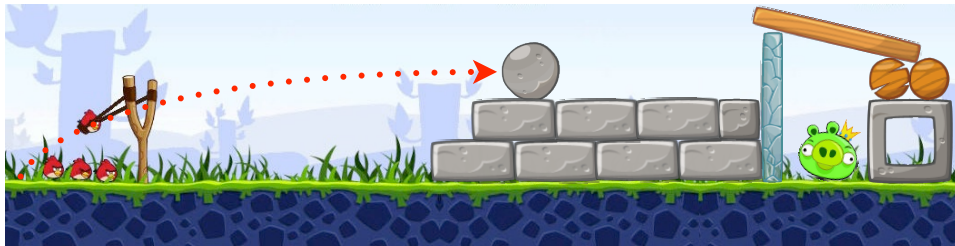


Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2011-2012, 8 giugno 2012

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

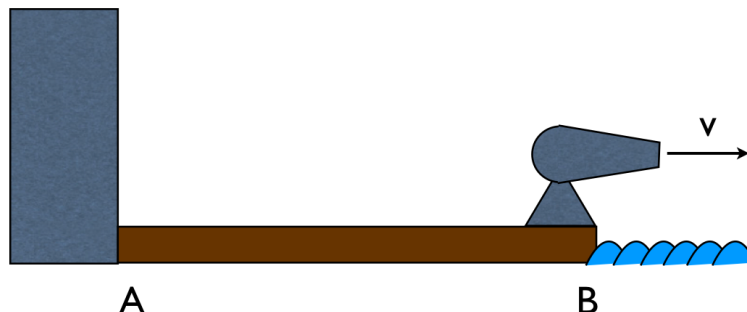
Esercizio I.1



In una partita di Angry Birds, Big Red, l'uccellino rosso (approssimabile con un punto materiale di massa $m = 100$ g), viene lanciato con la fionda e colpisce una sfera di pietra di massa $M = 1$ kg e raggio $R = 15$ cm. La sfera poggia su uno zoccolo di pietra la cui superficie superiore orizzontale si trova ad un'altezza che supera di $h = 25$ cm la quota a cui Big Red si stacca dalla fionda.

- a) Indicando con θ l'angolo di lancio del volatile e con v_0 la velocità iniziale impressa dall'elastico al momento dello stacco, scrivere le equazioni del moto per le posizioni e le velocità di Big Red fino al momento dell'urto.
- b) Considerando $\theta = \pi/6$, quali devono essere v_0 e la distanza orizzontale d tra lo stacco e l'impatto, affinché l'uccello arrivi a colpire la sfera esattamente in direzione del suo centro di massa e con velocità v puramente orizzontale? Quanto vale il modulo di v ?
- c) Big Red colpisca la sfera in modo perfettamente elastico. L'attrito con il piano d'appoggio sia tale da far rotolare la sfera senza strisciare. Qual è l'energia cinetica della sfera subito dopo l'urto?
- d) Cosa succede a Big Red dopo l'urto? Calcolare modulo e verso di v' e descrivere *qualitativamente* il moto. Cosa sarebbe accaduto per $m \geq \frac{7}{5}M$?
- e) Supponendo che il pilastro di vetro possa resistere ad una sollecitazione trasversale massima corrispondente ad un impulso di 1 kg m/s, la palla riesce a sfondare la struttura e uccidere King Pig?

Esercizio I.2



Su una chiatta, ormeggiata nel punto A ad una banchina, è installato un cannoncino nel punto B all'estremità opposta ad A, libero di strisciare sulla superficie. La distanza $\overline{AB} = L = 10$ m, la chiatta ha massa $m_1 = 1000$ kg e il cannoncino $M = 500$ kg. All'interno dello stesso una molla di costante elastica $k = 8 \times 10^3$ N/m fornisce la propulsione ad un proiettile di massa $m_2 = 5$ kg.

a) Indicando con $z = 60$ cm la compressione iniziale della molla (cioè la distanza dalla posizione di equilibrio), si determini la velocità v del proiettile sparato ad alzo zero verso destra (si veda la figura) supponendo che il rilassamento della molla sia istantaneo. Si presupponga che la chiatta sia ormeggiata al molo e che quindi non si possa muovere.

