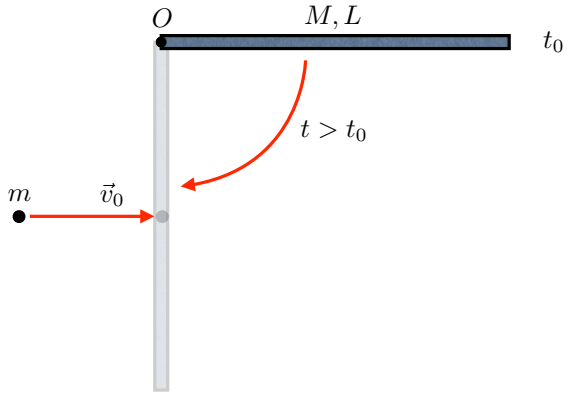
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2011-2012, 6 febbraio 2012

Esercizio I.1



Jigen si sta allenando al tiro al bersaglio su oggetti in movimento. Uno dei suoi obiettivi è un'asta sottile di massa $M = 900$ g, densità uniforme e lunghezza $L = 50$ cm. L'asta è vincolata in un suo estremo O attorno cui può ruotare liberamente senza attriti e all'istante t_0 si trova in posizione orizzontale come in figura. Per $t > t_0$ l'asta viene lasciata libera di muoversi e Jigen inizia il suo allenamento.

1. Calcolare la velocità angolare dell'asta quando essa raggiunge la posizione verticale.

Jigen spara un proiettile (approssimabile ad un punto materiale di massa $m = 19$ g) che raggiunge l'asta con velocità orizzontale $v_0 = 410$ m/s e la colpisce nell'istante in cui essa si trova in posizione verticale. L'urto è perfettamente anaelastico e il proiettile si conficca nell'asta esattamente a metà della sua lunghezza.

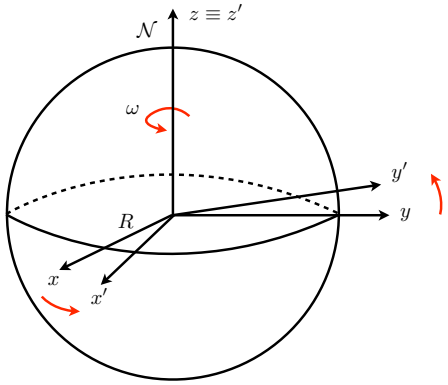
2. Calcolare il momento di inerzia del sistema asta + proiettile rispetto al polo O. Qual è la variazione percentuale del momento di inerzia prima e dopo l'urto?

3. Qual è la velocità angolare del nuovo sistema subito dopo l'urto? A parità di v_0, quale massa avrebbe dovuto avere il proiettile per far sì che il sistema dopo l'urto restasse fermo?

4. Calcolare la variazione di energia cinetica durante l'urto.

5. Calcolare la velocità angolare del sistema asta + proiettile a seguito di una rotazione di 180° a partire dal momento dell'urto.

Esercizio I.2



Un'astronave si reca sull'asteroide 31 Euphrosyne nella fascia tra Marte e Giove. Assumiamo che l'asteroide sia perfettamente sferico e omogeneo. Il suo raggio è $R = 128$ km, la densità $\rho = 6,6\ g/cm^3$, e il periodo di rotazione $T = 5.5$ ore. Essendo così piccolo non c'è nessuna atmosfera. L'astronave atterra al polo Nord e un astronauta di massa $m = 70$ km sbarca per effettuare alcuni esperimenti utilizzando i sistemi di riferimento rappresentati in figura: quello non accentato sia inerziale, cioé solidale con le stelle fisse, mentre quello accentato sia in rotazione, solidale all'asteroide.

1. Determinare modulo, direzione e verso del vettore velocità angolare della rotazione dell'asteroide nei sistemi di riferimento della figura.

2. Calcolare la massa M dell'asteroide e l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ sulla sua superficie, sapendo che $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{Kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.

3. Quanto vale la forza peso $\vec{P}$ dell'astronauta nel sistema accentato al polo Nord? Motivare la risposta.

L'astronauta si reca ora all'equatore dell'asteroide.

4. Calcolare l'accelerazione centrifuga nel sistema accentato. Quanto vale ora $\vec{P}$ misurata dall'astronauta?

Si supponga che l'astronauta lanci un sasso imprimendo una velocità iniziale $\vec{v}_0$ nella direzione tangenziale all'equatore.

