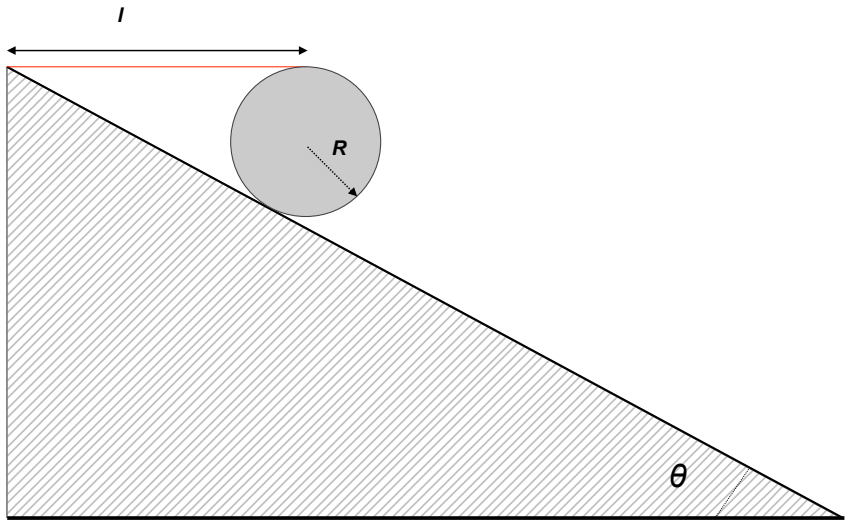
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2012-2013, 17 giugno 2013

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1
Un corpo di dimensioni trascurabili e di massa $m = 1.5$ kg è appeso al soffitto del vagone di un treno per mezzo di un filo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L = 30$ cm. Il treno sta accelerando lungo un binario rettilineo orizzontale con accelerazione costante a_t e il corpo appeso si trova nella sua posizione di equilibrio, con il filo che forma un angolo $\theta_0 = 16$ gradi rispetto alla verticale.
a) Si calcoli l'accelerazione del treno a_t e la tensione del filo F.
b) Usando il principio di equivalenza (e senza scrivere le equazioni del moto del pendolo), si calcoli il periodo T delle piccole oscillazioni attorno all'angolo di equilibrio.
c) Facoltativo: si calcoli lo stesso periodo di oscillazione usando esplicitamente l'equazione del moto del pendolo.

Ad un certo istante t_0 l'accelerazione cessa e il treno prosegue a velocità costante. Come prima, assumiamo che al tempo t_0 il corpo appeso si trovi in quiete rispetto al treno, con il filo inclinato all'angolo θ_0.
d) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica del corpo e se ne calcoli il valore.
e) Si scriva l'espressione della velocità in funzione dell'angolo e se ne tracci qualitativamente il grafico.
f) Si supponga che, quando il corpo passa per la prima volta sulla verticale il filo si rompa. Partendo da una quota $H = 2$ m dal suolo, calcolare quanti metri più avanti il corpo toccherà il pavimento rispetto alla verticale dal punto di rottura.

Esercizio I.2



Una cilindro di raggio $R = 13.4$ cm e massa M poggia su un piano inclinato di un angolo di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale (vedi Fig.A). Il cilindro è inizialmente mantenuto in quiete per mezzo di una corda di lunghezza $l = 50$ cm, tesa orizzontalmente e tangente al cilindro, agganciata al piano e al cilindro stesso.

a) Calcolare il minimo valore $\mu_{s,\min}$, che il coefficiente di attrito statico, tra cilindro e piano inclinato, deve avere affinché tale configurazione di equilibrio sia possibile.

Successivamente la corda viene tagliata di netto e il cilindro inizia a rotolare senza scivolare lungo il piano inclinato.

