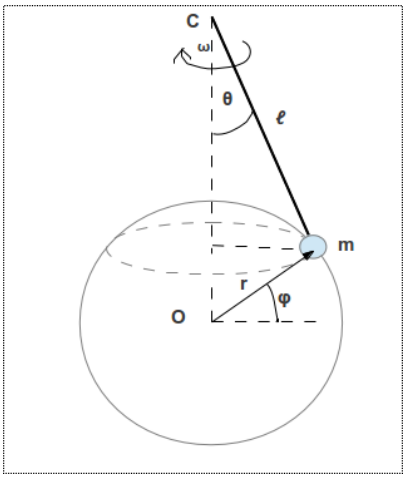
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2012-2013, 12 luglio 2013

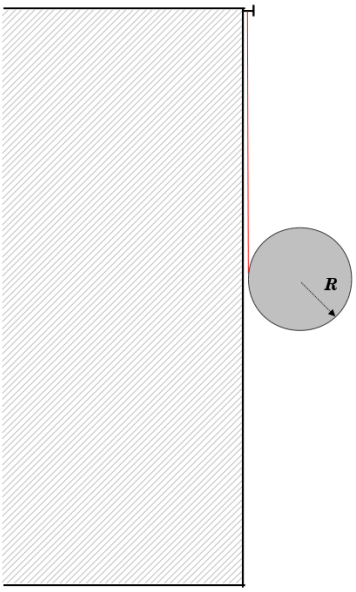
Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Un corpo puntiforme di massa $m = 500$ g è vincolato al soffitto tramite un'asta di massa trascurabile e di lunghezza $\ell = 140$ cm, incernierata nel punto C e rispetto al quale può ruotare liberamente in ogni direzione. Il corpo si trova a contatto con una sfera, di raggio $r = 70$ cm e centro O ed è in rotazione a velocità $\omega_0 = 2$ rad/s attorno all'asse verticale passante per O e C, come indicato in figura. L'asta descrive un cono di apertura $\theta = 0.4$ rad. Nell'ipotesi che il contatto tra particella e sfera sia privo di attrito, calcolare:
a) l'accelerazione centripeta della particella;
b) la reazione dell'asta e la reazione vincolare esercitata dalla sfera;
c) la massima velocità angolare della particella oltre la quale avviene il distacco dalla superficie;
d) il momento angolare della particella rispetto al centro della sfera.
e) Si supponga che ad un certo istante il contatto tra particella e sfera diventi scabro; il coefficiente di attrito dinamico sia $\mu_d = 0.4$. Calcolare il tempo di arresto della particella e il lavoro svolto dalla forza di attrito.

Esercizio I.2



Una corda, inestensibile e di massa trascurabile, è avvolta intorno ad un cilindro di raggio $R = 0.5$ m e massa $M = 1$ kg. L'estremo libero della corda è fissato tramite un chiodo ad una parete verticale, come mostrato in figura, ed il cilindro viene lasciato libero di cadere, mentre la corda si srotola senza scivolare. Determinare

a) con quale accelerazione cade il centro di massa del cilindro;

b) la tensione della fune.

Si consideri invece il caso in cui, anziché appendere la corda al chiodo, l'estremo libero della corda venga tirato verso l'alto verticalmente con accelerazione a_l, mentre il cilindro cade.

c) Determinare il valore che deve avere a_l affinché il centro di massa del cilindro rimanga fermo.

d) Se la corda è lunga $l = 1$ m, calcolare quanto deve essere a_l affinché la corda si srotoli completamente dal cilindro in un tempo pari ad $t_l = 1$ s ed indicare se in questo spazio il cilindro riesce a compiere un giro completo.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1
Un blocco di ghiaccio di massa $m = 100$ g alla temperatura $T_g^0 = 263$ K viene inserito in un recipiente con pareti rigide e adiabatiche contenente 1 kg di acqua pura alla temperatura $T_a^0 = 400$ K e pressione $P = 1$ atm.
Sapendo che il calore specifico del ghiaccio e del vapore sono circa uguali, $c_g \simeq c_v \simeq 0.5$ cal/(gK), il calore latente di fusione è $\lambda_{g\to l} = 80$ cal/g e il calore latente di ebollizione è $\lambda_{l\to v} = 540$ cal/g, si determinino:
a) lo stato finale del sistema;
b) la variazione di entropia del sistema.

