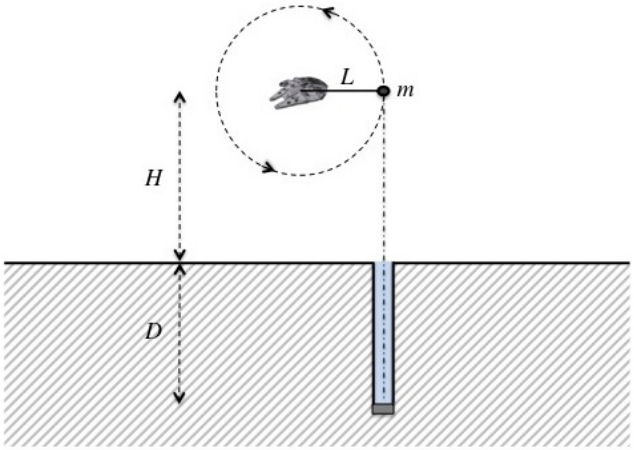
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2011-2012, 8 gennaio 2013

Esercizio I.1



Luke Skywalker deve distruggere una base missilistica segreta dell'esercito della Morte Nera. La base si trova in un bunker sotterraneo sul pianeta Kejim. Luke è a bordo di una navicella di massa $m = 4000$ kg, legata all'astronave Millennium Falcon da un cavo di lunghezza $L = 100$ m. Il Millennium Falcon è fermo ad un'altezza $H = 1$ km dalla superficie di Kejim, mentre la navicella di Luke ruota attorno ad esso in un piano verticale in senso antiorario, come in figura [nota: le distanze in figura non sono in scala]. Ad un certo istante, quando il cavo è orizzontale, la navicella viene sganciata e lasciata libera di muoversi a motore spento. Al momento dello sgancio la navicella ha velocità angolare $\omega = 0.346$ rad/s e si trova sulla verticale del pozzo di lancio dei missili. Il pianeta è privo di atmosfera e la sua accelerazione di gravità, $g = 2$ m/s^2, può essere considerata costante sulla scala di distanze rilevanti al problema. Il pozzo è riempito fino all'orlo da un fluido che oppone una resistenza al moto di tipo viscoso, con coefficiente di attrito $\beta = K\eta = 40$ kg/s.

a) Si calcoli la tensione del cavo al momento dello sgancio.

b) Si calcoli la velocità con cui la navicella entra nel pozzo.

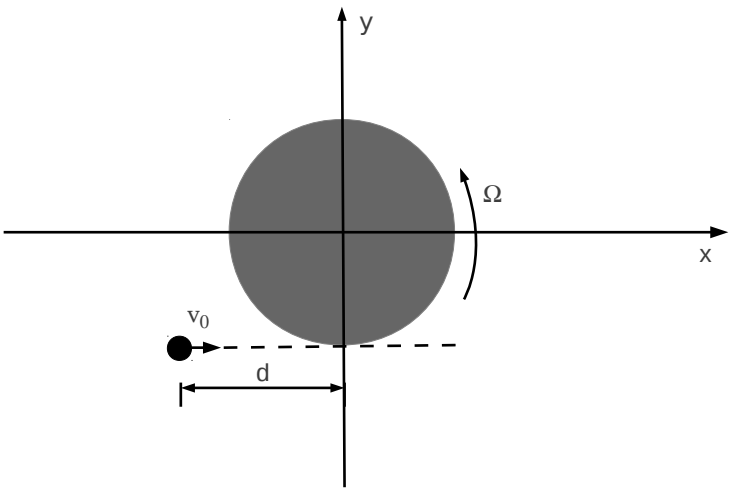
c) Si scriva l'equazione del moto per la velocità della navicella nel pozzo e si calcoli la velocità limite.

d) Se il bunker viene colpito dopo un tempo $t = 50$ s dall'ingresso del pozzo, qual'è la velocità d'impatto e la profondità D?

e) Se il bunker è in grado di resistere ad un impatto massimo corrispondente ad un impulso di 5×10^5 kg m/s, e l'urto è elastico, riesce la navetta a

distruggere il bunker? E se l'urto fosse completamente anelastico?
f) Qual è il lavoro fatto dalla forza di attrito lungo il pozzo?