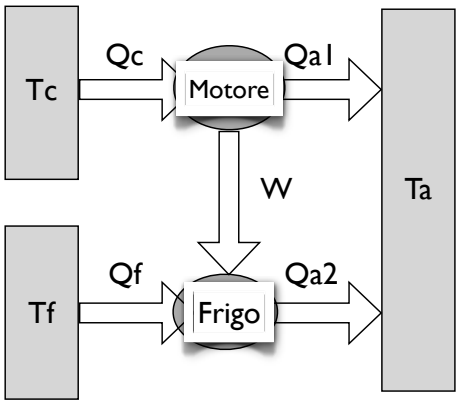
b) Supponendo che il piano sia sufficientemente lungo, determinare la velocità del centro di massa del cilindro dopo che questo ha compiuto 5 giri completi. Si esegua il calcolo sia utilizzando le equazioni del moto, che l'energia.

c) Quale deve essere il valore minimo del coefficiente di attrito statico per avere moto di puro rotolamento?

d) Supponendo il disco invece possa scivolare, rispondere alla domanda b), assumendo un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.1$.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1



Una macchina frigorifera di Carnot (quella in basso in figura con l'etichetta Frigo) estrae ad ogni ciclo una quantità di calore Q_f da un serbatoio a temperatura $T_f = 280$ K e cede un calore Q_{a2} all'ambiente a temperatura $T_a = 300$ K. Il lavoro necessario al frigorifero viene fornito da un'altra macchina di Carnot (qualla in alto con l'etichetta Motore) che opera tra una sorgente calda a temperatura $T_c = 450$ K e l'ambiente, scambiando rispettivamente i calori Q_c e Q_{a1}. Sapendo che $Q_f = 150$ cal, si determinino:
a) il rendimento della macchina termica (Motore) ed il coefficiente di prestazione della macchina frigorifera (Frigo);
b) il lavoro W ed i calori Q_c, Q_{a1} e Q_{a2}
c) la variazione di entropia di tutti gli elementi del sistema e quella dell'universo, in ogni ciclo.

Esercizio II.2

Si considerino n moli di elio (He) soggette ad un ciclo composto da 3 trasformazioni reversibili. Le trasformazioni AB e BC sono politropiche, cioè seguono la legge $PV^\gamma =$ costante con, rispettivamente, $\gamma_{AB} = 5$ e $\gamma_{BC} = 4$, e la trasformazione CA é isocora. Sapendo che $n = 3$, $V_B = 1$ l, $P_B = 10$ atm e $V_A = 1.5$ l, rappresentare il ciclo in un diagramma $P - V$ e determinare per ogni trasformazione:
a) il calore scambiato;
b) il lavoro compiuto dal gas;
c) la variazione di energia interna;
d) la variazione di entropia;

Soluzione esercizio I.1

a) Conviene usare come sistema di riferimento quello solidale con il vagone che accelera. Dato che si tratta di un sistema di riferimento non inerziale, occorre includere nella condizione di equilibrio anche la forza apparente $-ma_t$, orizzontale. L'equilibrio è determinato dall'annullarsi della risultante delle forze che agiscono sulla massa:

$$m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_t + \mathbf{F} = 0 \tag{1}$$

dove $\mathbf{g}$ è l'accelerazione di gravità e $\mathbf{F}$ è la tensione del filo. Essendo $\mathbf{g}$ verticale, $\mathbf{a}_t$ orizzontale e $\mathbf{F}$ diretto lungo il filo, ne risulta che l'inclinazione del filo deve coincidere con quella della diagonale del rettangolo formato dai vettori $m\mathbf{g}$ e $m\mathbf{a}_t$. Dunque deve essere

$$\tan\theta_0 = a_t/g \tag{2}$$

ovvero

$$a_t = g\tan\theta_0 = (9.8\mathrm{m/s}^2)\tan 16^\circ = 2.81\ \mathrm{m/s}^2 \tag{3}$$

e il modulo della tensione del filo si ricava dal teorema di Pitagora:

$$F = m\sqrt{g^2 + a_t^2} = 15.29\ \mathrm{N}\ . \tag{4}$$

b) Per il principio di equivalenza il pendolo si comporta come un usuale pendolo semplice ma in un campo di gravità modificato dalla forza apparente. La nuova accelerazione di gravità efficace è diretta lungo la direzione individuata dall'angolo di equilibrio θ_0 e ha modulo $g' = \sqrt{g^2 + a_t^2} = 10.195\ \mathrm{m/s}^2$. Quindi il periodo del pendolo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}} = 1.078\ \mathrm{s}\ . \tag{5}$$

