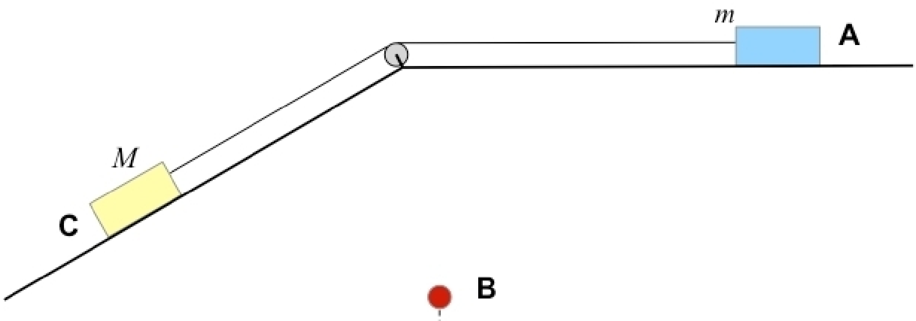
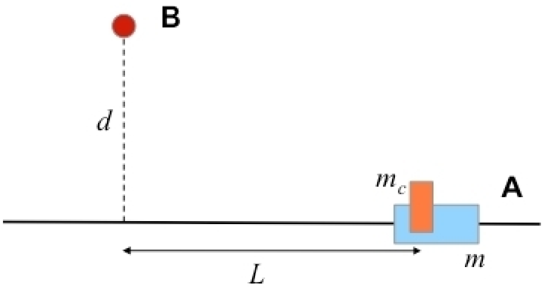
Fisica Generale I (primo e secondo modulo)
A.A. 2012-2013, 29 gennaio 2013

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1





Un carrello A di massa $m = 500$ kg può scivolare lungo un binario rettilineo privo di attriti posto su un piano orizzontale. Il carrello è tirato da una fune inestensibile e di massa trascurabile, fissata all'altro estremo ad un corpo C di massa $M = 2000$ kg appoggiato ad un piano liscio ed inclinato ad un angolo di 30°. La fune scorre su una carrucola di massa trascurabile. Calcolare:
1. l'accelerazione del carrello A;
2. il lavoro eseguito dalle forze esterne dopo che il carrello C, partendo da fermo, ha percorso una distanza pari a 100 m sul piano inclinato.
3. Se sul carrello A inizialmente era appoggiato un carico di massa $m_c = 600$ kg e il coefficiente di attrito statico tra il carico e il carrello è $\mu_s = 0.4$, qual'è l'accelerazione del carrello? Il carico rimane fermo sul carrello?
4. Al posto del carico appoggiato, si consideri un cannoncino fissato rigidamente al carrello, avente la stessa massa m_c, in grado di sparare un proiettile perpendicolarmente al binario e con un angolo di tiro regolabile rispetto al piano orizzontale. Il proiettile esce ad una velocità $v_1 = 48$ m/s, relativa al cannone stesso, e deve colpire un bersaglio B situato a distanza $d = 200$ m dal binario e alla stessa quota del carrello. Quanto dovrà essere l'angolo di

tiro (alzo) del cannone affinchè il proiettile colpisca il bersaglio? E quant'è il tempo di volo?
5. Se il carrello parte da fermo da una distanza $L = 600$ m dal punto del binario più vicino al bersaglio, dopo quanto tempo dovrà sparare il cannone e quali saranno la sua posizione e velocità al momento dello sparo?

