2}{v_2'^2\cos\alpha^2} = 16.0 \text{ cm} < h_3 \tag{16}$$

Si ha che la nuova altezza a cui posizionare il centro del cerchio infuocato è minore della precedente: bisogna spostare il cerchio di $\Delta h_3 = |h_3 - h_3'| = 10.0$ cm verso il basso se si vuole assistere ad uno spettacolo ben riuscito.

Soluzione esercizio I.2

1. Immediatamente prima dell'urto la sbarra è ferma e l'unico contributo al momento angolare sarà dato dalla massa m che, avendo percorso un tratto h di moto uniformemente accelerato, con accelerazione costante g, ha assunto una velocità $v = \sqrt{2gh}$. Scelto positivo il verso entrante nel foglio e negativo quello uscente, il momento angolare sarà $L_0 = mvd = md\sqrt{2gh} = 1.82 \text{ kg m}^2/\text{s}$. L'urto è completamente anelastico e il sistema è soggetto ad un vincolo esterno nel perno in O (l'altra forza esterna, che teneva la sbarra orizzontale prima dell'urto, non agisce durante e dopo l'urto). Dunque non si conservano né l'energia meccanica né il momento lineare. Si conserva invece il momento angolare rispetto al polo O dove è posto il vincolo, dato che le forze peso agenti sulle masse $2m$ e m non sono impulsive e possono essere trascurate nell'urto.

2. Il momento d'inerzia totale è dato da quello della sbarra che ruota attorno al suo punto medio a cui è necessario sommare i contributi delle masse incastrate nella sbarra stessa. Si ottiene

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + 2m\frac{l^2}{4} + md^2 = 3.56 \text{ kg m}^2 . \tag{17}$$

3. Visto che il momento angolare del sistema si conserva è possibile porre $L = L_0$, dove L_0 è stato calcolato precedentemente. Inoltre, dato che la rotazione avviene attorno ad un asse principale d'inerzia, il vettore $\mathbf{L}$ è diretto lungo l'asse di rotazione e possiamo scrivere $L = I\omega$. Quindi

$$I\omega = md\sqrt{2gh} \tag{18}$$

da sui si ricava

$$\omega = \frac{md\sqrt{2gh}}{I} = 0.51 \text{ s}^{-1} \tag{19}$$

La direzione del vettore è quella perpendicolare al foglio con verso entrante (quindi positivo seguendo la convenzione qui adottata).

4. Dopo l'urto l'energia meccanica totale si conserva. Fissando lo zero dell'energia potenziale all'altezza del polo O, immediatamente dopo l'urto il sistema ha solo energia cinetica, e dunque

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 = 0.463 \text{ J} \,. \tag{20}$$

Nella posizione verticale l'energia meccanica sarebbe

$$E = \frac{1}{2} I\omega'^2 + 2mg\frac{l}{2} - mgd \,. \tag{21}$$

La condizione affinché la sbarra effettivamente raggiunga la posizione verticale è che la velocità ω' sia positiva o al più nulla. Dunque dev'essere

$$\frac{1}{2} I\omega^2 - 2mg\frac{l}{2} + mgd \geq 0 \,. \tag{22}$$

Ma essendo

$$2mg\frac{l}{2} - mgd = 12.26 \text{ J} \,, \tag{23}$$

si vede che la condizione non è soddisfatta e la sbarra non raggiunge la verticale.

5. L'equazione del moto dopo l'urto è quella per la rotazione di un sistema attorno ad un asse fisso: $dL/dt = \tau$. I momenti delle forze esterne sono i momenti della forze peso associate alle due masse calcolati rispetto al punto O, mentre la forza peso della sbarra ha momento nullo. Dunque, se l'angolo θ è l'angolo misurato rispetto alla verticale (con la massa $2m$ nel punto in basso per $\theta = 0$), l'equazione del moto diventa:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m(l-d)g\sin\theta \,. \tag{24}$$

Questa è l'equazione del moto di un pendolo nel caso generale. Qui non si può utilizzare l'approssimazione di piccoli angoli perché la rotazione della sbarra avviene in un intervallo di angoli che supera $\pi/2$. Si tratterà quindi di un moto periodico, ma non armonico.

Soluzione esercizio II.1

a) Per raggiungere la temperatura di fusione T_f il blocco deve assorbire una quantità di calore pari in modulo a

$$Q_1 = mc(T_f - T_A) \,.$$

Il serbatoio fornisce tale calore in un tempo $t_1 = 600$ s, in modo che

$$Q_1 = Pt_1 = mc(T_f - T_A) \,,$$

da cui si ottiene

$$T_f = T_A + \frac{Pt_1}{mc} = 600.4 \text{ K} .$$

b) La fusione del blocco richiede l'assorbimento di un calore

$$Q_2 = \lambda_f m$$

che viene fornito in un tempo $t_2 = 300$ s. Quindi

$$Q_2 = Pt_2 = \lambda_f m$$

da cui

$$\lambda_f = \frac{Pt_2}{m} = 1.25 \times 10^5 \text{ J/Kg} .$$

Si noti bene che Q_2 *non* è dato da $P(t_1 + t_2)$, perchè la fase di fusione dura solo $t_2 = 300s$.