b) Nelle stesse ipotesi, quanto deve valere il coefficiente di attrito μ affinché il cannoncino si fermi nel punto A della chiatta?

c) Si consideri ora che la chiatta sia priva di ormeggi e sia libera di scivolare senza attrito sull'acqua dal momento in cui il cannoncino ha esploso il colpo. Qual è la distanza tra il punto A e il molo nel momento in cui il cannoncino si ferma in A? Si trascuri la massa del proiettile e si approssimi il cannoncino ad un punto materiale.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1

Si assuma che esista un ipotetico gas la cui energia interna dipende solo dalla temperatura tramite la relazione $U = U(T) = \alpha T^2$, con α costante positiva, in modo che $dU = 2\alpha T dT$. Inoltre l'equazione di stato del gas sia $PV = \beta T^2$, dove β è un'altra costante positiva.

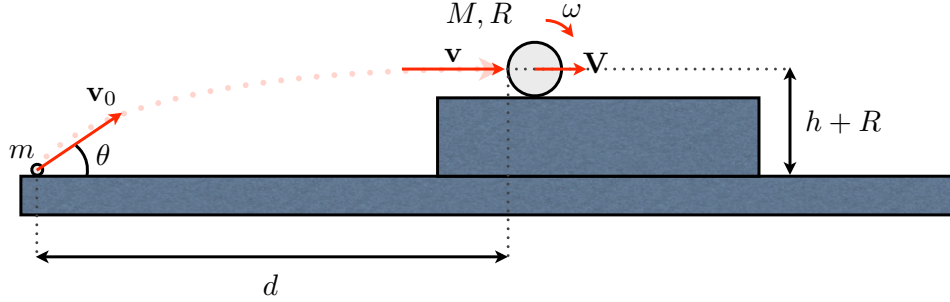
- a) Usando il primo principio della termodinamica in forma differenziale e l'equazione di stato, si dimostri che per trasformazioni adiabatiche reversibili vale $T^2 V^{\beta/\alpha} = \text{costante}$, ovvero $PV^\gamma = \text{costante}$, con $\gamma = \beta/\alpha + 1$.
- b) Qual è l'espressione per il lavoro fatto ed il calore scambiato dal gas in una trasformazione adiabatica reversibile in funzione della temperatura iniziale T_1 e finale T_2 ? E qual è invece l'espressione per una trasformazione isoterma reversibile in funzione del volume iniziale V_1 e finale V_2 ?
- c) Rappresentare qualitativamente in un diagramma P - V un ciclo di Carnot che lavora tra due serbatoi a temperatura T_1 e $T_2 < T_1$.
- d) Determinare il rendimento del ciclo di Carnot eseguito con questo gas ipotetico e confrontarlo con quello di un ciclo di Carnot di un gas ideale standard ($U \propto T$; $PV = nRT$) che opera con gli stessi serbatoi e mostrare che il gas ipotetico viola il II principio della termodinamica.

Esercizio II.2

Sapendo che l'olio d'oliva ha calore specifico $2.09 \text{ KJ}/(\text{Kg K})$, densità 0.92 Kg/l e temperatura di ebollizione 300°C , si calcoli la variazione di entropia dell'universo in ciascuno dei seguenti processi.

- a) In un recipiente adiabatico si aggiungano tre decilitri d'olio d'oliva, a 10°C , a 7 decilitri di acqua, a 30°C , e si attenda l'equilibrio termico.
- b) In un recipiente a contatto termico con l'ambiente a temperatura costante di 30°C sono contenuti 100 l di olio d'oliva. La profondità del liquido sia 50 cm. Un litro d'acqua, alla stessa temperatura, viene inizialmente posizionato sopra la superficie dell'olio. Si consideri il processo nel quale l'acqua, a causa della maggiore densità e alla non miscibilità con l'olio, scende nel recipiente fino a posizionarsi sul fondo.
- c) Una padella per frittura contiene 2 litri di olio d'oliva alla temperatura ambiente di 20°C . L'olio viene scaldato fino all'istante d'inizio dell'ebollizione da una sorgente di calore, assimilabile ad un termostato a temperatura 1000°C che ha un'efficienza del 80%, ovvero tale per cui l'80% del calore viene effettivamente fornito all'olio che si scalda e il resto all'ambiente a temperatura costante. Si trascuri la capacità termica della padella.