Esercizio I.2

In un saloon è in corso una sparatoria. Uno dei proiettili viene sparato orizzontalmente in direzione dell'ingresso, dove si trova la classica porta da saloon, costituita da due ante battenti in legno, incernierate sui cardini tramite molle torsionali. Il proiettile arriva perpendicolarmente ad una delle ante e si conficca in prossimità del suo bordo libero, mettendola in rotazione. La molla torsionale posizionata sui cardini, sul bordo opposto, ha coefficiente di torsione $C = 33$ Nm/rad. L'anta sia approssimabile come un parallelepipedo omogeneo di massa $M = 9$ kg, a faccia quadrata di lato $L = 70$ cm e spessore h trascurabile. Il proiettile ha massa $m = 20$ g e velocità $v_0 = 100$ m/s. Si trascurino gli attriti sui cardini e si consideri che l'anta all'inizio era ferma, all'equilibrio e con la molla torsionale scarica. Chiamiamo asse z l'asse di rotazione dell'anta.
1. Si calcoli il momento angolare L del sistema rispetto ad un punto qualsiasi dell'asse z, in un istante immediatamente successivo l'impatto con il proiettile, e la velocità angolare con cui l'anta si mette in rotazione.
2. Si scriva l'equazione del moto del sistema dopo l'impatto e la soluzione della stessa.
3. Si calcoli il periodo di oscillazione dell'anta e l'angolo massimo.
4. Si calcoli l'energia cinetica persa nell'impatto e l'energia meccanica del sistema.
5. Si calcolino le tre componenti, centripeta, tangenziale e verticale, della forza con cui l'anta trattiene il proiettile, e se ne tracci il grafico in funzione del tempo.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso:

Esercizio II.1
Si considerino $n = 0.2$ moli di elio (^{4}He, gas ideale monoatomico) alla pressione iniziale di $P_0 = 2.5$ atm e temperatura $T_0 = 200$ K. Si supponga poi di far espandere adiabaticamente il gas con due diverse modalità: i) nel primo caso tramite una trasformazione reversibile fino ad una pressione $P_f = 1$ atm; ii) nel secondo caso tramite una trasformazione irreversibile eseguita contro una pressione esterna costante $P_{\text{ext}} = 1$ atm. Per entrambe le trasformazioni si determini:
1. la temperatura finale del gas;
2. la variazione di energia interna del gas.
3. Si confrontino e commentino i risultati.

Esercizio II.2
L'acqua sotto-raffreddata è acqua liquida raffreddata sotto il suo punto di fusione normale. Questo stato è termodinamicamente instabile e l'acqua tende a trasformarsi in ghiaccio spontaneamente.
Supponiamo di avere $n = 2$ moli di acqua sotto-raffreddata che si sta trasformando in ghiaccio a $T_0 = -10°$C e $P = 1$ atm.
1. Discutere se il processo è reversibile.
Si consideri poi la seguente sequenza di trasformazioni reversibili per portare l'acqua sotto-raffreddata allo stato solido: i) riscaldamento dell'acqua da T_0 alla temperatura di fusione $T_f = 0°$C; ii) solidificazione dell'acqua in ghiaccio; iii) raffreddamento del ghiaccio per tornare a T_0. Sapendo che il calore specifico molare per l'acqua è 75.3 J/(K mol), per il ghiaccio 37.7 J/(K mol), il calore latente di fusione è $\lambda = 333.5$ J/g calcolare la variazione di entropia
2. del sistema;
3. dell'ambiente;
4. dell'universo.

Soluzione esercizio I.1

1. Sia x la coordinata spaziale del carrello A lungo il binario e z la coordinata verticale. Nessuna delle forze ha componenti lungo y e il moto del sistema è confinato al piano xz. Se T è la tensione della fune e N_A la reazione vincolare esercitata dal piano orizzontale, le due equazioni del moto per il corpo A, nella direzione x e nella direzione z, sono

$$\begin{aligned} ma &= T & (1) \\ 0 &= N_A - mg \, . & (2) \end{aligned}$$

La seconda equazione fissa il valore di N_A, ma non è rilevante ai fini del calcolo dell'accelerazione a.

Analogamente per le componenti x e z dell'accelerazione del corpo C possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} Ma \cos\alpha &= N \sin\alpha - T \cos\alpha & (3) \\ Ma \sin\alpha &= Mg - N \cos\alpha - T \sin\alpha & (4) \end{aligned}$$

dove $\alpha = 30°$ e N è la reazione vincolare esercitata dal piano inclinato. Moltiplicando la prima equazione per $\cos\alpha$, la seconda per $\sin\alpha$ e sommando, si ottiene

$$Ma = Mg \sin\alpha - T \qquad (5)$$

che, combinata con l'equazione (1), dà

$$a = \frac{M}{M+m} g \sin\alpha = 3.92 \text{ m/s}^2 \, . \qquad (6)$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto direttamente, senza scrivere le equazioni del moto, osservando che il sistema si comporta a tutti gli effetti come un corpo unico di massa $M+m$ che trasla rigidamente con accelerazione a, soggetto ad un'unica forza esterna di intensità $Mg \sin\alpha$ (le altre forze essendo forze interne oppure reazioni vincolari perpendicolari al moto).