Esercizio II.2
Il ciclo Diesel a 4 tempi è composto dalle seguenti trasformazioni (trascurando l'immissione e l'emissione dei gas):
AB: compressione adiabatica;
BC: espansione reversibile isobara;
CD: espansione adiabatica;
DA: reversibile isocora.

Sapendo che i volumi relativi ai vari stati sono rispettivamente:

$$V_A = 2 \text{ l} \quad V_B = 0.1 \text{ l} \quad V_C = 0.8 \text{ l} \,. \tag{1}$$

a) Disegnare il diagramma P-V del ciclo Diesel.
b) Determinare il rendimento del ciclo in termini del rapporto di compressione e di combustione;
c) Determinare la variazione di entropia del gas soggetto al ciclo.
d) Perché il rapporto di compressione è più alto in un motore Diesel rispetto ad un motore Otto? Perché il motore Diesel gira più lentamente del motore Otto?

Soluzione esercizio I.1

a) L'accelerazione centripeta della particella è quella propria di un corpo in moto su traiettoria circolare di raggio $\ell \sin\theta$ e velocità angolare ω_0. Perciò si ha:

$$a_n = \omega_0^2 \ell \sin\theta \simeq 2.18 \text{ m/s}^{-2} . \tag{2}$$

b) Conviene scrivere le equazioni del moto nelle due direzioni orizzontale e verticale, approfittando del fatto che l'accelerazione ha solo componente orizzontale. Chiamiamo **R** la reazione dell'asta, esercitata nella direzione dell'asta stessa, e **N** la reazione vincolare esercitata dalla superficie della sfera in direzione radiale. Si noti che l'angolo tra l'asta e la verticale è θ, mentre l'angolo tra il raggio e l'orizzontale è φ. Gli angoli φ e θ sono legati dalla relazione $\cos\varphi = (\ell/r)\sin\theta$, che si ricava esprimendo il raggio dell'orbita come proiezione di ℓ e di r in direzione orizzontale. Dunque, le due equazioni del moto diventano

$$ma_n = R\sin\theta - N\cos\varphi \; ; \qquad 0 = -mg + N\sin\varphi + R\cos\theta \; ; \tag{3}$$

da cui si ottengono i risultati:

$$N = m\frac{(g\sin\theta - a_n\cos\theta)}{\cos(\varphi - \theta)} \simeq 0.94 \text{ N} \tag{4}$$

e

$$R = m\frac{(g\cos\varphi + a_n\sin\varphi)}{\cos(\varphi - \theta)} \simeq 4.7 \text{ N} . \tag{5}$$

c) Se la rotazione avviene a velocità angolare maggiore, l'accelerazione centripeta aumenta e la reazione vincolare N diminuisce. Il caso limite si ottiene quando N si annulla, cioè quando $a_n\cos\theta = g\sin\theta$. Per velocità maggiori occorrerebbe un N negativo per mantenere il corpo aderente alla sfera. Ma la natura del vincolo non lo permette e, quindi, il corpo si alza. Dunque si può scrivere

$$N = m\frac{(g\sin\theta - a_n\cos\theta)}{\cos(\varphi - \theta)} \geq 0 \;\Rightarrow\quad \omega_l \leq \sqrt{g/(l\cos\theta)} \simeq 2.8 \text{ rad/s} , \tag{6}$$

avendo usato l'espressione già trovata al punto a) per l'accelerazione centripeta. Notiamo che al valore critico della velocità angolare, dove N si annulla, la reazione dell'asta R è il solo vincolo, sufficiente a compensare la forza peso nella direzione verticale e a produrre l'accelerazione centripeta nella direzione orizzontale. Si poteva calcolare la velocità critica anche imponendo una di queste condizioni a piacere, il risultato essendo lo stesso.