Soluzione esercizio I.1



a) Scegliamo un sistema di riferimento Oxy con origine O nel punto in cui Big Red si stacca dalla fionda con velocità v_0 e angolo di lancio θ (misurato rispetto all'asse orizzontale). Scomponiamo la velocità v_0 nelle sue componenti $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin \theta$. Trascurando l'attrito con l'aria, l'unica forza agente è la forza peso. La traiettoria è parabolica e possiamo quindi scrivere le equazioni per le posizioni e per le velocità in questo modo:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta)t \\ y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \theta \\ v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt \end{cases} \quad (1)$$

b) Per rispondere a questo quesito si può procedere in vari modi. Il primo metodo consiste nel ricordarsi le caratteristiche principali del problema della gittata di oggetti in campo di gravità. La condizione cercata equivale a imporre che l'urto avvenga alla quota massima raggiunta da Big Red nel suo moto parabolico. Tale quota può essere ottenuta calcolando dappima il tempo di volo t_V tale che $y(t_V) = 0$ nella seconda equazione in alto. Si ottiene $t_V = 2v_0 \sin(\theta)/g$. Poi, usando la stessa equazione, possiamo calcolare la quota massima come la quota raggiunta a metà del tempo di volo: $h + R = y(t_V/2)$. Si ottiene

$$h + R = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (2)$$

ovvero

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(h + R)g}{\sin^2 \theta}} \quad (3)$$

che per $\theta = \pi/6$ dà:

$$v_0 = \sqrt{8(h + R)g} = 5.60 \text{ m/s} . \quad (4)$$

La distanza d è pari a metà gittata, e può essere calcolata come $d = x(t_V/2)$ nella prima equazione in alto. Si ottiene

$$d = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = 2(h + R) \cot \theta \quad (5)$$

da cui, inserendo i valori numerici, si ottiene

$$d = 2\sqrt{3}(h + R) = 1.39 \text{ m} . \quad (6)$$

Per quanto riguarda la velocità orizzontale v al momento dell'impatto, basta notare che la componente orizzontale della velocità rimane costante, così che

$$v = v_0 \cos \theta = \sqrt{2(h + R)g} \cot(\theta) = \sqrt{6(h + R)g} = 4.85 \text{ m/s} . \quad (7)$$

Un secondo metodo è una variante del precedente, dove la velocità iniziale è dedotta dalla conservazione dell'energia meccanica. L'energia al momento dello stacco deve essere uguale a quella al momento dell'impatto. Quindi, dato che la velocità orizzontale è costante e quella verticale decresce da v_{0y} a 0 per effetto della gravità, avremo

$$\frac{1}{2}mv_{0x}^2 + \frac{1}{2}mv_{0y}^2 = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + mg(h + R) , \quad (8)$$

da cui, ricordando che $v_{0y} = v_0 \sin \theta$, si ottiene direttamente la (3), senza passare dal calcolo del tempo di volo. Il resto è come prima.

Infine un terzo metodo consiste nella soluzione algebrica completa dei due sistemi di equazioni iniziali con le condizioni che, nell'istante dell'impatto t_{imp} , l'altezza raggiunta dal volatile sia $y(t_{imp}) = h + R$, la distanza orizzontale sia $x(t_{imp}) = d$ e che non vi sia componente verticale della velocità $v_y(t_{imp}) = 0$:

$$\begin{cases} x(t_{imp}) = d = v_0 \cos(\theta)t_{imp} \\ y(t_{imp}) = h + R = v_0 \sin(\theta)t_{imp} - \frac{1}{2}gt_{imp}^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} v_x(t_{imp}) \equiv v = v_0 \cos \theta \\ v_y(t_{imp}) = 0 = v_0 \sin \theta - gt_{imp} \end{cases} \quad (10)$$

