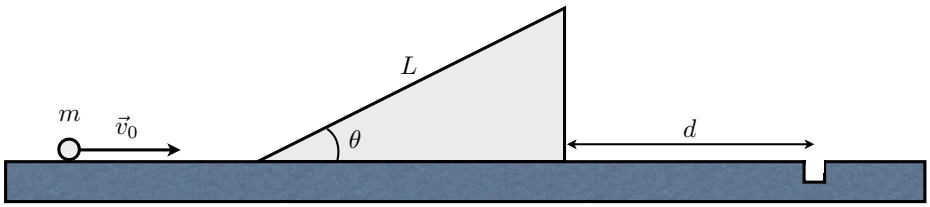
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2011-2012, 16 gennaio 2012

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Su un piano liscio poggia saldamente una pedana triangolare liscia di ipotenusa L e angolo θ. A distanza d dalla pedana si trova una buca, come in figura. Un corpo di massa m giunge con velocità v_0 costante in direzione della pedana. Si assuma che il corpo si comporti come un punto materiale che scivola senza ruotare; si assuma inoltre che il raccordo tra il piano e la pedana sia liscio e privo di spigoli.

1. Dati i valori $L = 0.1$ m e $\theta = 30^o$, e indicato con A il punto più alto della pedana, si calcoli la velocità iniziale minima, v_{min}, tale da permettere al corpo di raggiungere il punto A.

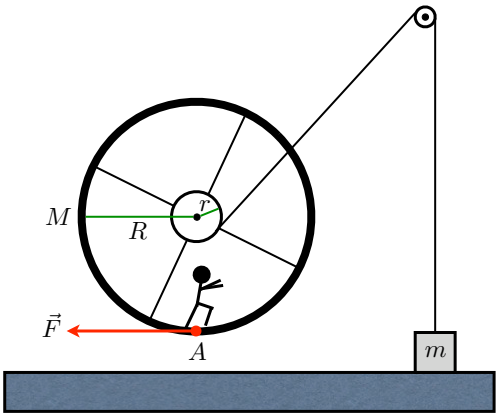
2. Nel caso $v_0 > v_{min}$, si scrivano le componenti orizzontale e verticale della velocità del corpo quando passa per il punto A.

3. Se $d = 0.6$ m, per quale valore di v_0 il corpo cade nella buca?

4. Si ricalcoli la velocità minima v_{min} come al primo punto, ma nel caso in cui sull'ipotenusa L della pedana sia presente un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.54$.

5. Sia $m = 0.05$ Kg la massa del corpo e $M = 0.7$ Kg la massa della pedana. Si calcoli ancora la velocità minima v_{min}, in assenza di attriti come al primo punto, ma stavolta considerando la pedana libera di scivolare anch'essa lungo il piano d'appoggio orizzontale.

Esercizio I.2



In un cantiere di una grande cattedrale medievale si consideri la seguente gru a propulsione umana. Un servo della gleba cammina in una ruota provvista di pioli mettendola in moto e tirando così una fune connessa ad una carrucola che solleva un blocco di pietra (si veda la foto). Si approssimi la ruota con un corpo rigido costituito da un anello di raggio $R = 2$ m e massa $M = 500$ Kg, connesso tramite raggi ad un asse cilindrico concentrico, di raggio $r = 0.2$ m, su cui si avvolge la fune. I raggi e il cilindro centrale abbiano massa trascurabile. Si trascuri inoltre la massa del servo; la sua azione sia interamente descritta dalla forza $\vec{F}$. La carrucola e la fune siano ideali e privi di massa. Il peso da sollevare abbia massa $m = 200$ Kg.
All'istante $t = 0$ il servo è fermo e il blocco di pietra è appoggiato al suolo. Per $t > 0$ il servo inizia a muoversi esercitando una forza costante $F = 500$ N applicata nel punto A, mettendo in moto la gru e sollevando il blocco di pietra (come in figura).