d) Il momento angolare della particella è pari al prodotto vettoriale tra il raggio vettore dal centro della sfera alla particella, e la quantità di moto della

particella. Chiamata d la distanza dall'asse, ed essendo $d = r\cos\varphi = \ell\sin\theta$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= d\,(\cos\omega_0 t, -\sin\omega_0 t, \tan\varphi) \qquad (7)\\ \mathbf{v} &= -\omega_0 d\,(\sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t, 0) \qquad (8) \end{aligned}$$

nella condizione per cui a $t = 0$ il corpo si trovi sull'asse x. Svolgendo il prodotto vettoriale troviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m\mathbf{r}\times\vec{\mathbf{v}} = -md^2\omega_0\,(-\tan\varphi\cos\omega_0 t, \tan\varphi\sin\omega_0 t, 1)\\ &= -I\omega_0\,(-\tan\varphi\cos\omega_0 t, \tan\varphi\sin\omega_0 t, 1)\ . \qquad (9) \end{aligned}$$

Com'era giusto aspettarsi, la componente z del momento angolare è il prodotto del momento d'inerza del corpo per rotazioni attorno all'asse e la sua velocità angolare; è negativa perché la rotazione avviene in senso orario. Le altre due componenti rendono conto della precessione del vettore $\mathbf{L}$ attorno all'asse.

e) Diversamente dal caso c), dove all'aumentare di ω la reazione N diminuiva fino ad annullarsi, in questo caso l'attrito rallenta il corpo diminuendo ω e, quindi, aumentando N. Per studiare il moto conviene limitarsi alla direzione tangenziale all'orbita, che è la direzione in cui agisce la forza d'attrito. Senza perdere di generalità possiamo anche considerare positivo il verso dei vettori nella direzione verticale, così da considerare $\omega(t)$ come una quantità positiva che decresce da $\omega(0) = \omega_0$ fino a $\omega(t_f) = 0$ per effetto dell'attrito, secondo la legge $m(dv/dt) = F_{\rm attr}$, ovvero:

$$m\ell\sin\theta\frac{d\omega}{dt} = -\mu_d N\ . \qquad (10)$$

Ora ricordiamo dal punto b) che

$$N = m\frac{(g\sin\theta - a_n\cos\theta)}{\cos(\varphi-\theta)} = m\sin\theta\frac{\big(g - \omega^2\ell\cos\theta\big)}{\ell\cos(\varphi-\theta)} \qquad (11)$$

da cui

$$\frac{d\omega}{dt} = -\mu_d\frac{\big(g - \omega^2\ell\cos\theta\big)}{\ell\cos(\varphi-\theta)} \qquad (12)$$

È un'equazione differenziale che si ricolve per separazione di variabili. Possiamo chiamare $a^2 = (\ell/g)\cos\theta$ e $b = \mu_d g/[\ell\cos(\varphi-\theta)]$. Allora l'equazione diventa

$$\frac{d\omega}{dt} = -b(1 - a^2\omega^2)\ . \qquad (13)$$

Ora si può integrare tra gli estremi ω_0 e $\omega(t_f) = 0$ e $t_0 = 0$ e $t = t_f$:

$$\int_{\omega_0}^{0}\frac{d\omega}{1-a^2\omega^2} = -b\int_0^{t_f} dt \qquad (14)$$

ottenendo

$$\int_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{1-a\omega} + \int_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{1+a\omega} = -2bt_f \tag{15}$$

e il risultato finale

$$\left(\frac{1}{a}\right) ln\left(\frac{1-a\omega_0}{1+a\omega_0}\right) = -2bt_f \ . \tag{16}$$

Quindi il tempo di arresto è

$$t_f = \frac{1}{2ab} ln\left(\frac{1+a\omega_0}{1-a\omega_0}\right) \ . \tag{17}$$

e inserendo i valori numerici si ottiene $t_f \simeq 0.87$ s.