Dal sistema (9) possiamo ricavare

$$\begin{cases} t_{imp} = \frac{d}{v_0 \cos(\theta)} \\ h + R = d \tan(\theta) - \frac{1}{2}g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (11)$$

e dalla seconda del sistema (10) abbiamo

$$v_0 \sin(\theta) = g \frac{d}{v_0 \cos(\theta)} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g} \quad (12)$$

Sostituendo la (12) nella seconda del sistema (11) si ottiene

$$h + R = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (13)$$

che è identica alla (2), e tutti gli altri risultati seguono come prima.

c) Il problema dell'urto si risolve applicando leggi di conservazione. Al fine di verificare quali grandezze si conservano, occorre considerare il ruolo della forza di attrito tra la sfera e lo zoccolo di pietra. Innanzitutto questa forza esterna fornisce un impulso non trascurabile nell'urto, tale da impedire la conservazione della quantità di moto (l'unica eccezione sarebbe il caso di urto nel punto di percussione della sfera, che però non si trova all'altezza del centro). Si può invece considerare la conservazione del momento angolare, purché si prenda come polo il punto A di contatto tra la sfera e il pavimento, in modo da annullare il momento della forza esterna. Infine, dato che il punto di applicazione della forza esterna è istantaneamente fermo e l'urto è elastico, si conserva l'energia cinetica. Le due leggi di conservazione dell'energia cinetica e del momento angolare sono

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ mvR = mv'R + I_A\omega \end{cases} \quad (14)$$

dove V e ω sono la velocità del centro di massa e la velocità angolare della sfera dopo l'urto, I è il momento di inerzia della sfera rispetto al suo centro, $I = \frac{2}{5}MR^2$, mentre I_A è il momento di inerzia della sfera calcolato rispetto al polo A: $I_A = I + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$.

Imponendo la condizione di puro rotolamento $V = R\omega$, dalla seconda equazione si può ricavare v'

$$v' = v - \frac{7M}{5m}V \quad (15)$$

da cui, sostituendo nella prima si ha:

$$\begin{aligned} V &= \frac{10m}{5m + 7M}v \Rightarrow V = 0.65 \text{ m/s} \\ \omega &= \frac{10m}{5m + 7M} \frac{v}{R} \Rightarrow \omega = 4.31 \text{ rad/s.} \end{aligned} \quad (16)$$

L'energia cinetica della sfera dopo l'urto è quindi

$$\begin{aligned} E_{kin}^{sfera} &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10} \left(\frac{10m}{5m + 7M} \right)^2 Mv^2 \\ &\Rightarrow E_{kin}^{sfera} = 0.29 \text{ J} \end{aligned} \quad (17)$$

d) Sostituendo la (16) nella (15) è possibile ricavare la velocità di Big Red dopo l'urto:

$$v' = \frac{5m - 7M}{5m + 7M}v \Rightarrow v' = -4.21 \text{ m/s} \quad (18)$$

Con le masse date, il verso di v' è opposto a quello di v : dopo l'urto, Big Red torna indietro in direzione della fionda con un moto parabolico verso il basso, partendo da un'altezza $h + R$ con velocità iniziale orizzontale v' verso sinistra. Essendo $|v'| < v$, Big Red non potrà in nessun caso raggiungere il punto di partenza. Nel caso limite $m = \frac{7}{5}M$ si avrebbe $v' = 0$: il volatile si troverebbe fermo dopo l'urto e quindi cadrebbe verticalmente di moto uniformemente accelerato verso il basso da un'altezza $h + R$ ad un'altezza h . Se fosse $m > \frac{7}{5}M$, il verso di v' risulterebbe concorde con quello di v , per cui il volatile si muoverebbe con moto parabolico verso destra seguendo la sfera (si ha comunque $v' < V$), passando da un'altezza $h + R$ ad un'altezza h .

e) Nel tratto che separa la sfera dal pilastro di vetro è presente una forza di attrito costante. Tale forza agisce però sul punto di contatto della sfera con il piano, il quale è istantaneamente fermo per la condizione di puro rotolamento. Si ha dunque che la forza di attrito non compie lavoro e che quindi l'energia meccanica si conserva. Dato che il centro di massa della sfera non subisce variazioni di quota, l'energia cinetica e quindi le velocità della sfera subito dopo l'urto si mantengono costanti fino all'urto con il pilastro. Dato che il testo non dà informazioni sul tipo di urto che avviene tra la sfera e il pilastro, la risposta non è univoca; consideriamo due possibili scenari:

1. La sfera urta contro il pilastro in modo perfettamente elastico, rimbalzando indietro con la stessa velocità V . Allora, per rimanere in piedi, il pilastro deve produrre un impulso in modulo uguale alla differenza di quantità di moto della sfera:

$$I = |\Delta \mathbf{p}| = 2MV = 2Mv \frac{10m}{5m + 7M} = 1.30 \text{ kg m/s} > I_{\max}. \quad (19)$$

La sfera riesce quindi a sfondare la struttura e King Pig viene ucciso. Il giocatore vince la partita!

2. La sfera urta in modo perfettamente anelastico trovandosi ferma dopo l'urto. Anche in questo caso il pilastro per rimanere in piedi deve produrre un impulso pari alla differenza di quantità di moto della sfera, che però stavolta è la metà di prima:

$$I = |\Delta \mathbf{p}| = MV = Mv \frac{10m}{5m + 7M} = 0.65 \text{ kg m/s} < I_{\max}. \quad (20)$$

In questo caso la palla non riesce a rompere la struttura e King Pig si salva.

Soluzione esercizio I.2

a) Il moto che ci interessa avviene solo in direzione orizzontale. Il problema è quindi unidimensionale. Durante la fase di sparo, la chiatta rimane ferma in quanto ormeggiata. Eventuali forze di attrito tra il cannoncino e la chiatta sono trascurabili nel breve istante del rilassamento della molla. Non essendovi altre forze esterne impulsive, possiamo imporre la conservazione dell'energia e della quantità di moto prima e dopo lo sparo:

$$\begin{cases} E_{k0} + U_0 = E_k + U \\ p_{0x} = p_x \end{cases} \quad (21)$$

L'energia cinetica iniziale è nulla, quella potenziale è data unicamente dalla compressione della molla. L'energia cinetica finale è data dalla somma dell'energia cinetica del cannoncino e del proiettile. Al contrario l'energia potenziale finale è nulla. La componente orizzontale iniziale della quantità di moto è nulla, mentre quella finale è data dalla somma vettoriale del termine del cannoncino e di quello opposto in verso del proiettile. Si ha quindi che

$$\begin{cases} \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \\ 0 = m_2v - MV \end{cases} \quad (22)$$

Risolvendo il sistema è possibile esprimere la velocità lungo x del proiettile in funzione della compressione z della molla:

$$v = \sqrt{\frac{kM}{m_2(m_2 + M)}} z = 23.88 \text{ m/s}. \quad (23)$$

b) Dopo aver esploso il colpo il cannoncino si muove verso sinistra strisciando sulla superficie della chiatta. Affinché si fermi nel punto A è necessario che tutta l'energia cinetica iniziale sia dissipata dall'attrito. Essendo l'attrito costante, il lavoro eseguito è $-\mu MgL$ e il teorema delle forze vive dà

$$\frac{1}{2}MV^2 = \mu MgL. \quad (24)$$

La velocità iniziale V del cannoncino si ricava dalla conservazione della quantità di moto nello sparo (seconda equazione del sistema in alto). Quindi

$$\mu = \frac{V^2}{2gL} = \frac{m_2^2}{2M^2gL}v^2 = 2.9 \times 10^{-4}. \quad (25)$$

c) La soluzione del quesito dipende dalle ipotesi che vengono considerate. Qui si suppone che la chiatta sia legata al molo durante l'esplosione del colpo e venga liberata subito dopo. In quell'istante il cannoncino ha una velocità iniziale V verso sinistra, mentre la chiatta è ferma. Il sistema chiatta +