5. Calcolare l'accelerazione di Coriolis a cui è soggetto il sasso. In che verso (ovest o est) deve essere diretta $\vec{v}_0$ affinché l'accelerazione verticale $\vec{a'}$ aumenti?

Conclusi tutti gli esperimenti, la missione è pronta per ripartire alla volta della Terra.

6. Qual'è la velocità di fuga $\vec{v}_f$ dall'asteroide?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1
Due moli di gas ideale biatomico si trovano in un cilindro con pistone a temperatura iniziale $t = 31.3°\mathrm{C}$ e volume iniziale $V = 5$ litri. Si eseguono nell'ordine le seguenti trasformazioni quasistatiche: 1) si espande il gas a temperatura costante fino a duplicare il volume; 2) si raffredda il gas a volume costante fino ad una pressione di 3 atm; 3) si comprime il gas a temperatura costante fino al volume iniziale; 4) si riscalda a volume costante fino a riportare il gas allo stato iniziale.
Dopo aver disegnato il diagramma P-V del ciclo, si calcoli il calore scambiato, il lavoro eseguito e la variazione di energia interna per ciascuna trasformazione e per il ciclo completo. Si calcoli il rendimento della macchina termica che opera con questo ciclo. Si disegni il diagramma T-S.
[si usi $R = 0.08206$ litri atm / (mol K), oppure $R = 8.314$ J/(mol K)]

Esercizio II.2
Un chilogrammo d'acqua viene tolto dal frigorifero, a temperatura interna costante $t_f = 2°\mathrm{C}$, e collocato in una stanza a temperatura $t_s = 18°\mathrm{C}$. Dopo un certo tempo l'acqua raggiunge la stessa temperatura della stanza. Si calcoli il calore scambiato tra la stanza e l'acqua e la variazione di entropia dell'acqua, della stanza e dell'universo (trascurando effetti di evaporazione). Si consideri poi il caso in cui l'acqua estratta dal frigorifero venga dapprima messa in un ripostiglio a temperatura $t_r < t_s$, dove raggiunge l'equilibrio termico, e successivamente nella stanza a temperatura t_s. Si esprima la variazione di entropia dell'universo in funzione di t_r. Qual è la variazione di entropia minima? E per quale valore di t_r si ottiene?

Soluzione esercizio I.1

1. Sul sistema agiscono solo forze conservative (la forza peso dell'asta e la reazione vincolare del perno) per cui si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica. Fissando (ad esempio) lo zero di energia potenziale all'altezza del perno, si ha che per $t = t_0$ il sistema ha energia iniziale nulla $E_i = 0$ (l'asta è inizialmente ferma e il suo centro di massa si trova alla stessa altezza del perno). Quando l'asta raggiunge la posizione verticale si ha invece:

$$E_f = \frac{1}{2} I\omega^2 - Mg\frac{L}{2}\,, \tag{1}$$

dove $I = \frac{1}{3}ML^2$ è il momento di inerzia dell'asta calcolato rispetto al polo O e $-\frac{L}{2}$ è l'altezza del centro di massa dell'asta rispetto allo zero di energia di potenziale scelto. La conservazione dell'energia meccanica implica $E_i = E_f$, da cui si ottiene

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 7.67 \text{ rad/s}\,. \tag{2}$$

2. Il momento di inerzia dell'asta calcolato rispetto ad O è

$$I = \frac{1}{3}ML^2 = 0.075 \text{ Kg m}^2\,. \tag{3}$$

Grazie alla linearità dell'integrale che definisce il momento di inerzia, per calcolare il momento di inerzia del sistema asta + proiettile è sufficiente sommare i momenti di inerzia dell'asta e del punto materiale calcolati rispetto al polo O:

$$I' = \frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{12}(4M + 3m) = 0.0762 \text{ Kg m}^2\,. \tag{4}$$

La variazione è dunque

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I' - I}{I} = 0.016\,, \tag{5}$$

che corrisponde ad una variazione percentuale di 1.6%.