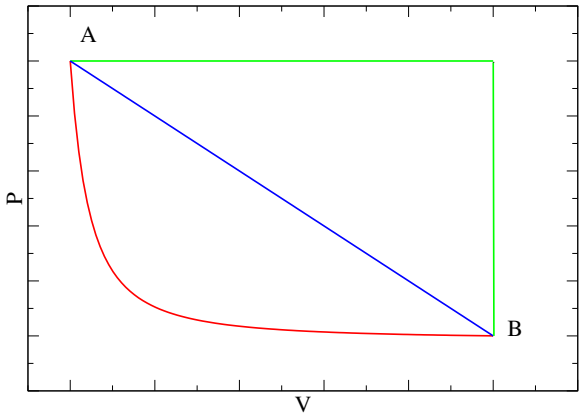
Esercizio I.2



Al tempo $t_0 = 0$ un disco di massa M e raggio R posto su un piano orizzontale ruota in senso antiorario attorno ad un asse verticale passante per il suo centro di massa con velocità angolare costante Ω. Il disco non è vincolato al piano. Contemporaneamente un punto materiale di massa m si trova a distanza d dal bordo del disco e si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0 su una linea tangente al bordo del disco come in figura. Ad un certo istante t_u il punto collide col disco e vi rimane attaccato. Utilizzando i valori numerici $M = 10.0$ kg $\quad R = 12.5$ cm $\quad \Omega = 33.0$ giri/min $\quad m = 3.8$ kg $\quad v_0 = 4.5$ km/h, rispondere alle seguenti domande.
a) Scrivere l'equazione del moto del centro di massa del sistema disco-punto materiale e determinarne la legge oraria utilizzando il sistema di coordinate riportato in figura.
b) Determinare il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa del sistema stesso.
c) Calcolare la velocità angolare del corpo (unico) dopo l'urto.
d) Quanta energia è stata dissipata nell'urto?

Si consideri ora il caso in cui il disco sia imperniato nel suo centro di massa.
e) Quali sono le grandezze fisiche che si conservano in questo caso?
f) Determinare dopo l'urto la legge oraria del centro di massa e la velocità angolare del corpo.
g) Quali sono le forze impulsive e qual'è il lavoro da loro fatto stavolta?

Esercizio II.1



Una massa di gas compie una trasformazione passando da uno stato iniziale A ad uno stato finale B. La trasformazione è schematizzabile come nel grafico sopra riportato. Sono possibili tre differenti percorsi per avere lo stesso risultato:
a. una trasformazione isobara (a pressione costante) seguita da una trasformazione isocora (a volume costante);
b. una trasformazione "in linea retta" in cui il volume e la pressione variano linearmente;
c. una trasformazione adiabatica.
Confrontare le varie trasformazioni calcolando i lavori compiuti ed i calori scambiati nei tre percorsi sapendo che $P_A = 32$ bar, $P_B = 1$ bar, $V_A = 1$ l, $V_B = 8$ l. Si usi $\gamma = 5/3$.

Esercizio II.2
Si abbia un sistema chiuso costituito da un cilindro contenente aria compressa. La parete superiore sia costituita da un pistone mobile, supposto di massa trascurabile, su cui poggia un peso opportuno. Il sistema contenga inizialmente $m_a = 10$ kg d'aria a $T_i = 27$C e $P_i = 10$ atm, e la pressione ambiente esterna valga $P_a = 1$ bar. Ad un certo punto si dimezza improvvisamente il peso gravante sul pistone, il quale si solleva fino a raggiungere una nuova posizione di equilibrio. Si assuma il processo adiabatico e si consideri l'aria come un gas ideale con densità molare pari a 28.97 kg/kmol. Si calcoli
a) la temperatura finale dell'aria;
b) il lavoro eseguito;
c) l'aumento di entropia dell'aria.