2. Il calcolo del lavoro è semplice perché la forza esterna $Mg \sin\alpha$ è costante:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Fs = Mgs \sin\alpha = 9.8 \times 10^5 \text{ J} \qquad (7)$$

Lo stesso risultato si può ottenere usando il teorema delle forze vive. A tale scopo ci serve sapere la velocità al tempo finale. Il moto dei due corpi è uniformemente accelerato. Lo spazio percorso segue la legge

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 \qquad (8)$$

e il tempo necessario per percorrere una distanza s sarà dunque $t = \sqrt{2s/a}$. La velocità segue la legge

$$v(t) = at \tag{9}$$

e, dunque, dopo un tratto di lunghezza s, vale $v = \sqrt{2as}$. L'energia cinetica del sistema composto dalle masse A e C, inizialmente nulla, subisce un incremento $\Delta E_k = (1/2)(M+m)v^2 = (M+m)as$ che è anche pari al lavoro compiuto dalle forze esterne:

$$W = \Delta E_k = (M+m)as = 9.8 \times 10^5 \text{ J} \tag{10}$$

come prima.

3. Nel caso in cui ci sia un carico appoggiato al carrello bisogna tenere conto anche della sua massa nel calcolo dell'accelerazione. Nell'ipotesi che il carico rimanga fermo rispetto al carrello, l'unica modifica da fare al calcolo già svolto al punto 1 consiste nel sostituire m con $m + m_c$. Quindi la nuova accelerazione è

$$a = \frac{M}{m + m_c + M} g \sin\alpha = 3.16 \text{ m/s}^2 \ . \tag{11}$$

Per verificare se la condizione di equilibrio del carico sul carrello è soddisfatta, si può impostare il problema di statica del carico sia nel sistema di riferimento inerziale che, equivalentemente, nel sistema non inerziale solidale con il carrello. Nel primo caso, si tratta di scrivere l'equazione del moto del carico di massa m_c nel sistema inerziale, in cui si impone a priori che l'accelerazione sia la stessa del carrello. L'unica forza che agisce in orizzontale sul carico, tale da produrre l'accelerazione a, è la forza F esercitata dal piano del carrello (il carico non è legato alla fune). Dunque dev'essere $F = m_c a$. Per garantire l'equilibrio, tale forza dev'essere minore di $\mu_s N_c$, dove N_c è la reazione voncolare esercitata dal piano d'appoggio, uguale in modulo al peso del carico, $N_c = m_c g$. In conclusione, dev'essere

$$F = m_c a \leq \mu_s m_c g \tag{12}$$

ovvero

$$a \leq \mu_s g = 3.92 \text{ m/s}^2 \ . \tag{13}$$

Dal risultato (11) si vede che tale condizione è effettivamente verificata. Il carico rimane fermo sul carrello.

Nel caso in cui si voglia usare il sistema di riferimento solidale con il carrello, basta imporre che l'accelerazione del carico (rispetto al carrello, appunto) sia nulla; quindi la forza F esercitata dal carrello sul carico dev'essere esattamente compensata dalla forza apparente $-m_c a$. Si ha ancora $F = m_c a$ e tutto il resto è uguale a prima, incluso il risultato.

4. Sia t_0 l'istante dello sparo. Dopo lo sparo l'unica forza che agisce sul proiettile (trascurando l'attrito con l'aria) è la forza peso, che agisce solo lungo la direzione verticale z. La velocità iniziale del proiettile ha componenti $(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (v_{c0}, v_1 \cos\theta, v_1 \sin\theta)$, essendo v_{c0} la velocità orizzontale del carrello lungo il binario al tempo t_0, quando lo stesso si trova in $x = x_0$. Le leggi orarie per il moto balistico sono quindi:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + v_{c0}(t - t_0) && (14)\\
y &= v_1 \cos\theta \ (t - t_0) && (15)\\
z &= v_1 \sin\theta \ (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \ . && (16)
\end{aligned}
$$