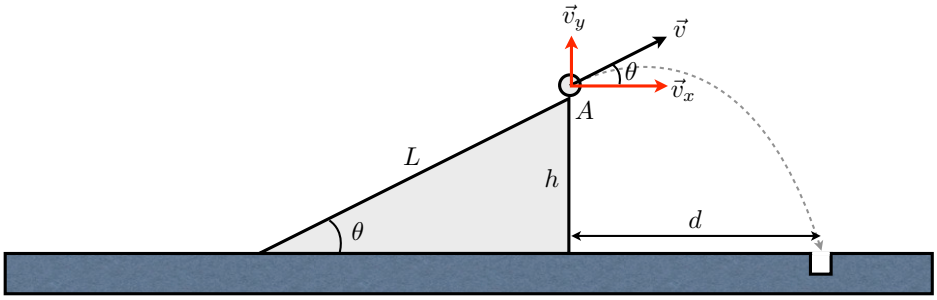
1. Si scrivano le equazioni del moto della ruota e del blocco.
2. Messa in moto la gru, quanto valgono l'accelerazione angolare della ruota α e quella lineare del masso a?
3. Qual è la distanza lineare percorsa dal servo fino all'istante in cui il blocco supera la quota $h = 5$ m?
4. Qual è la velocità del blocco in quel punto e il lavoro svolto dalla forza F fino a quell'istante?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1
Si consideri un blocco di ferro di massa $m = 10$ Kg.
a) Sapendo che il peso atomico del ferro è circa 55.8 e il calore latente di fusione è $\lambda = 13.8$ KJ/mol, si calcoli il calore necessario a fondere tutto il blocco tenendolo alla temperatura di fusione costante $T_f = 1810$ K.
b) Supponiamo che il blocco si trovi inizialmente in equilibrio termico con l'ambiente a temperatura $T_A = 300$ K e successivamente venga inserito in un forno a temperatura costante T_f. Il forno produce calore ad una potenza costante di 10 KW, interamente ceduto al ferro. Il calore specifico del ferro sia 440 J/(Kg K). Quando tempo è necessario per fondere completamente il blocco di ferro?
c) Calcolare la variazione di entropia del blocco.
d) Al termine della fusione il ferro viene raccolto in un recipiente, tolto dal forno e lasciato raffreddare a temperatura ambiente, fino a solidificarsi nella forma iniziale e a raggiungere l'equilibrio a temperatura T_A. Calcolare la variazione di entropia del blocco e dell'universo nel ciclo completo di fusione e solidificazione.

Esercizio II.2
Mezza mole di gas biatomico ideale si trova in una camera di volume $V_A = 5$ litri a pressione $P_A = 3$ Atm. Improvvisamente una parete viene rimossa e il gas espande in modo libero e adiabatico fino ad occupare un nuovo volume $V_B = 15$ litri. Una volta raggiunto l'equilibrio, il gas viene lentamente raffreddato a volume costante fino alla temperatura $T_C = 300$ K. Poi viene compresso in modo quasistatico tramite un pistone, dapprima tenendo la pressione costante fino ad un volume V_D e poi in modo adiabatico. Alla fine della compressione il gas si ritrova nelle condizioni iniziali. Si disegni il diagramma P-V del ciclo. Si calcolino i valori di T_A, T_B, P_B, P_C, V_D, T_D. Si calcoli il lavoro complessivo eseguito dal gas, il calore scambiato, e la variazione di entropia dell'universo in un ciclo, verificando che quest'ultima è positiva, come ci si aspetta che sia. [*Nota*: per la costante universale dei gas si usino i valori $R = 0.0821$ litri Atm/ (K mol), oppure $R = 8.314$ J/(K mol)]

Soluzione esercizio I.1



1. Il piano e la pedana sono lisci e si può usare la conservazione dell'energia meccanica per ricavare il modulo della velocità in A:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{1}$$

Il caso limite è dato dalla situazione in cui la pallina raggiunge il punto A con velocità nulla. Osservando che $h = L\sin\theta$ si ha:

$$\frac{1}{2}mv_{min}^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{2gL\sin\theta} \tag{2}$$

$$v_{min} = 0.99 \text{ m/s} \tag{3}$$

2. Come nel punto precedente, la conservazione dell'energia fornisce il modulo della velocità:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - 2gh \tag{4}$$

e le due componenti saranno

$$v_x = v\cos\theta = \sqrt{v_0^2 - 2gh}\cos\theta \tag{5}$$

$$v_y = v\sin\theta = \sqrt{v_0^2 - 2gh}\sin\theta \tag{6}$$

3. Superato il punto A con velocità $\vec{v}$, il moto del corpo è parabolico con accelerazione $\vec{g}$ fino a toccare il terreno. Per scrivere esplicitamente la traiettoria si può partire dalle leggi orarie nelle due direzioni x e y:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = h + v_y t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{7}$$

