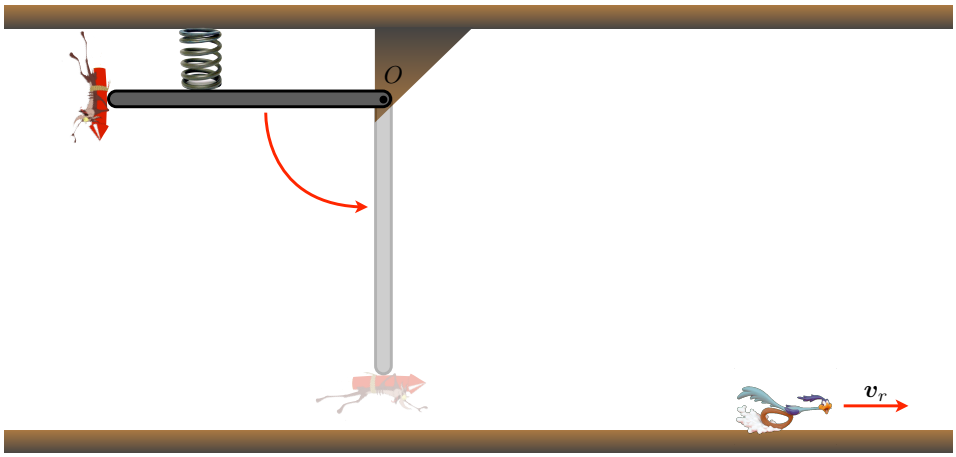
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2011-2012, 16 luglio 2012

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Wile E. Coyote vuole, come al solito, raggiungere e catturare il Road Runner. A tale scopo ha creato una macchina così realizzata (vedi figura): un'asta omogenea di acciaio di massa $M = 1000$ Kg e lunghezza $L = 10$ m è vincolata nel suo estremo O ad un perno attorno a cui può ruotare senza attrito. All'altro estremo viene agganciato un piccolo razzo, inizialmente spento, a cui si lega Wile: razzo e coyote sono globalmente approssimabili con un punto materiale di massa $m = 75$ Kg. Il tutto è agganciato alla roccia sovrastante per mezzo di una molla molto rigida, con costante elastica $k = 2.15 \times 10^4$ N/m, attaccata all'asta in un punto a distanza d dal perno O.

1. All'inizio il sistema è in equilibrio, con l'asta perfettamente orizzontale, la molla allungata in direzione verticale e reazione vincolare sul perno nulla. Calcolare l'allungamento Δl della molla e la distanza d.

2. Al momento opportuno, l'asta si sgancia dalla molla. Calcolare la velocità angolare e l'energia cinetica del sistema asta + razzo + Wile quando l'asta arriva in posizione verticale.

3. In quel preciso istante ($t = t_0$) il razzo si sgancia dall'asta, assieme a Wile, e si accende. Essendo un razzo rudimentale, la spinta che produce non è in grado di farlo accelerare, ma è comunque sufficiente a compensare esattamente l'attrito con l'aria e a mantenerlo su una traiettoria orizzontale a velocità costante. Se il Road Runner viaggia a

velocità costante $v_r = 10$ m/s e a $t = t_0$ si trova avanti di $x_0 = 150$ m, Wile E. Coyote riesce a raggiungere la sua preda? Se sì, dopo quanto tempo e a quale distanza rispetto al punto di partenza a t_0?

Esercizio I.2

L'astronave Enterprise classe E, di massa $m = 3.25 \times 10^9$ Kg, si trova in orbita circolare attorno ad un pianeta extragalattico disabitato ad una quota $h = 500$ Km dalla sua superficie. Il pianeta ha raggio $R_p = 6400$ Km.

1. Si calcoli la massa M del pianeta sapendo che l'astronave compie un moto di rivoluzione in 5691.38 s (si usi il valore $G = 6.673 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3 Kg^{-1} s^{-2}}$ per la costante di gravitazione universale).