La prima è irrilevante per il calcolo del tempo di volo e dell'alzo. Nelle altre due possiamo inserire i dati del bersaglio, $y = d$ e $z = 0$:

$$
\begin{aligned}
d &= v_1 \cos\theta \ (t - t_0) && (17)\\
0 &= v_1 \sin\theta \ (t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \ . && (18)
\end{aligned}
$$

Dalla seconda otteniamo il solito tempo di volo del problema balistico

$$
t_v = (t - t_0) = \frac{2v_1}{g} \sin\theta \tag{19}
$$

che inserito nella prima dà

$$
d = \frac{2v_1^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_1^2}{g} \sin 2\theta \tag{20}
$$

ovvero

$$
\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{gd}{v_1^2} \right) = 0.5086 \text{ rad} = 29.1^\circ \ , \tag{21}
$$

e il tempo di volo sarà dunque

$$
t_v = \frac{2v_1}{g} \sin\theta = 4.77 \text{ s} \ . \tag{22}
$$

5. Sia $t = 0$ l'istante in cui il carrello parte da fermo nella posizione $x = 0$ e sia t_0 l'istante dello sparo nel punto x_0. Sappiamo che L è la distanza complessiva che il proiettile deve compiere lungo x da $t = 0$ fino al momento in cui colpisce il bersaglio. Tale distanza viene percorsa in due tratti: nel primo tratto il proiettile è solidale al carrello e copre una distanza $x_0 = (1/2)at_0^2$, dove a è l'accelerazione calcolata al punto 3, raggiungendo una velocità $v_{c0} = at_0$; nel secondo tratto il proiettile compie un moto balistico, con velocità costante v_{c0} per un tempo pari al tempo di volo. Dunque

$$
L = x_0 + v_{c0} t_v = \frac{1}{2} a t_0^2 + a t_0 t_v \ , \tag{23}
$$

che possiamo scrivere nella forma

$$t_0^2 + 2t_v t_0 - \frac{2L}{a} = 0 \tag{24}$$

che risolta dà

$$t_0 = -t_v + \sqrt{t_v^2 + \frac{2L}{a}} = 15.3 \text{ s} , \tag{25}$$

da cui si ottengono di seguito

$$x_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 = 369.3 \text{ m} \tag{26}$$

e

$$v_{c0} = a t_0 = 48.3 \text{ m/s} . \tag{27}$$

Soluzione esercizio I.2

1. L'urto tra il proiettile e l'anta della porta è anelastico e in presenza di forze impulsive esterne che agiscono sui cardini. Per questo motivo non si conservano nè l'energia cinetica nè la quantità di moto del sistema. Invece si conserva la componente z del momento angolare rispetto a qualsiasi punto dell'asse z su cui ruotano i cardini. Infatti, in qualsiasi punto dell'asse sia applicata la forza vincolare, il vettore congiungente tale punto con il polo O, anch'esso sull'asse, è un vettore disposto lungo l'asse z. Dunque, la componente z del momento di tale forza rispetto ad O, per definizione di prodotto vettoriale, non può avere componente z diversa da zero. Essendo $\tau_z = 0$, ne segue che L_z si conserva e il suo valore dopo l'urto è uguale al quello prima dell'urto:

$$L_z = L_{z0} = m v_0 L = 1.4 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1} . \tag{28}$$

La velocità angolare si trova scrivendo il momento angolare dopo l'urto come $L_z = I\omega_0$, dove il momento d'inerzia I è quello del sistema anta+proiettile per rotazioni attorno all'asse z:

$$I = I_{anta} + mL^2 = \left(\frac{M}{3} + m\right) L^2 = 1.48 \text{ kgm}^2 . \tag{29}$$

Ora, usando la conservazione del momento angolare si trova

$$\omega_0 = \frac{L_{z0}}{I} = 0.946 \text{ rad/s} . \tag{30}$$

2. Dopo l'impatto l'anta, con il proiettile conficcato, si comporta come un pendolo di torsione, in cui le forze esterne, dovute alla molla di torsione applicata ai cardini, esercitano un momento delle forze proporzionale all'angolo θ misurato rispetto all'angolo di equilibrio. L'equazione del moto sarà dunque