Affinché il corpo cada nella buca è necessario imporre $x = d$ e $y = 0$ da cui:

$$\begin{cases} d &= v_x t \\ 0 &= h + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 = h + v_y \frac{d}{v_x} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_x^2} \tag{8}$$

Usando le componenti della velocità calcolate al punto precedente si ottiene:

$$v^2 = \frac{g d^2}{2 \cos\theta^2 (h + d \tan\theta)} \,. \tag{9}$$

Confrontando le equazioni (4) e (9) e ricordando che $h = L \sin\theta$, è possibile ricavare l'espressione per v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{g d^2}{2 \cos\theta^2 (L \sin\theta + d \tan\theta)} + 2 g L \sin\theta} \tag{10}$$

e inserendo i dati forniti si ottiene:

$$v_0 = 2.63 \text{ m/s} \tag{11}$$

4. Nel caso in cui sull'ipotenusa della pedana è presente attrito, la condizione limite è ancora la stessa del primo punto, ma l'energia meccanica non si conserva, essendo la forza di attrito una forza non conservativa. È possibile però eguagliare la variazione dell'energia meccanica al lavoro svolto dalla forza di attrito

$$\Delta E = W_{F_a} \tag{12}$$

dove $\Delta E = mgh - \frac{1}{2} m v_{min}^2$ e W_{F_a} è il lavoro della forza di attrito lungo il tratto L. Dato che $F_a = -\mu N$ dove $N = mg\cos\theta$ e che forza di attrito e spostamento $\vec{L}$ sono paralleli, W_{F_a} è dato da:

$$W_{F_a} = \vec{F}_a \cdot \vec{L} = -\mu m g L \cos\theta \tag{13}$$

Ricorando che $h = L \sin\theta$ si ottiene dunque la velocità minima:

$$v_{min} = \sqrt{2gL\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)} \tag{14}$$

$$v_{min} = 1.38 \text{ m/s} \tag{15}$$

5. Dato che il sistema è privo di attriti possiamo ancora utilizzare le leggi di conservazione. In questo caso però la pedana è libera di muoversi orizzontalmente: nel momento in cui la pallina inizia a salire lungo l'ipotenusa, la pedana stessa si sposta verso destra. Nel caso limite la pallina raggiunge il punto A ferma rispetto alla pedana, ossia muovendosi verso destra con la stessa velocità orizzontale $\vec{V}$ della pedana e

velocità verticale nulla. È possibile dunque sfruttare la conservazione della quantità di moto in direzione x e la conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{cases} mv_{min} &= (m+M)V \\ \frac{1}{2}mv_{min}^2 &= \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh \end{cases} \tag{16}$$

Segue che

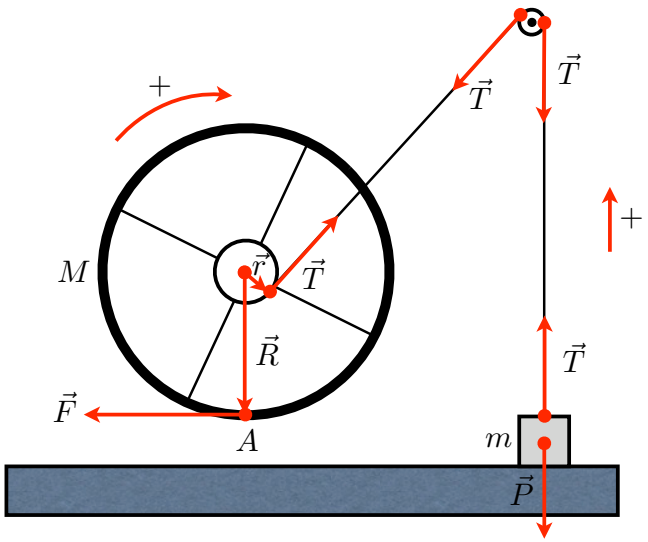
$$\frac{mM}{m+M}v_{min}^2 = 2mgh \tag{17}$$

con $h = L\sin\theta$, da cui

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2(m+M)}{M}gL\sin\theta} \tag{18}$$