cannoncino ha quindi un centro di massa in moto verso sinistra. Ma su di esso agisce una forza esterna data dalla reazione vincolare del molo. Infatti, la chiatta tenderebbe a muoversi verso sinistra, ma tale moto è impedito dalla presenza del molo, e in definitiva la distanza finale tra l'estremo A della chiatta e il molo rimane costantemente nulla, $\overline{OA} = 0$. In maniera del tutto equivalente si può ragionare in termini di forze e pensare che il moto del cannoncino sia frenato da una forza di attrito che ha verso da sinistra a destra, alla quale corrisponde per il terzo principio della dinamica una forza agente sulla chiatta uguale in modulo e direzione ma con verso opposto, da destra verso sinistra. Questa forza tende a mettere in accelerazione la chiatta verso sinistra, ma tale moto è ostacolato dal molo e la chiatta rimane ferma. Nella correzione dello scritto sono state valutate anche soluzioni alternative, che poggiavano su ipotesi diverse (ad esempio, che la chiatta potesse muoversi a sinistra parallelamente al molo a cui era agganciata di lato, oppure il caso in cui il cannoncino fosse vincolato alla chiatta nella fase di sparo, ecc.), che però richiedono calcoli più complicati.

Soluzione esercizio II.1

a) Il primo principio in forma differenziale per un sistema idrostatico come un gas ideale è

$$\delta Q = dU + PdV . \quad (26)$$

Nel nostro caso abbiamo $dU = 2\alpha TdT$ e dunque

$$\delta Q = 2\alpha TdT + PdV . \quad (27)$$

In una trasformazione adiabatica si ha $\delta Q = 0$ per definizione, e dunque

$$2\alpha TdT = -PdV . \quad (28)$$

Possiamo usare l'equazione di stato $PV = \beta T^2$ per scrivere

$$2\alpha TdT = -\beta T^2 \frac{dV}{V} , \quad (29)$$

ovvero

$$2\frac{dT}{T} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{dV}{V} , \quad (30)$$

che integrata dà

$$2\log T = -\frac{\beta}{\alpha} \log V + \text{costante} , \quad (31)$$

da cui

$$\log(T^2 V^{\beta/\alpha}) = \text{costante} , \quad (32)$$

e infine

$$T^2 V^{\beta/\alpha} = \text{costante} . \quad (33)$$

Usando di nuovo l'equazione di stato si può reintrodurre la pressione, essendo $T^2 = PV/\beta$:

$$PV^{\beta/\alpha+1} = \text{costante} , \quad (34)$$

che è il risultato cercato.

b) In un'adiabatica si ha $\delta Q = 0$ e $\delta W = -dU$. La variazione di energia interna nella trasformazione adiabatica da T_1 a T_2 si calcola direttamente dall'espressione di U:

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \alpha(T_2^2 - T_1^2) \quad (35)$$

e quindi

$$W_{12} = -\Delta U_{12} = -\alpha(T_2^2 - T_1^2) . \quad (36)$$

Nell'isoterma invece si avrà $dU = 0$ e $\delta Q = \delta W$. Il lavoro si calcola integrando il lavoro infinitesimo PdV e usando l'equazione di stato:

$$Q_{12} = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\beta T^2}{V} dV = \beta T^2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \beta T^2 \log \frac{V_2}{V_1} . \quad (37)$$

c) Un ciclo di Carnot è composto da due isoterme e due adiabatiche che si alternano in sequenza. Il grafico P - V del ciclo di Carnot per il gas ipotetico in esame è qualitativamente lo stesso che nel caso di un gas ideale di atomi o molecole. Infatti le trasformazioni isoterme sono rappresentate da curve con PV costante, cioè rami di iperbole (cambia solo la dipendenza della costante dalla temperatura), mentre le adiabatiche sono curve che connettono le iperboli e che hanno pendenza maggiore, essendo date da PV^γ costante, con $\gamma = \beta/\alpha + 1 > 1$.

d) Il rendimento può essere calcolato a partire dalla definizione

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{\text{assorbito}}|} = 1 - \frac{|Q_{\text{ceduto}}|}{|Q_{\text{assorbito}}|} . \quad (38)$$