Si prenda $\gamma = 5/3$.

Soluzione esercizio I.1

a) Al momento dello sgancio la navicella di massa m è nel punto indicato in figura, con il cavo in direzione orizzontale, e si sta muovendo con velocità verticale $L\omega$. Nell'istante immediatamente precedente lo sgancio, le forze che agiscono sulla navicella sono due: la forza peso dovuta alla gravità del pianeta e la tensione del cavo, F. La prima è verticale ed è responsabile dell'accelerazione g; la seconda è orizzontale ed è interamente responsabile dell'accelerazione centripeta, tramite la relazione

$$F = ma_c = mL\omega^2 \ .$$

Usando i valori numerici assegnati si trova

$$F = mL\omega^2 = 4000 \text{ Kg} \times 100 \text{ m} \times (0.346 \text{ rad/s})^2 = 4.78864 \times 10^4 \text{ N} \ .$$

b) Dopo lo sgancio sulla navicella agisce soltanto la forza peso, che è conservativa. Conviene quindi ricorrere alla conservazione dell'energia meccanica. Se mettiamo il riferimento dell'energia potenziale a livello del suolo del pianeta, l'energia meccanica iniziale è $(1/2)mL^2\omega^2 + mgH$, mentre quella al momento dell'ingresso nel pozzo sarà $(1/2)mv^2$. La conservazione dell'energia ci dà quindi

$$v^2 = L^2\omega^2 + 2gH \ .$$

Usando i valori numerici assegnati si trova

$$v = \sqrt{L^2\omega^2 + 2gH} = \sqrt{(100 \times 0.346)^2 + 4000} \text{ m/s} = 72.091 \text{ m/s}$$

c) Durante la caduta del pozzo le forze che agiscono sulla navicella sono la forza peso e l'attrito viscoso, entrambe verticali. Considerando come positivo il verso discendente, possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma

$$ma = mg - \beta v \ ,$$

ovvero

$$m(dv/dt) = mg - \beta v \ ,$$

oppure ancora

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\left(v - \frac{mg}{\beta}\right) \ .$$

Possiamo identificare la velocità limite con il secondo addendo nella parentesi

$$v_l = \frac{mg}{\beta} \ ,$$

in modo che l'accelerazione

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}(v - v_l)$$

si annulla quando $v = v_l$. Con i valori numerici assegnati si ha

$$v_l = \frac{mg}{\beta} = \frac{8000}{40} \text{ m/s} = 200 \text{ m/s} .$$

d) Per calcolare la velocità d'impatto occorre integrare l'equazione del moto. Lo si può fare per separazione di variabili. In particolare, si può scrivere

$$\frac{dv}{v - v_l} = -\frac{\beta}{m}dt$$

e integrare

$$\int \frac{dv}{v - v_l} = -\frac{\beta}{m}\int dt$$

ottenendo

$$\log|v - v_l| = -\frac{\beta}{m}t + c$$

dove abbiamo posto a $t = 0$ l'istante d'ingresso nel pozzo. Essendo $v < v_l$, si ha

$$\log(v_l - v) = -\frac{\beta}{m}t + c$$

da cui

$$v_l - v = A\exp[-\frac{\beta t}{m}]$$

con $A = e^c$ costante d'integrazione. La costante si fissa sapendo che al momento dell'ingresso nel pozzo la velocità era nota, già calcolata al punto b) precedente. Se la indichiamo con v_0 e inseriamo $t = 0$ nella soluzione, otteniamo

$$v_l - v_0 = A$$

e infine

$$v = v_l - (v_l - v_0)\exp[-\frac{\beta t}{m}] .$$

Dato che l'impatto con il bunker avviene dopo 50 secondi, la velocità sarà

$$v = [200 - (200 - 72.091)\exp(-\frac{40 \times 50}{4000})] \text{ m/s} = 122.42 \text{ m/s} .$$