$$v_{min} = 1.02 \text{ m/s} \tag{19}$$

Soluzione esercizio I.2



1. Fissiamo convenzionalmente il verso per tutti i vettori della figura. Considerando che il blocco è sollevato se la ruota gira in senso orario, siano positive le forze con verso dal blocco alla ruota lungo la fune, e per i vettori posti nella direzione perpendicolare al foglio, positivi quelli con verso entrante. La massa può solo spostarsi verticalmente mentre

la ruota può avere solo un moto di rotazione, essendo il perno fisso. Visto che la carrucola è ideale, lungo la fune agisce una sola tensione, e quindi le equazioni del moto sono date da

$$\begin{cases} ma &= -mg + T \\ I\alpha &= RF - rT \end{cases} \tag{20}$$

2. Per trovare il valore delle accelerazioni del sistema è necessario risolvere le equazioni del moto, che consistono in un sistema di due equazioni in tre incognite. È quindi necessario trovare un'ulteriore relazione, che è data dal vincolo geometrico della condizione di puro rotolamento della corda attorno al disco, cioè

$$a = r\alpha \tag{21}$$

Utilizzando quest'ultima il sistema diventa di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} mr\alpha &= -mg + T \\ I\alpha &= RF - rT \end{cases} \tag{22}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\alpha = \frac{RF - mgr}{MR^2 + mr^2} = 0.303 \text{ rad/s}^2 \tag{23}$$

$$a = \frac{(R/r)F - mg}{(I/r^2) + m} = 0.0605 \text{ m/s}^2 \tag{24}$$

dove si è fatto uso della relazione valida per un anello $I = MR^2$.

3. È sufficiente osservare che la distanza h percorsa dal masso è legata alla distanza angolare θ descritta dal disco centrale della ruota dalla condizione di puro rotolamento $r\theta = h$. Poiché la distanza lineare percorsa dal servo è $s = R\theta$, si ottiene

$$s = R\frac{h}{r} = 50\text{m} \tag{25}$$

4. Il moto del corpo è uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} v &= at \\ h &= \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \tag{26}$$

da cui si deriva $v^2 = 2ah$, ovvero $v = \sqrt{2ah} = 0.78$ m/s.

Il lavoro svolto dalla forza $\vec{F}$ può essere calcolato sapendo che, non agendo forze dissipative, esso è uguale alla variazione di energia meccanica del sistema ruota+blocco:

$$W = (\Delta E_K)_{\text{ruota}} + (\Delta E_K)_{\text{blocco}} + \Delta U_{\text{blocco}} \tag{27}$$

La variazione di energia meccanica del blocco è $\Delta U_{\rm blocco} = mgh$. La sua variazione di energia cinetica vale $(\Delta E_K)_{\rm blocco} = (1/2)mv^2$; ma abbiamo appena visto che $v^2 = 2ah$ e dunque $(\Delta E_K)_{\rm blocco} = mah$. Infine, la variazione di energia cinetica della ruota è $(\Delta E_K)_{\rm ruota} = (1/2)I\omega^2$, con

$$\omega^2 = \alpha^2 t^2 = \alpha^2 \frac{2h}{a} = \frac{2h\alpha}{r} \tag{28}$$

quindi

$$(E_K)_{\rm ruota} = MR^2 \frac{h\alpha}{r}\,. \tag{29}$$

Inserendo i valori numerici si trova

$$W = 25000 \ \text{J}\,. \tag{30}$$

Notiamo che i punti 2 e 4 del problema potevano essere risolti senza ricorrere alle equazioni del moto, utilizzando fin da subito la relazione tra lavoro e energia meccanica. Infatti, l'energia meccanica del sistema in un istante generico è

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgz \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + mgz\,, \tag{32}$$

e la sua derivata temporale è

$$\frac{dE}{dt} = MR^2\omega\alpha + mr^2\omega\alpha + mgr\omega\,, \tag{33}$$

essendo $\alpha = d\omega/dt$ e $v = dz/dt = r\omega$. Se l'uomo (considerato come agente esterno al sistema) produce una rotazione infinitesima $d\theta$ della ruota nel tempo dt, la forza F da lui esercitata compie un lavoro $Fds = RFd\theta = RF\omega dt$, a cui corrisponde una variazione uguale di energia meccanica del sistema, dE. Dunque