3. L'urto fra proiettile e asta è perfettamente anaelastico per cui l'energia meccanica non si conserva. Si può ancora però utilizzare la conservazione del momento angolare. Fissando come positivi i momenti angolari con verso uscente dal foglio, si ha:

$$\begin{cases} L_{prima} &= mv_0\dfrac{L}{2} - I\omega \\ L_{dopo} &= I'\omega' \end{cases} \tag{6}$$

e dalla condizione $L_{dopo} = L_{prima}$ segue che

$$\omega' = \frac{mv_0\frac{L}{2} - I\omega}{I'} = \frac{2\left(3mv_0 - 2M\sqrt{3gL}\right)}{L\left(4M+3m\right)} = 18.01 \text{ rad/s}\,. \quad (7)$$

Affinché il sistema dopo l'urto rimanga fermo è sufficiente che $\omega' = 0$, da cui si ricava che, a parità di v_0, la massa del proiettile deve essere

$$m' = \frac{2M}{3v_0}\sqrt{3gL} = 5.61 \text{ g}\,. \quad (8)$$

4. La variazione di energia cinetica durante l'urto è semplicemente $\Delta E_K = E_K^{dopo} - E_K^{prima}$ con

$$\begin{cases} E_K^{prima} &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ E_K^{dopo} &= \frac{1}{2}I'\omega'^2 \end{cases} \quad (9)$$

da cui si ha

$$\Delta E = -\frac{Mm}{2(4M+3m)}\left(4v_0\sqrt{3gL} + 4v_0^2 + 3gL\right) = -1586.79 \text{ J}\,. \quad (10)$$

Notare che la variazione di energia cinetica è negativa: parte dell'energia iniziale viene dissipata durante l'urto.

5. Per calcolare la velocità angolare del sistema asta + proiettile a seguito di una rotazione di 180° si può usare ancora una volta la conservazione dell'energia meccanica, prendendo come energia iniziale quella subito dopo l'urto e come finale quella a fine rotazione. Ponendo lo zero di energia potenziale nel baricentro del nuovo sistema al momento dell'urto (ossia dove si conficca il proiettile, in $L/2$), si ha

$$\begin{cases} E_0 &= \frac{1}{2}I'\omega'^2 \\ E_{180} &= \frac{1}{2}I'\omega''^2 + (M+m)gL \end{cases} \quad (11)$$

dove $(M+m)gL$ è l'energia potenziale del centro di massa del sistema asta + proiettile rispetto allo zero scelto. Segue dunque

$$\begin{aligned} \omega'' &= \sqrt{\omega'^2 - 2\frac{M+m}{I'}gL} = \sqrt{\omega'^2 - \frac{24}{L}\frac{M+m}{4M+3m}g} \\ &= 14.36 \text{ rad/s}\,. \end{aligned} \quad (12)$$

Come è naturale aspettarsi, la velocità angolare dell'asta dopo la rotazione risulta inferiore a quella calcolata subito dopo l'urto a causa della variazione di energia potenziale necessaria alzare il centro di massa del sistema di un'altezza L. Tala variazione diminusice l'energia cinetica del sistema asta + proiettile rallentando il moto di rotazione.

Soluzione esercizio I.2

1. Nel sistema inerziale il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ è diretto lungo l'asse z e punta verso l'alto (regola della mano destra). Il modulo vale

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3.17 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{13}$$

   Nel sistema non-inerziale in rotazione, l'asteroide è fermo e la sua velocità angolare è nulla.

2. Visto che l'asteroide è sferico, per trovarne la massa conoscendo la densità è sufficiente moltiplicare la densità per il volume della sfera. Si ottiene

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 5.80 \times 10^{19}\ \mathrm{Kg}\,. \tag{14}$$

   Fissata la direzione radiale con verso positivo uscente dalla sfera, l'accelerazione di gravità si ottiene calcolando la forza che una qualsiasi massa m sente sulla superficie, cioè

$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{r} = -mg\hat{r} \tag{15}$$

   da cui

$$g = G\frac{M}{R^2} = 0.24\ \mathrm{m/s}^2\,. \tag{16}$$

3. È necessario notare che il sistema accelerato non è inerziale. In generale, la seconda legge della dinamica può essere utilizzata per descrivere il moto di una massa m a patto di modificare l'accelerazione, la quale è legata a quella nel sistema inerziale tramite l'equazione

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{\mathrm{cor}} - \vec{a}_{\mathrm{centr}} = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) \tag{17}$$

   essendo $\vec{a}_{\mathrm{cor}}$ l'accelerazione di Coriolis, $\vec{a}_{\mathrm{centr}}$ l'accelerazione centrifuga, e $\vec{r}_P$ il vettore distanza tra il centro dell'asteroide e il punto in cui si trova l'astronauta. L'accelerazione di Coriolis è nulla se l'astronauta è fermo sulla superficie dell'asteroide. Al polo Nord anche l'accelerazione centrifuga è nulla, dato che il vettore $\vec{r}_P$ è parallelo a $\vec{\omega}$ e il prodotto vettoriale è nullo. Se ne conclude che stando al polo Nord, $\vec{a}\,' = \vec{a}$, e il peso dell'astronauta è