c) Per il calcolo dell'entropia, distinguiamo due processi:

1) riscaldamento del blocco:

$$\Delta S_1 = \int_{T_A}^{T_f} \frac{mc\, dT}{T} = mc \log \frac{T_f}{T_A} = 5793 \text{ J/K}$$

2) fusione del blocco

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda_F}{T_f} = 2088 \text{ J/K}$$

La variazione di entropia è la somma delle due: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 7881$ J/K.

d) A contatto con l'ambiente il metallo solidifica nuovamente e torna alla temperatura di partenza. La variazione totale di entropia del metallo, dopo aver riequilibrato con l'ambiente è nulla, in quanto lo stato iniziale e finale sono identici e l'entropia è una funzione di stato.

e) Dato che la variazione di entropia del metallo è nulla, la variazione di entropia dell'universo è data dalla somma dei soli contributi dell'ambiente a temperatura T_A e della sorgente a temperatura T_f. Quindi

$$\Delta S_u = \frac{-Q_0}{T_f} + \frac{Q_0}{T_A},$$

dove $Q_0 = P(t_1 + t_2) = 3.8 \times 10^6 J$ è il calore totale ceduto dalla sorgente e assorbito dall'ambiente nel processo complessivo. Si ha quindi $\Delta S_u = 6.33 \times 10^3$ J/K. La variazione di entropia dell'universo è positiva e il processo è irreversibile.

Soluzione esercizio II.2

a) Si tratta di sostituire i valori numerici nelle espressioni assegnate e fare qualche cambio di unità di misura. Si ottiene il volume molare critico

$$v_c = 3b = 3 \times 0.0427 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{mol} = 1.281 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

e la pressione critica

$$P_c = \frac{a}{3v_c^2} = \frac{3.64 \times 10^{-6} \times 1.013 \times 10^5}{3 \times (1.281)^2 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = 7.49 \times 10^6 \text{ Pa} .$$

b) Sostituendo le espressioni di P_c e v_c nell'equazione di stato si ottiene

$$RT = \frac{8}{27}\frac{a}{b} = \frac{8}{3} v_c P_c$$

da cui, inserendo i valori numerici, si ottiene

$$T = \frac{8 \times 1.281 \times 10^{-4} \times 7.48 \times 10^6}{3 \times 8.314} \text{ K} = 307.7 \text{ K} .$$

c) Essendo un sistema idrostatico ed essendo la trasformazione quasistatica, il lavoro è dato da

$$\begin{aligned} W &= \int_{v_1}^{v_2} P dv = \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) dv \\ &= RT \log \frac{v_2 - b}{v_1 - b} + a \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \right) = 1658 \text{ J} . \end{aligned} \qquad (1)$$

in approssimazione di gas ideale si avrebbe invece

$$W_{\text{ideale}} = RT \log \frac{v_2}{v_1} = 1671 \text{ J} .$$

La differenza è molto piccola, dell'ordine dello 0.8%. In effetti il volume molare del gas durante tutta la trasformazione è molto più grande del co-volume, $v >> b$, e quindi il gas è effettivamente rarefatto. Inoltre, anche la correzione alla pressione, $a/v^2 \sim 10^{-2}$ atm, è molto piccola rispetto alla

pressione $\sim RT/v$ che è dell'ordine di 1 o 2 atmosfere circa. In effetti si poteva sviluppare l'espressione del lavoro considerando b/v come un parametro piccolo:

$$\begin{aligned} W &= RT \log \frac{v_2[1-(b/v_2)]}{v_1[1-(b/v_1)]} + a\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2}\right) \\ &= RT\{\log \frac{v_2}{v_1} + \log[1-(b/v_2)] - \log[1-(b/v_1)]\} - a\left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2}\right) \\ &\simeq RT[\log \frac{v_2}{v_1} - (b/v_2) + (b/v_1)] - a\left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2}\right) \\ &= W_{\text{ideale}} + (RTb - a)\left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

e il termine a destra risulta piccolo e negativo, ed è uguale alla differenza tra i due valori calcolati precedentemente a meno di correzioni di ordine superiore.

d) Assumendo che la variazione di energia interna lungo un'isoterma sia trascurabile, il primo principio della termodinamica ci permette di identificare il calore con il lavoro e scrivere la variazione di entropia nella forma

$$\Delta S = \int \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} = \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{\delta W}{T}\right)_{rev} = \frac{1}{T} \int_{v_1}^{v_2} \delta W = W/T$$

per cui basta dividere per T i risultati ottenuti al punto precedente. Si ottiene $\Delta S = 5.717$ J/K per il gas reale e $\Delta S = 5.763$ J/K se il gas fosse ideale.