$$RF\omega = \frac{dE}{dt}\,, \tag{34}$$

ovvero

$$RF = MR^2\alpha + mr^2\alpha + mgr\,. \tag{35}$$

Questa equazione ha come soluzione la stessa accelerazione angolare α già trovata al punto 2. Inoltre, il lavoro totale eseguito dalla forza F non è altro che $W = Fs = 25000$ J, dove s è la distanza lineare percorsa dall'uomo. Si tenga presente però che, a dispetto della semplicità dell'ultimo risultato, l'uso della definizione di lavoro in termini di forza per spostamento nel caso di generici sistemi di particelle, con o senza corpi rigidi, potrebbe essere meno banale, in generale, ed è meglio essere cauti.

Soluzione esercizio II.1

a) Dalla definizione di calore latente segue che il calore necessario a fondere il blocco è $Q_f = n\lambda$, dove n è il numero di moli di ferro. Il numero di moli si calcola sapendo che la massa di una mole, per definizione, è pari al peso atomico della sostanza espresso in grammi. Dunque una mole di ferro sono 55.8 g e di conseguenza 10 Kg di ferro sono 10^4 g/ 55.8 g mol^{-1} = 179 moli. Il calore è quindi

$$Q_f = 179 \times 13.8 \times 10^3 J = 2.47 \times 10^6 \,\mathrm{J}\,.$$

b) In questo caso occorre fornire, oltre allo stesso calore di fusione Q_f, anche il calore necessario ad innalzare la temperatura del blocco da T_A a T_f. Quest'ultimo si calcola conoscendo il calore specifico, dalla relazione

$$Q_{Af} = mc\Delta T = mc(T_f - T_A) = 10\mathrm{Kg} \times 440\mathrm{J/(KgK)} \times 1510\mathrm{K} = 6.64 \times 10^6 \mathrm{J}\,.$$

Dunque il calore totale necessario al processo è

$$Q = Q_{Af} + Q_f = 6.64 \times 10^6 \mathrm{J} + 2.47 \times 10^6 \,\mathrm{J} = 9.11 \times 10^6 \,\mathrm{J}\,.$$

Per sapere in quanto tempo viene erogato tale calore basta utilizzare la potenza assegnata, $P = 10$ KW $= 10^4$ J/s. Si avrà:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{9.11 \times 10^6 \,\mathrm{J}}{10^4 \mathrm{J/s}} = 911\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{min}\,11\,\mathrm{s}\,.$$

c) La variazione di entropia del blocco di ferro è la somma delle variazioni associate al riscaldamento reversibile del blocco da T_A a T_f e alla fusione di tutto il ferro a temperatura T_f. Dunque:

$$\Delta S = \Delta S_{Af} + \Delta S_f = mc \log \frac{T_f}{T_A} + \frac{Q_f}{T_f}$$

e inserendo i valori numerici si ottiene

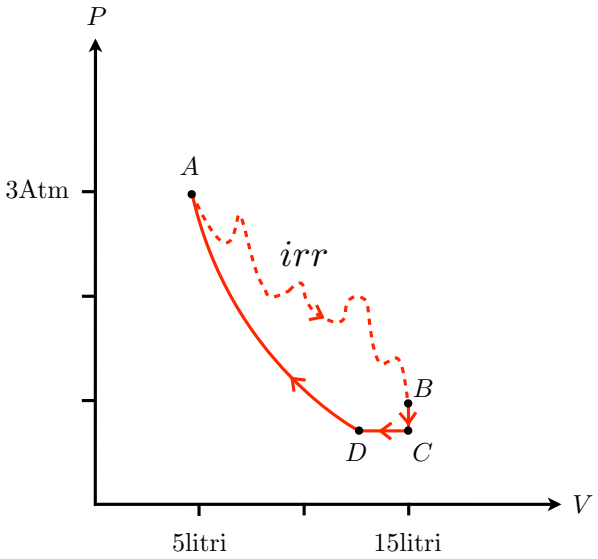
$$\Delta S = (7.91 + 1.36) \times 10^3 \,\mathrm{J/K} = 9.27 \times 10^3 \,\mathrm{J/K}\,.$$

d) In questo caso la variazione totale di entropia del blocco è nulla, in quanto lo stato iniziale e finale sono identici e l'entropia è una funzione di stato. Allora la variazione di entropia dell'universo coincide con la somma delle variazioni di entropia dei serbatoi di calore utilizzati nel processo: il forno a temperatura costante T_f e l'ambiente a temperatura costante T_A. Il calore scambiato con il ferro dai due serbatoi è lo stesso in modulo, ma di segno opposto, negativo per il forno (che cede calore al blocco) e positivo per l'ambiente (che assorbe calore dal blocco). Dunque

$$\Delta S_u = \frac{Q}{T_A} + \frac{(-Q)}{T_f} = Q\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_A}\right) = 2.53 \times 10^4 \,\mathrm{J/K}\,.$$