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{18}$$

   in modulo

$$P = 16.5\ \mathrm{N}\,. \tag{19}$$

4. All'equatore il vettore $\vec{r}_P$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$ e l'accelerazione centrifuga è radiale e diversa da zero. Il prodotto vettoriale dà

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) = -\omega^2 R \, \hat{r} \, . \tag{20}$$

Il modulo vale

$$\omega^2 R = 1.2 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \, . \tag{21}$$

A questa accelerazione si può far corrispondere una forza apparente centrifuga pari a $m\vec{a}_{\text{centr}}$ che si aggiunge vettorialmente alla forza gravitazionale. Il peso dell'astronauta misurato all'equatore sarà quindi

$$P = m(g - \omega^2 R) = 15.6 \text{ N} \, . \tag{22}$$

5. Fissata la direzione tangenziale all'equatore con verso positivo verso Ovest, l'accelerazione di Coriolis del sasso è

$$a_{\text{cor}} = \pm 2\omega v_0 \tag{23}$$

con il segno positivo se la velocità è verso ovest e negativo se verso est. Dalla (17) si vede che affinché il peso del sasso aumenti, l'accelerazione di gravità e quella di Coriolis devono essere discordi, e quindi la velocità iniziale deve essere diretta ad Ovest.

6. La velocità di fuga è, per definizione, la velocità minima con cui un corpo deve essere lanciato dalla superficie dell'asteroide per arrivare a distanza infinita. Poiché con le forze in gioco l'energia meccanica si conserva, si può imporre $E(R) = E_\infty = 0$, da cui

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \tag{24}$$

ovvero

$$v_f = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} = 246 \text{ m/s} \, . \tag{25}$$

Si noti che questa è la velocità minima nel sistema inerziale, calcolata assumendo che l'astronave sia inizialmente ferma in tale sistema di riferimento. Dato che l'asteroide ruota, se l'astronave parte dall'equatore, essendo inizialmente solidale con l'asteroide, essa possiede già una velocità iniziale tangenziale. La velocità minima di lancio, misurata relativamente alla superficie dell'asteroide, potrà dunque essere inferiore alla velocità di fuga scritta sopra.

Soluzione esercizio II.1

Per prima cosa bisogna convertire la temperatura iniziale da scala Celsius a scala Kelvin. Chiamiamo A lo stato iniziale. La temperatura in A vale $T_A = (273.15 + 31.3)\text{K} = 304.45$ K. La pressione in A si trova usando l'equazione di stato dei gas ideali:

$$P_A = nRT_A/V_A = [2 \times 0.08206 \times 304.45/5]\text{atm} = 10\text{atm}\,.$$

Se B è lo stato al termine della prima trasformazione, la pressione in B si trova sapendo che PV è costante in un'isoterma:

$$P_B = P_A V_A/V_B = P_A/2 = 5\text{atm}\,.$$

Sappiamo anche che $T_B = T_A$ e $V_B = 2V_A = 10$ l. Il testo dell'esercizio dice anche che al termine della trasformazione isocora il gas si trova a pressione $P_C = 3$ atm. La sua temperatura può essere calcolata dall'equazione di stato:

$$T_C = P_C V_C/(nR) = P_C V_B/(nR) = [3 \times 10/(2 \times 0.08206)]\text{K} = 182.8\text{K}\,.$$

Infine, possiamo calcolare la pressione al termine della seconda isoterma in questo modo:

$$P_D = P_C V_C/V_D = 2P_C = 6\text{atm}\,,$$

Con questi dati si riesce a disegnare in modo corretto il diagramma P-V (si tratta di un ciclo ideale di Stirling).

Ora calcoliamo calore, lavoro e ΔU per ogni trasformazione.

AB, isoterma quasistatica:

$$\begin{aligned} \Delta U_{AB} &= 0 \\ Q_{AB} &= W_{AB} = nRT_A \log(V_B/V_A) = P_A V_A \log 2 = 3511\text{J}\,. \end{aligned}$$

BC, isocora quasistatica:

$$\begin{aligned} W_{BC} &= 0 \\ Q_{BC} &= \Delta U_{BC} = nc_v \Delta T = (5/2)nR(T_C - T_A) = -5057\text{J}\,. \end{aligned}$$

CD, isoterma quasistatica:

$$\begin{aligned} \Delta U_{CD} &= 0 \\ Q_{CD} &= W_{CD} = nRT_C \log(V_D/V_C) = -nRT_C \log 2 = -2107\text{J}\,. \end{aligned}$$