Notiamo che, se l'accelerazione a_t fosse nulla, il periodo sarebbe pari a 1.099 s. Il rapporto tra i due valori coincide con il rapporto $\sqrt{g/g'}$.

c) Volendo calcolare lo stesso periodo a partire dalle equazioni del moto, il calcolo risulta più complicato. Infatti, l'equazione del moto lungo la direzione tangenziale è

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta + ma_t\cos\theta \tag{6}$$

ovvero

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{a_t}{L}\cos\theta = 0\ . \tag{7}$$

Ricordando che $\tan\theta_0 = a_t/g$, possiamo riscriverla così :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\left(\sin\theta - \frac{\cos\theta\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right) = 0 \tag{8}$$

ovvero

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L\cos\theta_0}\left(\sin(\theta-\theta_0)\right) = 0\ . \tag{9}$$

Se introduciamo l'angolo $\theta' = \theta - \theta_0$ possiamo scrivere l'equazione

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{g}{L\cos\theta_0}\sin\theta' = 0 \tag{10}$$

che diventa un'equazione armonica per piccoli angoli θ':

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} + \frac{g}{L\cos\theta_0}\theta' = 0\ . \tag{11}$$

Le soluzioni sono periodiche con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta_0}{g}}\ . \tag{12}$$

Ora ricordiamo la relazione trigonometrica $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{1+\tan^2\theta_0}$, che nel nostro caso implica $\cos\theta_0 = 1/\sqrt{1+(a_t/g)^2}$. Inserendo questa relazione nell'espressione precedente, si ritrova il risultato di prima: $T = 2\pi\sqrt{L/g'}$.

d) In assenza di accelerazione del treno, le uniche forze che agiscono sul corpo sono la forza di gravità, conservativa, e la tensione del filo, che non compie lavoro. Quindi l'energia meccanica si conserva e la sua espressione è la seguente:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1-\cos\theta) \tag{13}$$

dove θ è sempre l'angolo misurato rispetto alla verticale e la velocità può essere scritta nella forma $v = L(d\theta/dt)$. Il suo valore può essere calcolato al tempo t_0, dove si ha

$$E = mgL(1-\cos\theta_0) = 0.171\ \text{J}\ , \tag{14}$$

avendo fissato i riferimento dell'energia potenziale a $\theta = 0$.

e) Dalla conservazione dell'energia mecccanica segue

$$v(\theta) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - mgL(1-\cos\theta)\right)} \tag{15}$$

il cui grafico è mostrato in figura. Il valore massimo è

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0.477 \text{ m/s} \,. \tag{16}$$

f) Si tratta di un semplice problema balistico, le cui equazioni orarie sono

$$x(t) = v_x t \tag{17}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \tag{18}$$

dove x e y sono le coordinate orizzontale e verticale, con origine nel punto in cui il corpo si stacca dal filo. La velocità iniziale è orizzontale e il suo valore coincide con la velocità massima calcolata al punto precedente. Eliminando il tempo dalle due leggi orarie si ottiene la traiettoria

$$y(x) = -\frac{g}{2v_{\max}^2} x^2 \tag{19}$$

e imponendo la condizione $y = -H$ si ottiene lo spazio percorso orizzontalmente prima di toccare il suolo:

$$x = \sqrt{\frac{2Hv_{\max}^2}{g}} = 0.305 \text{ m} \,. \tag{20}$$

Soluzione esercizio I.2

Le soluzioni degli esercizi I.2, II.1 e II.2 sono in fase di preparazione.