Quindi la variazione di entropia del sistema è positiva, come ci si aspetta per un processo irreversibile come questo.

Soluzione esercizio II.2



Il diagramma P-V è disegnato in figura. Notiamo che la prima trasformazione, AB, è irreversibile in quanto la parete viene rimossa improvvisamente e l'espansione è libera. In questa trasformazione il calore scambiato è nullo, così com'è nullo il lavoro eseguito dal gas; dal primo principio segue che l'energia interna è la stessa all'inizio e alla fine e questo implica che anche la temperatura rimane la stessa, essendo l'energia interna funzione solo della temperatura (nel gas ideale).

Conviene procedere nell'ordine suggerito dal testo, usando l'equazione di stato dei gas ideali e le relazioni note tra le coordinate termodinamiche per le trasformazioni assegnate. Per T_A basta usare l'equazione di stato:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{3 \times 5}{0.5 \times 0.0821}\,\mathrm{K} = 365.4\,\mathrm{K}\,.$$

Dato che la prima trasformazione è un'espansione adiabatica libera di un gas ideale, la temperatura finale è la stessa di quella finale:

$$T_B = T_A = 365.4\,\mathrm{K}\,.$$

Per le pressioni in B e C si può usare ancora l'equazione di stato:

$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{V_B} = \frac{V_A}{V_B} P_A = 1\text{Atm}$$

e

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{0.5 \times 0.0821 \times 300}{15}\,\text{Atm} = 0.821\,\text{Atm}\,.$$

Per il volume V_D possiamo usare la relazione tra volumi e pressioni nell'adiabatica quasistatica DA:

$$P_D V_D^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

con $\gamma = 7/5$ per un gas biatomico, da cui

$$V_D = V_A(\frac{P_A}{P_D})^{1/\gamma} = V_A(\frac{P_A}{P_C})^{1/\gamma} = 5(\frac{3}{0.821})^{5/7}\,\text{litri} = 12.6\,\text{litri}\,.$$

Infine la temperatura T_D si ottiene dall'equazione di stato:

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = \frac{0.821 \times 12.6}{0.5 \times 0.0821}\,\text{K} = 252\,\text{K}\,.$$

Con i dati appena ricavati si può fare il calcolo del lavoro compiuto dal gas. Nell'espansione libera adiabatica il lavoro è nullo, così come nell'isocora. Basta quindi calcolare il lavoro nella isobara e nella adiabatica quasistatica:

$$W_{CD} = -P_C(V_C - V_D) = -1.97\,\text{litriAtm} = -200\,\text{J}\,,$$

e

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_v(T_A - T_D) = -11.64\,\text{litriAtm} = -1180\,\text{J}\,.$$

I lavoro totale è dunque

$$W = W_{CD} + V_{DA} = -13.6\,\text{litriAtm} = -1380\,\text{J}\,.$$

È un lavoro negativo in quanto viene svolto solo nella fase di compressione. Inoltre, dato che nel ciclo la variazione di energia interna è nulla, il calore scambiato con i serbatoi sarà uguale al lavoro:

$$Q = W = -1380\,\text{J}\,.$$

Infine, la variazione di entropia dell'universo è nulla in tutte le trasformazioni quasistatiche. L'unico contributo non nullo viene dall'espansione libera iniziale. In tale trasformazione l'ambiente non varia la sua entropia e rimane da calcolare solo la variazione di entropia del gas. Il risultato è:

$$\Delta S_u = (\Delta S_{\text{gas}})_{AB} = nR \log \frac{V_B}{V_A} = 0.5 \times 8.314 \times \log 3\,\text{J/K} = 4.57\,\text{J/K}\,,$$

che è positiva come ci si aspetta per un ciclo che contiene trasformazioni irreversibili.