Il lavoro è dato dalla variazione di energia cinetica visto che le altre forze non compiono lavoro. In particolare, vista la condizione di quiete finale, è uguale al valore dell'energia cinetica iniziale cambiato di segno:

$$W = -E_k = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}m\omega_0^2\ell^2 \sin^2\theta \simeq -0.297 \text{ J} \ . \tag{18}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Quando l'estremo superiore della corda è fissato alla parete, il cilindro scende, srotolando la corda, con un moto di puro rotolamento rispetto alla corda stessa, che può essere assimilato ad un moto di puro rotolamento lungo una parete verticale. Conviene scrivere le due equazioni cardinali

$$Ma = Mg - T \tag{19}$$

$$I\alpha = TR \tag{20}$$

dove T è la tensione della corda, $I = (1/2)MR^2$ è il momento d'inerzia del cilindro per rotazioni attorno ad un asse passante per il suo CM. La condizione di puro rotolamento ci dà $R\alpha = a$. Quindi

$$Ma = Mg - T \tag{21}$$

$$Ia/R = TR \, . \tag{22}$$

Ricavando T dalla prima e inserendolo nella seconda, si ottiene

$$a = \frac{g}{1+\frac{I}{MR^2}} = \frac{2}{3}\, g \simeq 6.54 \text{ m/s}^2 \ . \tag{23}$$

Un metodo alternativo corrisponde a considerare un asse passante per P, punto istantaneo di contatto corrispondente al punto in cui la corda si stacca dalla superfice del cilindro, e applicare la legge

$$I_P\alpha = RMg \ . \tag{24}$$

dove I_P è il momento d'inerzia del cilindro per rotazioni attorno all'asse passante per P e α è l'accelerazione angolare, la stessa di prima. Il momento d'inerzia invece può essere calcolato con il teorema di Steiner:

$$I_P = I_{\rm cm} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \ . \tag{25}$$

Inserendolo nell'equazione precedente si ottiene

$$\frac{3}{2}MR^2\frac{a}{R} = RMg \tag{26}$$

da cui si arriva allo stesso risultato di prima:

$$a = \frac{2}{3}\ g \ . \tag{27}$$

b) Per ricavare T basta ritornare alle equazioni scritte all'inizio del punto precedente e inserire nella prima il risultato appena trovato per l'accelerazione a. Si ottiene

$$T = Mg\left(1 - \frac{1}{1+\frac{I}{MR^2}}\right) = Mg\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}Mg \simeq 3.27 \text{ N} \ . \tag{28}$$

c) La corda sganciata dalla parete viene tirata verso l'alto in modo da avere un accelerazione in modulo pari ad a_l. Prendiamo un asse delle coordinate diretto verso il basso in modo che l'accelerazione del cilindro che cade, a, sia positiva e che l'accelerazione della corda, $-a_l$, sia negativa. Poi osserviamo che, anche in questo caso, il cilindro segue un moto di puro rotolamento rispetto alla corda; stavolta però la velocità, v con cui scende il cilindro non è data solo da $R\omega$ ma dalla differenza $r\omega - v_l$, dove v_l è la velocità di traslazione della corda. Quindi

$$\omega R = v + v_l \tag{29}$$

e derivando rispetto al tempo si ha

$$R\alpha = a + a_l \ . \tag{30}$$

Le equazioni cardinali del moto nel sistema di riferimento inerziali sono le stesse scritte al punto a). Con la nuova condizione di rotolamento, appena scritta, le equazioni diventano

$$Ma = Mg - T \tag{31}$$

$$I(a+a_l)/R = TR \ . \tag{32}$$

Eliminando T e risolvendo per a, si ottiene

$$a = \frac{g - \frac{I}{MR^2}a_l}{1 + \frac{I}{MR^2}} = \frac{2}{3}\left(g - \frac{a_l}{2}\right) \ . \tag{33}$$