2. Calcolare il momento angolare e l'energia meccanica dell'astronave. Si commenti il segno dell'energia.

3. Improvvisamente il veivolo impatta frontalmente contro un piccolo asteroide di massa $m_{\mathrm{ast}} = 2.27 \times 10^7$ Kg, fermo prima della collisione, che si incastra permanentemente nello scafo. Calcolare la variazione di velocità dell'astronave nell'urto.

4. Calcolare l'energia meccanica immediatamente dopo l'urto; fare il grafico dell'energia potenziale efficace per il moto radiale. Che tipo di orbita compie l'astronave dopo l'urto?

5. A bordo è presente una nuova potentissima arma capace di fare implodere il pianeta su se stesso. Se si definisce buco nero un oggetto con velocità di fuga tale che $v_f > c$, dove $c = 3 \times 10^8$ m/s è la velocità della luce, quanto deve valere il raggio del pianeta imploso per soddisfare questa condizione?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1

Si consideri una mole di gas ideale occupante un volume $V_A = 10$ litri a pressione atmosferica. Il gas viene dapprima compresso in modo isotermico fino ad occupare un volume $V_B = 1$ litro e poi viene fatto espandere adiabaticamente di nuovo fino a V_A. Entrambe le trasformazioni siano quasistatiche e prive di dissipazioni.

1. Rappresentare quantativamente il processo in un diagramma $P-V$ sia per un gas monoatomico che per un gas biatomico.
2. Determinare il lavoro totale compiuto; discutere se è fatto da o sul sistema e sia maggiore nel caso di gas mono- o bi-atomico.
3. Calcolare la variazione di entropia totale del gas (mono- e bi-atomico), dell'ambiente e dell'universo.

Esercizio II.2

Un gas ideale è contenuto in una bottiglia a pareti isolanti di volume $V_0 = 10$ cm^3. Il collo della bottiglia ha area $A = 1$ cm^2 ed il tappo è un cilindretto isolante, indeformabile e perfettamente aderente alle pareti di massa $m = 0.2$ Kg. Sul tappo agiscono unicamente la forza peso e le forze di pressione interna ed esterna alla bottiglia. La pressione esterna rimane costante e pari a quella atmosferica, $P_0 = 1$ atm. Se spostato di poco dalla posizione di equilibrio – essendo l'attrito tra tappo e pareti trascurabile – il tappo inizia ad oscillare con pulsazione $\omega = 30$ rad/s. Le variazioni delle coordinate termodinamiche del gas dovute allo spostamento del tappo siano tali da poter considerare le trasformazioni, in ogni istante, come adiabatiche quasistatiche.

1. Quanto vale la pressione interna al gas quando il tappo è fermo nella posizione di equilibrio?
2. Supponiamo che sia x lo spostamento, piccolo, dalla posizione di equilibrio e siano dP e dV le corrispondenti variazioni infinitesime di pressione e volume del gas. Qual è la relazione tra dP e dV?
3. Si esprima la forza di richiamo agente sul tappo in funzione del piccolo spostamento x usando le coordinate termodinamiche e si scriva la corrispondente equazione armonica del moto.
4. Si determini il valore numerico di γ.

Soluzione esercizio I.1

1. Affinché il sistema sia in equilibrio deve essere nulla sia la somma delle forze agenti sull'asta che la somma dei momenti delle stesse forze rispetto ad un polo fisso. Nel nostro caso dobbiamo considerare il peso dell'asta, il peso del sistema razzo-Wile e la forza elastica della molla $F_e = k\Delta l$ rivolta verso l'alto. La forza peso dell'asta è applicata nel centro di massa della stessa, ossia a distanza $L/2$ rispetto al polo O; la forza peso del razzo-Wile è invece applicata a distanza L da O. Entrambe le forze sono verticali verso il basso e generano un momento in direzione uscente dal foglio. La forza elastica è applicata a distanza d dal perno e genera invece un momento entrante nel foglio. Assegnando il segno positivo alle forze verso il basso e ai momenti uscenti dal foglio, avremo che

$$\begin{cases} Mg + mg - k\Delta l = 0 \\ \dfrac{L}{2}Mg + Lmg - dk\Delta l = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dalla prima equazione si può ricavare subito l'allungamento Δl e sostituendo nella seconda è possibile ricavare la posizione d:

$$\begin{cases} \Delta l = \dfrac{M+m}{k}g = 0.50 \text{ m} \\ d = \dfrac{M+2m}{2(M+m)}L = 5.35 \text{ m} \end{cases} \tag{2}$$