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta \ , \tag{31}$$

dove il segno meno riflette il fatto che si tratta di forze di richiamo. L'equazione del moto può essere riscritta in forma di equazione armonica,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0 \tag{32}$$

con

$$\Omega^2 = \frac{C}{I} \ , \tag{33}$$

la cui soluzione è

$$\theta(t) = A\sin(\Omega t) \ , \tag{34}$$

avendo fissato la fase iniziale con la condizione iniziale $\theta(0) = 0$. L'ampiezza dell'oscillazione periodica, si trova dall'altra condizione iniziale, $\omega(0) = \omega_0$, dove ω_0 è la velocità angolare calcolata al punto 1. Dato che

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = A\Omega\cos(\Omega t) \ , \tag{35}$$

la condizione $\omega(0) = \omega_0$ implica $A = \omega_0/\Omega$.

3. Il periodo di oscillazione si trova dalla pulsazione del moto armonico in questo modo:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 1.33 \text{ s} \ . \tag{36}$$

L'angolo massimo coincide con l'ampiezza dell'oscillazione:

$$\theta_{\max} = A = \frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\omega_0 T}{2\pi} = 0.2 \text{ rad} \ . \tag{37}$$

4. L'energia cinetica perduta nell'impatto è pari alla differenza tra l'energia cinetica iniziale del sistema (quella del proiettile) e quella finale (anta+proiettile). L'energia cinetica iniziale è

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 100 \text{ J} \ , \tag{38}$$

quella finale è

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 0.626 \text{ J} \tag{39}$$

e la differenza

$$|\Delta E_k| = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = 99.37 \text{ J} \ . \tag{40}$$

Notiamo che l'energia rimasta è una frazione molto piccola dell'energia iniziale. L'energia meccanica residua del sistema, a meno di una costante additiva dovuta alla gravità, è pari all'energia cinetica del sistema subito dopo l'impatto

$$E = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = 0.626 \text{ J} . \tag{41}$$

Dato che non agiscono forze non-conservative, tale energia si conserva.

5. Il proiettile conficcato nell'anta compie un moto lungo un arco di circonferenza di raggio L obbedendo all'equazione armonica scritta al punto 2. Nel sistema di riferimento inerziale, il proiettile è una particella con accelerazione centripeta $a_c = L\omega^2$ e accelerazione tangenziale $a_t = L(d\omega/dt)$, essendo $\omega = d\theta/dt$. Tali accelerazioni devono corrispondere ad una forza esercitata dall'anta sul proiettile, le cui componenti saranno

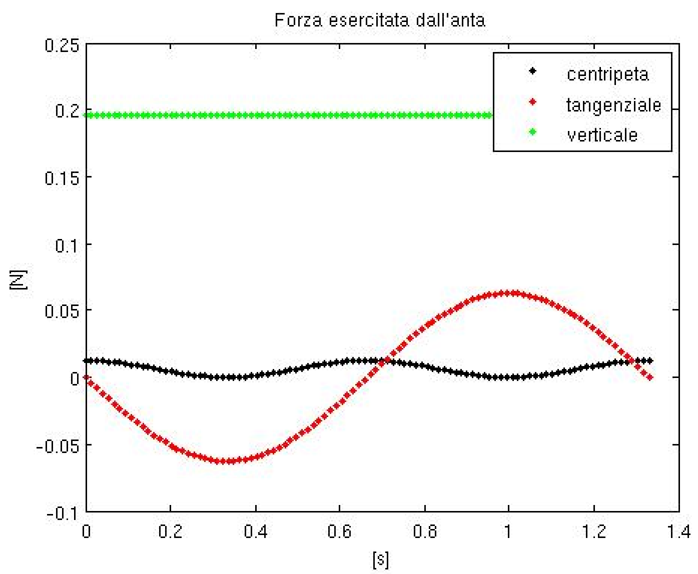
$$F_c = ma_c = mL\omega^2 = mL\omega_0^2 \cos^2(\Omega t) \tag{42}$$

$$F_t = ma_t = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mL\omega_0\Omega \sin(\Omega t) \tag{43}$$

a cui bisogna aggiungere la componente verticale che compensa la forza peso del proiettile:

$$F_z = mg . \tag{44}$$

La forza esercitata dall'anta, istante per istante, è data dal vettore che ha queste tre componenti, il cui andamento nel tempo è riportato in figura.