Da questo risultato segue che l'accelerazione del cilindro è nulla quando

$$a_l = 2g \ . \tag{34}$$

In tal caso, se all'istante iniziale la corda era ferma e il disco pure, allora il CM del disco rimane fermo anche durante la fase di srotolamento della corda.
Notiamo che il problema poteva anche essere risolto mettendosi nel sistema di riferimento non inerziale solidale con la corda che accelera verso l'alto. La condizione di rotolamento è la stessa di prima. Nell'equazione del moto si tratterebbe di inserire una forza apparente diretta verso il basso, di modulo Ma_l. Il risultato sarà lo stesso.

d) Il centro di massa si muove di moto uniformamente accelerato con accelerazione a. Il CM del cilindro percorre quindi una distanza pari a $l = \frac{1}{2}at^2$. Inserendo i valori assegnati di l e t otteniamo $a = 2$ m/s^2. L'accelerazione a_l può essere ricavata da a ricordando la relazione trovata al punto precedente:

$$a = \frac{2}{3}\left(g - \frac{a_l}{2}\right) \ , \tag{35}$$

da cui

$$a_l = 2g - 3a \simeq 13.6 \text{ m/s}^2 \ . \tag{36}$$

Nello spazio di 1 m il cilindro compie un numero n di giri pari a:

$$n = \frac{l}{2\pi R} = 0.3$$

quindi non riesce a completare nemmeno un giro.

Soluzione esercizio II.1

a) L'acqua all'equilibrio a pressione atmosferica e temperatura $T_a^0 = 400K$ si trova in fase di vapore, essendo T_a^0 maggiore della temperatura di ebollizione. A contatto con il ghiaccio, il vapore fornisce il calore necessario alla fusione. Dato il rapporto delle masse tra ghiaccio e vapore (1/10) possiamo ragionevolmente ipotizzare che il ghiaccio fonda completamente (se anche non si facesse questa assunzione, potremmo arrivare alla stessa conclusione sulla base dei calcoli). Separiamo dunque il processo complessivo nei seguenti sottoprocessi:

i) *Il ghiaccio si porta alla temperatura di fusione* $T_f = 273.15K$.
Calore necessario:

$$Q_{g1} = mc_g(T_f - T_g^0) = 0.5 \text{ kcal} . \tag{37}$$

Questo calore è fornito dalla massa M di acqua in stato di vapore che si porta dalla temperatura iniziale $T_a^0 = 400K$ ad una temperatura finale T_a^1, con $-Q_{g1} = Mc_v(T_a^1 - T_a^0)$. Sapendo che $c_v \simeq c_g$, si ottiene

$$T_a^1 = T_a^0 - \frac{Q_{g1}}{Mc_v} = 398 \text{ K} . \tag{38}$$

ii) *Il ghiaccio fonde.*
Calore necessario:

$$Q_f = m\lambda_{g\to l} = 8 \text{ kcal} . \tag{39}$$

Il vapore raggiunge la temperatura

$$T_a^2 = T_a^1 - \frac{Q_f}{Mc_v} = 382 \text{ K} . \tag{40}$$

iii) *La massa m raggiunge la temperatura di evaporazione* $T_e = 373.15K$.
Calore necessario:

$$Q_{g2} = mc_a(T_e - T_f) = 10 \text{ kcal} \tag{41}$$

dove il calore specifico della fase liquida è $c_a = 1$ cal/(gK).
Ammesso che la massa calda M possa fornire tale calore, rimane il dubbio se questo avvenga in modo che M rimanga tutta in fase di vapore, oppure condensi parzialmente o totalmente in liquido. Supponiamo che rimanga tutta in fase di vapore. Allora il calcolo della temperatura finale del vapore darebbe

$$T_a^3 = T_a^2 - \frac{Q_{g2}}{Mc_v} = 362 \text{ K} , \tag{42}$$

che però è un temperatura inferiore a quella di evaporazione/condensazione, T_e. Dunque, la massa M non può rimanere tutta in fase di vapore. Raggiungerà la temperatura T_e e poi, in parte, passerà allo stato liquido.