È facile mostrare che la distanza d non è altro che la posizione del centro di massa del sistema complessivo formato da asta + razzo + Wile calcolata rispetto al polo O; infatti

$$x_{CM} = \frac{\frac{L}{2}M + Lm}{M+m} = \frac{M+2m}{2(M+m)}L = d\,. \tag{3}$$

In effetti, potevamo applicare la condizione di equilibrio sui momenti delle forze considerando i due pesi, dell'asta e del razzo-Wile, come un'unica forza peso agente in $x_{CM} = d$, che deve essere compensata da una forza elastica uguale in modulo e agente nelle stesso punto in verso opposto. Grazie al fatto che la gravità è un campo uniforme, il risultato è ovviamente lo stesso di prima.

2. Appena sganciata dalla molla, l'asta ruoterà in senso antiorario, portandosi dietro il razzo-Wile attaccato al suo estremo. Dato che non agiscono attriti sul perno e che la forza peso è conservativa, per calcolare velocità angolare ed energia cinetica dopo una rotazione di $\pi/2$ possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica. Fissando

come zero dell'energia potenziale la quota a cui l'asta si trovava ferma all'inizio, si avrà

$$0 = \frac{1}{2} I\omega^2 - (M+m)gd\,, \tag{4}$$

dove d è la distanza del CM del sistema asta + razzo + Wile rispetto al polo O, che coincide anche con la distanza dello stesso CM dalla quota di riferimento dell'energia potenziale nel momento in cui l'asta si trova in posizione verticale. Inoltre, $I = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2$ è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto al polo O, somma del momento d'inerzia di un'asta per rotazioni attorno ad un asse perpendicolare passante per un estremo e del momento d'inerzia di una massa puntiforme a distanza L dal polo. Risolvendo si ottiene l'energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 = (M+m)gd = \frac{1}{2}(M+2m)gL = 56\ 350\ \ \mathrm{J}\,, \tag{5}$$

e la velocità angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+2m)}{(M+3m)}\frac{3g}{L}} = 1.66\ \ \mathrm{s}^{-1}\,. \tag{6}$$

Notiamo che il calcolo della variazione di energia potenziale poteva essere svolto, equivalentemente, tenendo conto in modo separato dei contributi dovuti al peso dell'asta e al peso del razzo-Wile. Il risultato sarebbe stato $-(1/2)(M+2m)gL$ come prima. Anche l'energia cinetica poteva essere calcolata in modo diverso, ovvero come somma dell'energia cinetica di pura rotazione della sola asta rispetto ad O e dell'energia cinetica $(1/2)mv^2$ del razzo-Wile, essendo $v = \omega L$. Di nuovo, il risultato sarebbe stato identico.

3. Al momento dello stacco dall'asta a $t = t_0$, il razzo-Wile ha velocità orizzontale

$$v_w = \omega L = 16.61\ \mathrm{m/s} > v_r\ , \tag{7}$$

Dato che questa velocità viene mantenuta costante anche dopo lo stacco, il coyote può raggiungere il Road Runner. Se fissiamo un sistema di riferimento cartesiano xy con $x = 0$ nell'istante $t_0 = 0$, possiamo scrivere le equazioni del moto rettilineo uniforme per i due protagonisti:

$$\begin{cases} x_w(t) = 0 + v_w t \\ x_r(t) = x_0 + v_r t \end{cases} \tag{8}$$

Dato che $v_w > v_r$ esiste un istante t^* tale per cui $x_w(t^*) = x_r(t^*)$:

$$\begin{cases} t^* = \dfrac{x_0}{v_w - v_r} = 22.7\ \ \mathrm{s} \\ x_w(t^*) = x_r(t^*) = \dfrac{v_w}{v_w - v_r} x_0 = 377\ \ \mathrm{m} \end{cases} \tag{9}$$