Il calore ceduto e assorbito è il calore scambiato nelle due isoterme, rispettivamente, a temperatura bassa T_2 e temperatura alta T_1 . L'espressione di questo calore l'abbiamo già calcolata al punto (b) precedente. Chiamiamo A, B, C e D i quattro vertici del ciclo, in verso orario a partire dal punto di equilibrio a temperatura e pressione più alta. Allora si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{T_2^2 |\log(V_D/V_C)|}{T_1^2 |\log(V_B/V_A)|} = 1 - \frac{T_2^2 \log(V_C/V_D)}{T_1^2 \log(V_B/V_A)} . \quad (39)$$

Ora usiamo la relazione $T^2 V^{\beta/\alpha} = \text{costante}$ per le adiabatiche,

$$T_2^2 V_D^{\beta/\alpha} = T_1^2 V_A^{\beta/\alpha} \quad (40)$$

$$T_2^2 V_C^{\beta/\alpha} = T_1^2 V_B^{\beta/\alpha} \quad (41)$$

e, dividendo l'una per l'altra, si ottiene

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} \quad (42)$$

e infine

$$\eta = 1 - \frac{T_2^2}{T_1^2}. \quad (43)$$

Il rendimento di un ciclo di Carnot con un gas ideale standard è $\eta = 1 - T_2/T_1$. Notiamo che i due rendimenti sono diversi e, dato che $T_2 < T_1$, quello del gas ipotetico è il maggiore dei due. Ciò corrisponde ad una violazione del teorema di Carnot, che afferma che tutte le macchine reversibili che operano tra gli stessi due serbatoi devono avere lo stesso rendimento, pari a $\eta = 1 - T_2/T_1$.

Soluzione esercizio II.2

a) Occorre prima calcolare la temperatura finale di equilibrio del sistema. Dato che lo stesso calore viene scambiato tra l'olio e l'acqua, la temperatura finale sarà data dall'equazione

$$m_o c_o (t_f - t_o) = -m_a c_a (f_f - t_a) \quad (44)$$

dove m_o e c_o sono la massa e il calore specifico dell'olio, e m_a e c_a quelli dell'acqua. Il loro prodotto è la capacità termica. Risulta che la temperatura finale è semplicemente la media pesata delle temperature iniziali, usando come pesi le capacità termiche:

$$t_f = \frac{m_o c_o t_o + m_a c_a t_a}{m_o c_o + m_a c_a}. \quad (45)$$

I dati che ci servono sono: $m_o = \rho_o V_o = 0.92 \text{ (Kg/l)} \times 0.3 \text{ l} = 0.276 \text{ Kg}$; $c_o = 2.09 \text{ KJ/(Kg K)}$; $t_o = 10^\circ\text{C}$; $m_a = \rho_a V_a = 1 \text{ (Kg/l)} \times 0.7 \text{ l} = 0.7 \text{ Kg}$; $c_a = 1 \text{ cal/(g K)} = 4.186 \text{ KJ/(Kg K)}$; $t_a = 30^\circ\text{C}$. Inserendo questi dati si trova

$$t_f = 26.71^\circ\text{C} \Rightarrow T_f = 299.86 \text{ K}. \quad (46)$$

A questo punto si può calcolare la variazione di entropia dell'olio e dell'acqua, usando trasformazioni reversibili in cui si fornisce calore con serbatoi a temperatura diversa, dalla temperatura iniziale a quella finale. Si può scrivere

$$\int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{m c dT}{T} = m c \log T + \text{cost.}, \quad (47)$$

da cui

$$\Delta S_o = m_o c_o \log \frac{T_f}{T_o} = m_o c_o \log \frac{299.86}{283.15} = 33.07 \text{ J/k}, \quad (48)$$

e

$$\Delta S_a = m_a c_a \log \frac{T_f}{T_a} = m_a c_a \log \frac{299.86}{303.15} = -31.97 \text{ J/k} . \quad (49)$$

La variazione di entropia dell'universo è la somma algebrica delle due:

$$\Delta S = \Delta S_o + \Delta S_a = (33.07 - 31.97) \text{ J/k} = 1.1 \text{ J/k} , \quad (50)$$

ovviamente positiva.