iv) *La massa M raggiunge la temperatura di evaporazione.*
Il calore ceduto dal vapore per raffreddarsi da T_a^2 a T_e vale

$$Q_v = Mc_v(T_e - T_a^2) = -4.9 \text{ kcal} . \tag{43}$$

Tale calore è ceduto alla massa m di acqua, che così raggiunge la temperatura

$$T_g^1 = T_f + \frac{|Q_v|}{mc_a} = 322.3 \text{ K}. \tag{44}$$

v) *Parte della massa M si porta nello stato liquido.*
Il calore necessario alla massa m per passare da T_g^1 a T_e vale

$$Q_e = mc_a(T_e - T_g^1) = 5 \text{ kcal} \,. \tag{45}$$

Questo calore fa condensare una quantità di vapore ΔM pari a

$$\Delta M = \frac{Q_e}{\lambda_{l\to v}} = 10 \text{ g} \,. \tag{46}$$

Quindi lo stato finale del sistema corrisponde alla coesistenza di $990g$ di vapore e $110g$ di liquido alla temperatura di $T_e = 373.15K$.

b) La variazione di entropia si calcola considerando trasformazioni reversibili in cui la massa d'acqua m si scalda da T_g^0 a T_f, poi fonde, poi si scalda da T_f a T_e, mentre la massa M si raffredda da T_a^0 a T_e, e poi si condensa parzialmente. Dunque:

$$\Delta S_m = mc_g \log\left(\frac{T_f}{T_g^0}\right) + \frac{Q_f}{T_f} + mc_a \log\left(\frac{T_e}{T_f}\right) = 261 \text{ J/k} \tag{47}$$

e

$$\Delta S_M = Mc_v \log\left(\frac{T_e}{T_a^0}\right) - \frac{|Q_e|}{T_e} = -201 \text{ J/k} \tag{48}$$

e infine

$$\Delta S = \Delta S_m + \Delta S_M = 60 \text{ J/k} \,, \tag{49}$$

che è positiva, come dev'essere.

Soluzione esercizio II.2

b) ...

b) I rapporti di compressione e combustione sono rispettivamente:

$$r = V_A/V_B = 20, \quad ; \; \alpha = V_C/V_B = 8. \tag{50}$$

Si deve esprimere il rendimento, rapporto tra lavoro fatto e calore assorbito,

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} \tag{51}$$

in termini solo di r ed α. Il calore viene scambiato solo durante le trasformazioni B-C e D-A, essendo assorbito lungo l'isobara (riscaldamento) e ceduto lungo l'isocora (raffreddamento). I calori scambiati si possono scrivere come:

$$Q_{\text{ass}} = nc_p(T_C - T_B) \quad ; \; Q_{\text{ced}} = nc_v(T_A - T_D). \tag{52}$$

Utilizzando l'equazione di stato di un gas ideale $PV \propto T$ per eliminare le temperature, il rendimento risulta essere:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{P_A V_A}{P_B V_B}\frac{1 - P_D/P_A}{\alpha - 1}. \tag{53}$$

Le relazioni tra pressioni e volumi si determinano utilizzando il fatto A-B e C-D sono adiabatiche. In particolare $P_A/P_B = (V_B/V_A)^\gamma$ e $P_D/P_A = P_B/P_A(V_C/V_A)^\gamma$. Sostituendo nell'equazione per il rendimento si trova la relazione

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}\gamma}\frac{\alpha^\gamma - 1}{\alpha - 1} = 0.64\ . \tag{54}$$

c) La variazione di entropia totale in un ciclo é nulla. Inoltre l'entropia non varia lunghe le trasformazioni adiabatiche e dunque $\Delta S_{BC} = -\Delta S_{DA}$. Determiniamo ad esempio la variazione lungo l'isocora:

$$\Delta S_{DA} = \int_{\text{rev } DA} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_D}^{T_A} \frac{n c_v dT}{T} = n c_v \ln\frac{T_A}{T_D} = -n c_p \ln\alpha. \tag{55}$$

Quindi per la variazione di entropia per mole di gas risulta $\Delta S_{DA}/n = 42.3$ J/(K mol), dove si è considerato il gas come monoatomico per cui $c_p = 5/2R$.

d) ...