Wile E. Coyote riesce incredibilmente a raggiungere il Road Runner (purtroppo per Wile E. Coyote, questa predizione viola le regole imposte dagli sceneggiatori, che ovviamente faranno esplodere il razzo prima di raggiungere l'obiettivo, come dev'essere).

Soluzione esercizio I.2

1. Il moto avviene su una circonferenza di raggio $R = R_p + h = 6.9 \times 10^6$ m, con velocità tangenziale dell'astronave data da $v = \omega R = 2\pi R/T = 7617.49$ m/s. Essendo il moto di tipo circolare uniforme l'accelerazione è solo centripeta ed è prodotta unicamente dall'attrazione gravitazionale esercitata dal pianeta:

$$ma_c = m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \tag{10}$$

da cui è possibile ricavare la massa del pianeta, ottenendo

$$M = \frac{Rv^2}{G} \ . \tag{11}$$

Inserendo i dati numerici si ottiene

$$M = 6 \times 10^{24} \text{ Kg} \ . \tag{12}$$

2. Scegliendo come polo il centro del pianeta, ll momento angolare è un vettore perpendicolare al piano dell'orbita circolare e di modulo

$$L = mvR = 1.708 \times 10^{20} \text{ Kg m}^2/\text{s} \ . \tag{13}$$

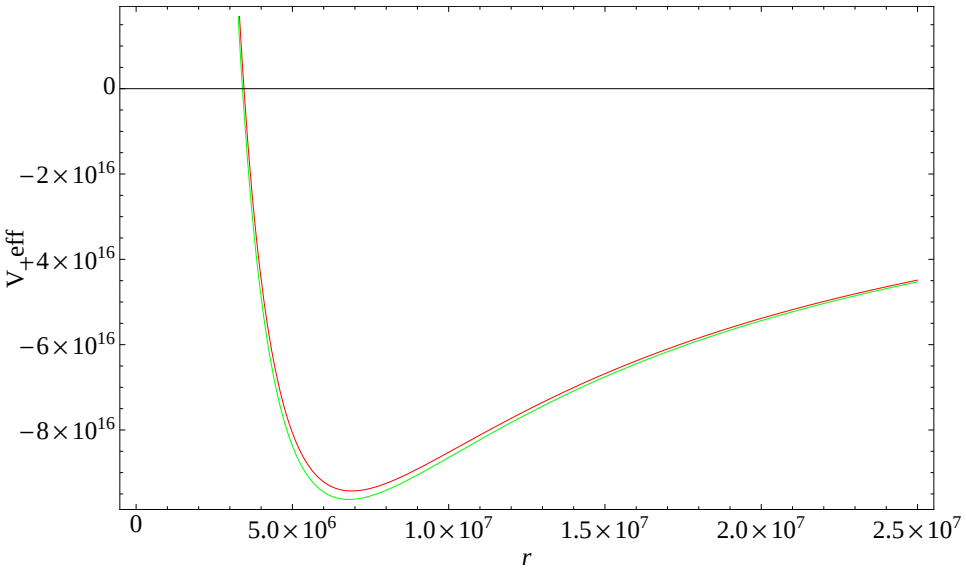
L'energia meccanica totale è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}mv^2 = -9.43 \times 10^{16} \text{ J} \tag{14}$$

dove si è fatto uso della (11). Il segno negativo è consistente con il fatto che l'astronave è legata gravitazionalmente al pianeta. Notiamo che il valore dell'energia, come dev'essere nel caso di orbite circolari, corrisponde al minimo dell'energia potenziale efficace per il moto radiale, $(E_p)_{\text{eff}} = L^2/(2mr^2) + E_p$, in funzione di r.