DA, isocora quasistatica:

$$\begin{aligned} W_{DA} &= 0 \\ Q_{DA} &= \Delta U_{DA} = nc_v \Delta T = (5/2)nR(T_A - T_D) = (5/2)nR(T_A - T_C) = 5057\text{J}\,. \end{aligned}$$

ABCD, ciclo intero:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ Q &= W = (3511 - 2107)\mathrm{J} = 1404\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

Il rendimento della macchina termica si calcola dalla definizione:

$$\eta = W/Q_{\text{assorbito}} = W/(Q_{AB} + Q_{DA}) = 1404/8568 = 0.164$$

Infine, per tracciare il diagramma T-S occorre calcolare le variazioni di entropia del gas nelle trasformazioni:

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= nR\log(V_B/V_A) = nR\log 2 = 11.53\,\mathrm{J/K} \\ \Delta S_{BC} &= nc_v\log(T_C/T_B) = (5/2)nR\log(T_C/T_A) = -21.2\,\mathrm{J/K} \\ \Delta S_{CD} &= nR\log(V_D/V_C) = nR\log(V_A/V_B) = -\Delta S_{AB} \\ \Delta S_{DA} &= nc_v\log(T_A/T_D) = nc_v\log(T_A/T_C) = -\Delta S_{BC} \end{aligned}$$

così che $\Delta S_{\text{tot}} = 0$ nel ciclo, come dev'essere.

Soluzione esercizio II.2

Anche in questo esercizio la prima cosa da fare è convertire le temperature dalla scala Celsius alla scala Kelvin. Le temperature t_f e t_s diventano $T_f = 275.15$ K e $T_s = 291.15$ K. Il calore scambiato tra la stanza e l'acqua è

$$|Q| = mc(T_s - T_f) = 1\mathrm{Kg} \times 1\mathrm{Kcal/(Kg\ K)} \times 16\mathrm{K} = 16\mathrm{Kcal} = 66.98\mathrm{KJ}\,.$$

La stanza cede questo calore senza variare il suo stato termodinamico (si comporta come un serbatoio ideale). La sua entropia quindi diminuisce di una quantità pari a

$$\Delta S_{\text{stanza}} = -|Q|/T_s = -230\,\mathrm{J/K}\,.$$

Per calcolare la variazione di entropia dell'acqua dobbiamo considerare un riscaldamento lento e reversibile che porti l'acqua dalla temperatura iniziale a quella finale tramite lo scambio di calori infinitesimi con serbatoi a temperatura mano a mano più alta. La variazione di entropia sarà dunque

$$\Delta S_{\text{acqua}} = \int \frac{\delta Q}{T} = mc\int \frac{\delta T}{T} == mc\log\frac{T_s}{T_f} = 236.6\,\mathrm{J/K}\,.$$

La variazione di entropia dell'universo è

$$\Delta S_{\text{universo}} = (236.6 - 230)\mathrm{J/K} = 6.6\,\mathrm{J/K}\,.$$

Nel caso in cui ci sia un passaggio intermedio da uno stato di equilibrio termico ad una temperatura T_r intermedia tra quella del frigorifero, T_f, e quella della stanza, T_s, la variazione di entropia dell'universo diventa:

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

dove ΔS_1 è la variazione associata alla prima fase (riscaldamento dell'acqua nel rispostiglio) e ΔS_2 è quella associata alla seconda fase (successivo riscaldamento dell'acqua nella stanza). Dunque, tenendo conto della variazione di entropia dell'ambiente e dell'acqua, si ha:

$$\Delta S_1 = mc \left[\log \frac{T_r}{T_f} - \frac{T_r - T_f}{T_r} \right]$$

e

$$\Delta S_2 = mc \left[\log \frac{T_s}{T_r} - \frac{T_s - T_r}{T_s} \right]$$

da cui

$$\Delta S_{\text{universo}} = mc \left[\log \frac{T_s}{T_f} - \frac{T_s - T_r}{T_s} - \frac{T_r - T_f}{T_r} \right]$$

Il problema chiede di calcolare il minimo. A tale scopo basta imporre che la derivata dell'espressione in parentesi quadra rispetto alla variabile T_r si annulli. Si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{T_s} - \frac{T_f}{T_r^2} = 0$$

da cui

$$T_r = \sqrt{T_f T_s} = 283\,\text{K}\,,$$

ovvero

$$t_r = 9.85^\circ\text{C}\,.$$

La variazione di entropia corrispondente è

$$\Delta S_{\text{universo}} = 3.3\,\text{J/K}\,.$$