Lo spazio percorso nel pozzo si ottiene integrando ulteriormente:

$$x = \int v dt = \int [v_l - (v_l - v_0)\exp(-\frac{\beta t}{m})]dt ,$$

ovvero

$$x = v_l t - (m/\beta)(v_l - v_0)[1 - \exp(-\frac{\beta t}{m})] \ .$$

Inserendo i valori numerici si può calcolare $D = x(t = 50\text{s})$, ottenendo

$$D = 4967 \text{ m} \ .$$

e) Se l'urto contro la parete del bunker è elastico, e nell'ipotesi che la parete resista al colpo (cioè rimanga in quiete), la navicella semplicemente rimbalzerà invertendo il segno della velocità. Dunque la sua variazione di quantità di moto sarà esattamente il doppio della quantità di moto iniziale. L'impulso trasferito alla parete sarà quindi $2mv = 2 \times 4000 \times 122.42$ kg m/s, ovvero 979360 kg m/s, che è maggiore dell'impulso ammissibile. Dunque la parete cede e il bunker viene distrutto.

Se l'urto è perfettamente anelastico, e nell'ipotesi che la navicella rimanga schiacciata sulla parete e questa rimanga ferma, si ottiene una variazione di quantità di moto pari a mv, la metà del caso precedente. A questa corrisponde un uguale impulso trasferito alla parete, ovvero $mv = 4000 \times 122.42$ kg m/s $= 489680$, di poco inferiore all'impulso ammissibile. La parete resiste.

f) La forza d'attrito è l'unica forza non conservativa in gioco. Il lavoro che svolge può quindi essere calcolato a partire dalla variazione di energia meccanica. All'ingresso del pozzo l'energia meccanica era $(1/2)mv_0^2$, mentre un attimo prima dell'impatto con il bunker vale $(1/2)mv^2 - mgD$. Quindi il lavoro compiuto dall'attrito è

$$W = \Delta E = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) - mgD = -2.0157 \times 10^7 \text{ J} \ .$$

Ovviamente si tratta di un lavoro negativo, consistentemente con il fatto che l'energia meccanica viene dissipata.

Soluzione esercizio I.2

a) Non si hanno forze esterne al sistema disco-punto e quindi l'equazione del moto del centro di massa è banalmente

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0. \tag{1}$$

La quantità di moto del sistema si conserva e quindi

$$\mathbf{P} = (m + M)\mathbf{v}_{cm} = mv_0\hat{\mathbf{x}}. \tag{2}$$

Il modulo della velocità del centro di massa risulta: $v_{cm} = 0.35$m/s Da cui, date le condizioni iniziali e considerando il sistema di riferimento di Fig. , la legge oraria risulta essere quella di un moto lineare uniforme

$$\mathbf{r}_{cm}(t) = x_{cm}\hat{\mathbf{x}} + y_{cm}\hat{\mathbf{y}} = \frac{m}{m+M}((-d + v_0 t)\hat{\mathbf{x}} - R\hat{\mathbf{y}}), \quad \forall\ t \in [t_0, \infty) \quad (3)$$

b) Il momento angolare si conserva non essendovi forze esterne.

Trattandosi di due corpi, il momento angolare rispetto al centro di massa si può scrivere subito come la somma del momento angolare di moto relativo e dei momento angolari intrinseci. In questo caso in particolare il momento angolare L_z è diretto lungo il versore $\hat{\mathbf{z}}$ uscente dal piano x-y e vale

$$L_z = \mu v_0 R + I\Omega = 0.7 \text{ kg m}^2/\text{s} \quad (4)$$

dove $\mu = mM/(m+M)$ è la massa ridotta ed $I = (1/2)MR^2$ il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse di rotazione.