3. Siamo in presenza di un urto perfettamente anelastico. Dato che non ci sono forze impulsive, tranne quelle interne al sistema, si conserva la componente della quantità di moto lungo la direzione tangenziale all'orbita

$$mv = (m + m_{\text{ast}})v' = m'v' \ , \tag{15}$$



avendo chiamato $m' = m + m_{\text{ast}}$. Inserendo i valori si ottiene

$$v' = \frac{m}{m'}\, v = 0.993\; v\;. \tag{16}$$

La velocità cambia per meno dell'uno per cento. Si noti anche che, essendo il raggio lo stesso subito prima e subito dopo l'urto, la conservazione della quantità di moto coincide con la conservazione del momento angolare, $L' = L$. A differenza della quantità di moto, il momento angolare si conserva anche in tutti gli istanti successivi all'urto, dato che la forza è centrale.

4. Immediatamente dopo l'urto l'astronave si trova ancora a distanza R dal centro del pianeta e la nuova energia meccanica è

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m' v'^2 - \frac{GMm'}{R} = -9.63 \times 10^{16}\ \text{J}\;. \tag{17}$$

L'energia potenziale efficace in funzione della distanza dal centro del pianeta è

$$(E_p)_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2m'r^2} - \frac{GMm'}{r}\;. \tag{18}$$

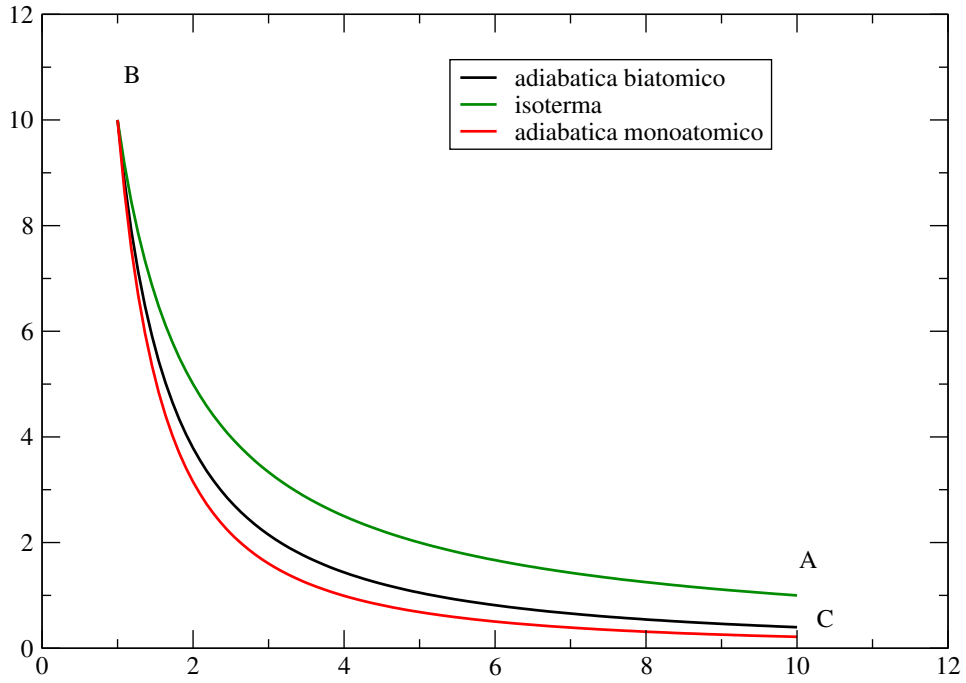
Al momento dell'urto $r = R$, ma questa distanza non corrisponde più al minimo della nuova energia potenziale efficace, e quindi il moto non è più circolare. Essendo l'energia ancora negativa, il moto sarà ellittico. Inoltre, dato che la velocità $\mathbf{v}'$ immediatamente dopo l'urto è puramente tangenziale, la nuova orbita sarà un'ellisse il cui afelio è il punto in cui è avvenuto l'urto. L'eccentricità dell'orbita sarà piccola, dato

che le variazioni di massa e di velocità, rispetto alle condizioni prima dell'urto, sono piccole, dell'ordine del 1% circa. Nel grafico riportato sopra sono rappresentate le curve dell'energia potenziale efficace prima dell'urto (curva rossa) e dopo l'urto (curva verde).