b) Il processo consiste nel movimento dell'acqua dalla posizione iniziale, sopra l'olio, alla posizione finale, sotto l'olio, nello stesso recipiente. La temperatura iniziale e finale dell'olio, dell'acqua e dell'ambiente è la stessa. Il moto dell'acqua nell'olio è viscoso (gocce d'acqua che scendono come particelle soggette ad attrito viscoso), in modo tale che il lavoro eseguito dalla gravità è interamente dissipato. La variazione di entropia dell'universo in questo caso è uguale rapporto tra il lavoro dissipato e la temperatura dell'ambiente:

$$\Delta S = \frac{W}{T_{\text{amb}}} . \quad (51)$$

Il lavoro eseguito dalla forza peso è uguale alla variazione di energia potenziale. Detta h la profondità iniziale dell'olio, il processo consiste nell'abbassare 1 Kg di acqua di una quota h e alzare della stessa quota una quantità di olio contenuta in un volume $V = 1 \text{ l}$ (volume di fluido spostato). Quindi il lavoro eseguito è

$$W = \rho_a V g h - \rho_o V g h = (\rho_a - \rho_o) V g h , \quad (52)$$

da cui, inserendo i valori numerici, si ottiene

$$W = (1 - 0.92) \text{ Kg/l} \times 1 \text{ l} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.5 \text{ m} = 0.392 J . \quad (53)$$

e la variazione di entropia

$$\Delta S = \frac{0.392 \text{ J}}{303.15 \text{ K}} = 1.29 \times 10^{-3} \text{ J/K} . \quad (54)$$

Notiamo che il lavoro poteva essere calcolato anche ignorando il moto dell'olio, ma applicando all'acqua una forza di gravità efficace, pari alla somma tra la forza peso reale (attiva, che compie lavoro positivo) e la spinta di Archimede (che si oppone al moto e compie un lavoro negativo). Essendo la spinta di Archimede pari al peso dell'olio spostato, l'espressione finale del lavoro W sarà esattamente uguale a quella già scritta sopra. Si noti che trascurare la spinta di Archimede darebbe un errore molto grande nel risultato finale per l'entropia.

c) Per innalzare la temperatura dell'olio da $t_{\text{amb}} = 20^\circ\text{C}$ alla temperatura di ebollizione $t_e = 300^\circ\text{C}$ serve un calore pari a

$$Q_o = m_o c_o \Delta t = \rho_o V_o c_o \Delta t . \quad (55)$$

Inserendo i valori numerici si ottiene

$$Q_o = 0.92 \text{ Kg/l} \times 2 \text{ l} \times 2.09 \text{ KJ}/(\text{Kg K}) \times (300 - 20)^\circ\text{C} = 1076.8 \text{ KJ} . \quad (56)$$

Dato che la sorgente di calore ha un'efficienza dell'80%, al fine di fornire il calore Q_o all'olio, la sorgente disperderà anche un calore $Q_{\text{amb}} = (20/80)Q_o = Q_o/4 = 269.2 \text{ KJ}$ nell'ambiente, in modo che il calore totale rilasciato dalla sorgente è $|Q_{\text{sorg}}| = Q_o + Q_{\text{amb}} = 1346 \text{ KJ}$. Sorgente, olio e ambiente variano la loro entropia così :

$$\Delta S_{\text{sorg}} = -\frac{|Q_{\text{sorg}}|}{T_{\text{sorg}}} = -\frac{1346}{1273.15} \text{ KJ/K} = -1.057 \text{ KJ/K} \quad (57)$$

$$\Delta S_o = m_o c_o \log \frac{T_e}{T_{\text{amb}}} = 1.84 \times 2.09 \text{ KJ/K} \times \log \frac{573.15}{293.15} = 2.578 \text{ KJ/K} \quad (58)$$

$$\Delta S_{\text{amb}} = \frac{|Q_{\text{amb}}|}{T_{\text{amb}}} = \frac{269.2}{293.15} \text{ KJ/K} = 0.918 \text{ KJ/K} . \quad (59)$$

La variazione di entropia dell'universo è la somma algebrica delle tre:

$$\Delta S = (-1.057 + 2.578 + 0.918) \text{ KJ/K} = 2.439 \text{ KJ/K} . \quad (60)$$