In modo più diretto infatti si ha che L_z è la somma dei momenti angolari del punto materiale e del corpo rigido rispetto al centro di massa del sistema:

$$L_z = m(v_0 - v_{cm})\left(R - \frac{mR}{m+M}\right) + Mv_{cm}\frac{mR}{m+M} + I\Omega \quad (5)$$

che si riduce al risultato eq. (4).

c) Dopo l'urto il corpo ruota attorno al suo centro di massa. Il momento angolare rispetto al centro di massa si scrive:

$$L_z = I'\Omega' + m(R - y_{cm})^2\Omega', \quad (6)$$

dove $I' = I + My_{cm}^2$ è il momento d'inerzia del disco rispetto al centro di massa del sistema e Ω' la velocità angolare dopo l'urto. Comparando eq.(4) con la precedente si ottiene

$$\Omega' = \frac{\mu v_0 R + I\Omega}{\mu R^2 + I} = 5.78 \text{ rad/s} \quad (7)$$

d) L'energia dissipata ΔE è semplicemente la differenza tra l'energia finale e quella iniziale, ossia

$$\begin{aligned} \Delta E = E_f - E_i &= \frac{1}{2}(m+M)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I'\Omega'^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2\right) \\ &= -0.6\text{J} \end{aligned} \quad (8)$$

e) In questo caso si conserva solo il momento angolare rispetto il centro di massa del disco.

f) La velocità angolare dopo l'urto si determina come prima tramite conservazione del momento angolare. Questa volta si ha:

$$L_z(t_0) = L_z(t) \quad \rightarrow \quad mv_0R + I\Omega = (I + mR^2)\Omega', \tag{9}$$

da cui

$$\Omega' = 6.3 \text{ rad/s} \tag{10}$$

.

Dopo l'urto il moto del centro di massa é di tipo circolare uniforme:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{mR}{m+M}(\sin(\Omega' t)\hat{\mathbf{x}} - \cos(\Omega' t)\hat{\mathbf{y}}). \tag{11}$$

g) Le forze impulsive sono quelle interne durante l'urto e la reazione del perno. Il lavoro W da loro fatto è pari alla variazione di energia cinetica.

$$\begin{aligned} W = E_f - E_i &= \frac{1}{2}I\Omega'^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{mR}{m+M}\Omega'\right)^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2\right) \\ &= -1.8 \text{ J}. \end{aligned} \tag{12}$$

Soluzione esercizio II.1

Essendo l'energia interna una funzione di stato la sua variazione è indipendente dal percorso fatto. Dal primo principio si ha inoltre $dU = \delta Q - pdV$ e quindi per la trasformazione adiabatica la variazione di energia interna è uguale ed opposta al lavoro fatto.

I lavori fatti nelle varie trasformazioni sono i seguenti.

a. Il lavoro in questa trasformazione viene fatto dal sistema sull'ambiente solo nel tratto orizzontale e vale semplicemente:

$$W_a = P_A(V_B - V_A) = 32 \times 10^5 \text{ Pa } (8-1) \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 22400 \text{ J} \tag{13}$$

b. Nel caso lineare, avendo a disposizione i volumi e le pressioni dello stato iniziale e finale, ed essendo il lavoro uguale all'area sottesa dal segmento AB nel diagramma (un trapezio in questo caso), il lavoro si può scrivere come

$$W_b = \frac{1}{2}(P_A + P_B)(V_B - V_A) = 11500 \text{ J} \tag{14}$$

c. Per una trasformazione adiabatica si ha $PV^{5/3}$ =cost. Il lavoro sarà rappresentabile quindi come:

$$\begin{aligned} W_c = \int_A^B PdV &= \int_A^B \frac{P_A V_A^{5/3}}{V^{5/3}} dV = -\frac{3}{2}P_A V_A^{5/3}(V_B^{-2/3} - V_A^{-2/3}) \\ &= \frac{3}{2}(P_A V_A - P_B V_B) = 3600 \text{ J}\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Poiché in una trasformazione adiabatica $Q_c = 0$ si ha $\Delta U = -W_c = -3600$ J.