5. Per calcolare il raggio critico al di sotto del quale il pianeta imploso si comporta come un buco nero, dobbiamo calcolare la velocità di fuga in funzione del raggio del pianeta e porla uguale alla velocità della luce. Si ottiene
$$v_f^2 = \frac{2GM}{R} = c^2 \Rightarrow R_{bh} = \frac{2GM}{c^2} \tag{19}$$
Si può notare che il raggio critico dipende solo dalla sua massa. Nel caso del pianeta in questione vale $R_{bh} = 8.9 \times 10^{-3}\ m$. L'espressione ottenuta in (19) è nota come Raggio di Schwarzschild, ed è curioso che sebbene i buchi neri siano una conseguenza della Relatività Generale il risultato qui ottenuto utilizzando concetti puramente classici sia corretto. Infine, poiché per il pianeta disabitato sono stati utilizzati i dati della Terra, il valore del raggio ottenuto è lo stesso che dovrebbe avere il nostro pianeta per diventare un buco nero.

Soluzione esercizio II.1

1. Essendo il processo da A a B un processo isotermico abbiamo $P_A V_A = P_B V_B$ e quindi
$$P_B = P_A \frac{V_A}{V_B} = 10 \text{ atm} . \tag{20}$$
La curva che rappresenta la trasformazione nel piano P–V non cambia se il gas è gas monoatomico o biatomico. Nella trasformazione adiabatica da B allo stato finale C si ha invece $P_C V_C^\gamma = P_B V_B^\gamma$, con $V_C = V_A$, da cui
$$P_C = P_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = 10^{-\gamma} P_B = 10^{1-\gamma} \text{ atm} , \tag{21}$$
e le coordinate termodinamiche finali sono diverse nei due casi. Per un gas monoatomico $\gamma = 5/3$ e quindi
$$P_C(mono) = 0.215 \text{ atm} , \tag{22}$$
mentre per il gas biatomico $\gamma = 7/5$ e
$$P_C(bi) = 0.398 \text{ atm} . \tag{23}$$
Il corrispondente diagramma P–V è tracciato nella figura sotto, dove sull'asse verticale è data la pressione in atmosfere e su quello orizzontale il volume in litri. Le curve rossa e nera sono, rispettivamente, le trasformazioni adiabatiche per il gas monoatomico e quello biatomico.



2. Il lavoro compiuto dal gas è l'area sottesa dalle curve che rappresentano le trasformazioni nel diagramma P–V, presa con segno positivo per l'espansione e negativo per la compressione. Quindi, guardando il diagramma e osservando che la curva relativa alla compressione isoterma si trova sopra quella dell'espansione adiabatica, si deduce a vista che il lavoro fatto dal gas è negativo o, in altre parole, il lavoro viene svolto dall'ambiente (forze esterne che agiscono su pareti mobili) sul sistema (gas). Per la stessa ragione il lavoro svolto nel caso del gas monoatomico è maggiore in modulo di quello del gas biatomico. Il calcolo quantitativo può essere svolto sapendo che durante la compressione isoterma si ha $PV = P_A V_A$ e il lavoro svolto è

$$W_{AB} = \int_A^B P dV = P_A V_A \int_A^B \frac{dV}{V} = P_A V_A \ln(V_B/V_A) = -2.33 \times 10^3 \text{J}, \tag{24}$$

mentre nell'espansione adiabatica si ha $PV^\gamma = P_B V_B^\gamma$ e il lavoro è

$$W_{BC} = \int_B^C P dV = P_B V_B^\gamma \int_B^C \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{P_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma - 1} \right) . \tag{25}$$