Soluzione esercizio II.1

La prima trasformazione è un'adiabatica reversibile per cui il prodotto $P^{1-\gamma}T^{\gamma}$ =costante. In particolare:

$$P_0^{1-\gamma}T_0^{\gamma} = P_f^{1-\gamma}T_f^{\gamma} \quad \rightarrow \; T_f = T_0 \left(\frac{P_0}{P_f}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 200 \left(\frac{2.5}{1}\right)^{\frac{1-5/3}{5/3}} \quad K = 138.6 \; K. \tag{45}$$

Dove essendo inoltre il gas monoatomico si ha:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5/2R}{3/2R} = \frac{5}{3}. \tag{46}$$

La variazione di energia interna si calcola facilmente come

$$\Delta U = nc_v\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_f - T_0) = -152.8 \; J. \tag{47}$$

Per la seconda trasformazione dal primo principio abbiamo $\Delta U = -W$ essendo anch'essa adiabatica. Il lavoro fatto durante l'espansione sapendo che l'espansione è contro una pressione esterna costante è dato da

$$\begin{aligned} W &= P_{ext}(V_f - V_0) = P_{ext}nR(T_f/P_f - T_0/P_0) \\ &= P_{ext}nR(T_f/P_{ext} - T_0/P_0), \end{aligned} \tag{48}$$

dove si è usato il fatto che all'equilibrio finale la pressione finale deve esser uguale alla pressione esterna. D'altra parte la variazione di energia interna è $\Delta U = nc_v(T_f - T_0)$ Eguagliando lavoro ed energia si trova

$$T_f = T_0 \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\frac{P_{ext}}{P_0}\right) = 152 \; K \tag{49}$$

Conseguentemente

$$\Delta U = nc_v\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_f - T_0) = -119.5 \; J. \tag{50}$$

Soluzione esercizio II.2

Innanzitutto, osserviamo che una transizione di fase è reversibile soltanto alla temperatura a cui le due fasi sono in equilibrio. Poiché l'acqua sottoraffreddata e il ghiaccio (a $T = -10$°C) non sono in equilibrio, il processo **non** è reversibile.

(i) Il calore infinitesimo scambiato nel riscaldamento reversibile è $\delta Q = nc_{H_2O}dT$ ($c_{H_2O} = 75.3$J/(K mol)) da cui la variazione di entropia risulta:

$$\Delta S = nc_{H_2O}\ln\frac{T_f}{T_0} = 5.6 \; J/K \quad T_f = 273.15 \; K \tag{51}$$

(ii) Nel congelamento la temperatura resta costante (T_f) ed calore scambiato dato dal calore latente si scrive $Q = -m\lambda = np_m\lambda$ dove il peso molecolare di H_2O pari a $p_m = 18$ u.m.a. Si ha dunque

$$\Delta S = \frac{Q}{T_f} = -44\ J/K \tag{52}$$

(iii) La variazione di entropia nel raffreddamento del ghiaccio si calcola come nel punto (i) solo con $c_g = 37.7$J/(K mol) e si trova

$$\Delta S = nc_g \ln \frac{T_0}{T_f} = -2.8\ J/K. \tag{53}$$

La variazione totale di entropia del sistema è la somma delle entropie parziali precedenti: $\Delta S_s = -41.2$ J/K.

La variazione di entropia dell'ambiente che rimane a $T_0 = 263.15$K è data semplicemente dal calore scambiato col sistema nelle tre trasformazioni diviso la temperatura stessa.

(i)

$$Q_i = -nc_{H_2O}(T_f - T_0) = -1500\ J. \tag{54}$$

(ii)

$$Q_{ii} = -np_m\lambda = -12000\ J. \tag{55}$$

(iii)

$$Q_{iii} = nc_g(T_0 - T_f) = 754\ J. \tag{56}$$

Quindi si ottiene:

$$\Delta S_a = \frac{Q_i + Q_{ii} + Q_{iii}}{T_0} = 41.8\ J \tag{57}$$

La variazione di entropia dell'universo varrà quindi

$$\Delta S_u = \Delta S_s + \Delta S_a = 0.6\ J/K > 0. \tag{58}$$