Grazie all'ultimo risultato possiamo determinare i calori scambiati nelle altre due trasformazioni:

$$Q_a = \Delta U + W_a = (-3600 + 22400) \text{ J} = 18800 \text{ J} ; \quad (16)$$
$$Q_b = \Delta U + W_b = (-3600 + 11500) \text{ J} = 7950 \text{ J} . \quad (17)$$

Soluzione esercizio II.2

L'equilibrio iniziale e finale ci dice che

$$2Mg = A(P_i - P_a) \quad (18)$$
$$Mg = A(P_f - P_a) \quad (19)$$

dove M è la massa del peso che viene sollevato. Risolvendo il sistema di equazioni per l'incognita P_f si ottiene

$$P_f = \frac{P_i + P_a}{2} = 5.5 \text{ bar} . \quad (20)$$

a) Essendo il processo adiabatico non si ha scambio di calore. Detto i lo stato iniziale ed f quello finale si ha dal primo principio della termodinamica

$$W_{if} = -\Delta U = U_i - U_f . \quad (21)$$

Essendo un gas ideale l'energia interna è funzione solo della temperatura e si può scrivere

$$W_{if} = nc_v(T_i - T_f) . \quad (22)$$

D'altra parte il lavoro fatto dal gas W_{if} è uguale e opposto al lavoro fatto dalle forze esterne. Il lavoro delle forze esterne è la somma del lavoro compiuto dalla pressione esterna, $L_{pe} = -P_a(V_f - V_i)$ e dalla gravità, $L_g = -Mg(h_f - h_i)$ con $h_f - h_i$ pari alla variazione di altezza del pistone nell'espansione. Tenendo conto della relazione scritta sopra, $Mg = A(P_f - P_a)$, si ottiene $L_g = -A(P_f - P_a)(h_f - h_i) = -(P_f - P_a)(V_f - V_i)$. Quindi il lavoro fatto dall'aria risulta essere

$$W_{if} = P_a(V_f - V_i) + (P_f - P_a)(V_f - V_i) = P_f(V_f - V_i) = RP_f\left(\frac{T_f}{P_f} - \frac{T_i}{P_i}\right) . \quad (23)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione di stato del gas ideale, $PV = nRT$. Uguagliando le due espressioni appena ottenute per W_{if} si ottiene un'equazione per la temperatura finale incognita:

$$c_v(T_i - T_f) = P_f R\left(\frac{T_f}{P_f} - \frac{T_i}{P_i}\right) \quad (24)$$

da cui, con semplici passaggi algebrici e usando la definizione $\gamma = c_p/c_v = 1 + (R/c_v)$, si ottiene

$$T_f = T_i \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_F}{P_i} \right) = 246.1 \text{ K} . \tag{25}$$

b) Data la densità molare e la massa si ottiene il numero di moli in questo modo

$$n = \frac{10 \text{ kg}}{28.97 \text{ kg kmol}} = 0.345 \text{ kmol} \tag{26}$$

da cui si ottiene

$$W_{if} = U_i - U_f = nc_v(T_i - T_f) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_i - T_f) = 232.5 \text{ kJ} . \tag{27}$$

c) La variazione di entropia del gas ideale è

$$\Delta S = nc_v \ln(T_f/T_i) + nR \ln(V_f/V_i) \tag{28}$$

oppure equivalentemente

$$\Delta S = nc_p \ln(T_f/T_i) - nR \ln(P_f/P_i) \tag{29}$$

Quest'ultima può essere scritta in termini di γ:

$$\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln(T_f/T_i) - nR \ln(P_f/P_i) \tag{30}$$

ovvero

$$\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right) = 0.29 \text{ kJ/K} . \tag{31}$$