Dunque $W_{BC}(mono) = 1.19 \times 10^3$ J e $W_{BC}(bi) = 1.52 \times 10^3$ J, e il lavoro totale risulta negativo, come ci si aspettava, e pari a

$$W_{mono} = -1.14 \times 10^3 \text{ J} \; > \; W_{bi} = -0.81 \times 10^3 \text{ J} . \tag{26}$$

3. Le trasformazioni sono quasistatiche e senza dissipazione, quindi sono reversibili. Questo implica che la variazione di entropia dell'universo è nulla:

$$\Delta S_{\rm uni} = 0 \, . \tag{27}$$

Essendo $\Delta S_{\rm uni} = \Delta S_{\rm gas} + \Delta S_{\rm amb}$, si ha allora $\Delta S_{\rm gas} = -\Delta S_{\rm amb}$. La variazione di entropia dell'ambiente è facile da calcolare perché l'ambiente scambia calore solo durante la trasformazione isoterma e dal primo principio segue che il calore in questo caso coincide in modulo con il lavoro compiuto. Dato che nella compressione il calore è ceduto dal gas all'ambiente, la variazione di energia dell'ambiente è positiva e vale

$$\Delta S_{amb} = \frac{|W_{AB}|}{T_A} = nR \ln(V_A/V_B) = 18.7 \text{ J/K} \, . \tag{28}$$

Ne segue che il gas diminuisce la sua entropia nella stessa quantità:

$$\Delta S_{gas} = -\Delta S_{amb} = -18.7 \text{ J/K} \, . \tag{29}$$

È interessante notare che questi risultati non dipendono dal fatto che il gas sia monoatomico o biatomico.

Soluzione esercizio II.2

1. All'equilibrio la risultante delle forze verticali agenti sul tappo deve essere nulla. Dato che la forza dovuta alla pressione non è altro che la pressione stessa per l'area del tappo, si trova

$$P_e = P_0 + mg/A. \tag{30}$$

dove P_e è la pressione d'equilibrio del gas e P_0 è la pressione esterna. La pressione indotta dal peso del tappo, mg/A, vale 1.96×10^4 Pa equivalenti a circa 0.2 atm, che si aggiungono alla pressione atmosferica.

2. Uno spostamento verticale x del tappo a partire dalla posizione di equilibrio corrisponde ad una variazione $dV = Ax$ del volume occupato dal gas, a cui corrisponderà a sua volta una variazione dP della pressione interna. Avendo assunto che le trasformazioni sono adiabatiche quasistatiche, sappiamo che PV^γ =costante e dunque, differenziando, si avrà

$$V_e^\gamma dP + \gamma V_e^{\gamma-1} P_e dV = 0 \tag{31}$$

da cui

$$dP = -\frac{\gamma P_e}{V_e} dV \tag{32}$$

e ricordando la relazione tra dV e x:

$$dP = -\frac{\gamma P_e A}{V_e} x \, . \tag{33}$$

Qui abbiamo usato il pedice e per indicare le quantità prima dello spostamento, alla posizione di equilibrio iniziale del tappo. Nel nostro caso $V_e = V_0$.

3. Quando il tappo è spostato dall'equilibrio la pressione interna è diversa da quella esterna. Dato che quest'ultima rimane costante, la forza esercitata sul tappo a seguito dello spostamento sarà $F = AdP$, dove dP è la variazione di pressione interna calcolata al punto precedente. Quindi la forza è proporzionale allo spostamento x e l'equazione del moto può essere scritta nella forma $ma = F = -kx$ dove

$$k = \gamma \frac{P_e A^2}{V_0} = \gamma \left(P_0 + \frac{mg}{A} \right) \frac{A^2}{V_0}. \tag{34}$$

4. L'equazione del moto ha come soluzione un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$. Usando il risultato precedente si ottiene

$$\gamma = \frac{m\omega^2 V_0}{A^2(P_0 + mg/A)} = 1.8 \; . \tag{35}$$