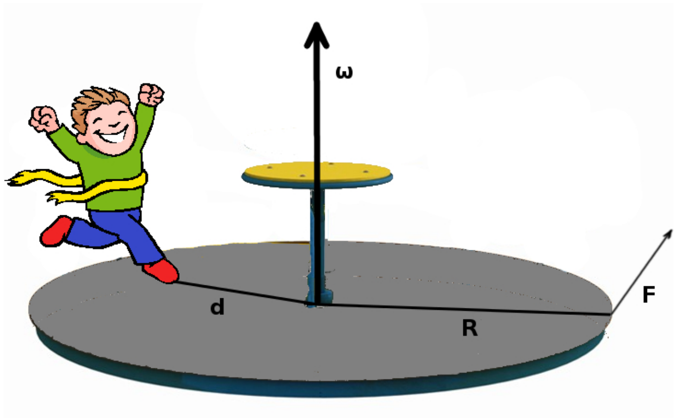
Fisica Generale I
A.A. 2013-2014, 3 Febbraio 2014

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Una giostra è formata da un disco di raggio $R = 1.5$ m e massa $M_G = 200$ Kg capace di ruotare senza alcun attrito attorno all'asse verticale passante per il suo centro O. Un bambino la mette in rotazione dall'esterno, applicando una forza costante $F = 2.5$ N tangente al disco e continuando a spingere fino a che la giostra compie due rotazioni complete, poi smette e la lascia libera di ruotare.

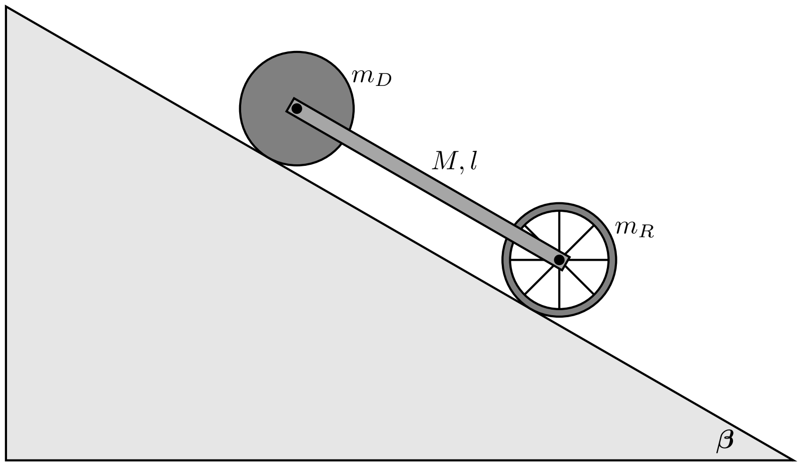
a) Calcolare la velocità angolare di rotazione ω della giostra.

b) Mentre la giostra ruota il bambino decide di saltarci sopra, compiendo un salto in direzione radiale e atterrando ad una distanza $d = 1$ m dal centro. Calcolare la nuova velocità angolare di rotazione della giostra, approssimando il bambino con un punto materiale di massa $M_B = 40$ Kg. Si confronti il risultato con quello che si otterrebbe approssimando il bambino con un cilindro omogeneo di altezza $h = 1$ m, raggio di base $R_B = 20$ cm e stessa massa; qual è la differenza tra le velocità angolari nei due casi?

c) Quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s tra la giostra e il bambino affinché egli possa rimanere fermo rispetto alla giostra?

d) Dopo qualche giro il bambino estrae dalla tasca una biglia, l'appoggia al piano della giostra e, con una schicchera, la lancia con velocità $v' = 55$ cm/s in direzione del centro O (nel suo sistema di riferimento S', solidale con la giostra). Supponendo che la biglia si muova senza alcun attrito, calcolare il tempo che passa tra il lancio e la caduta dal bordo della giostra. Disegnare la traiettoria nel sistema di riferimento S'.

Esercizio I.2



Un disco pieno di massa $m_D = 5$ kg e una ruota sottile di massa $m_R = 1$ kg (con massa dei raggi trascurabile), entrambi omogenei e di uguale raggio R sono posti su un piano inclinato di angolo $\beta = 30°$. Il disco e la ruota rotolano senza strisciare.

a) Supponiamo che il disco e la ruota non siano vincolati tra loro e rotolino indipendentemente l'uno dall'altro lungo il piano, partendo da fermi ad una distanza tra i loro centri di 50 cm. Calcolare le accelerazioni dei loro centri di massa.

b) Dopo quanto tempo il disco raggiungerà la ruota? (Si supponga che i due corpi possano affiancarsi senza toccarsi)

c) Si costruisce una bicicletta rudimentale con il disco e la ruota, che ora sono connessi mediante una sbarra di massa $M = 0.50$ kg e lunghezza $l = 0.5$ m. L'intero sistema è posto sul piano inclinato del punto precedente. Scrivere l'espressione dell'energia cinetica e dell'energia potenziale della bicicletta in funzione della quota e della velocità.

d) Sfruttando il risultato del punto precedente e la conservazione dell'energia meccanica, calcolare l'accelerazione della bicicletta.

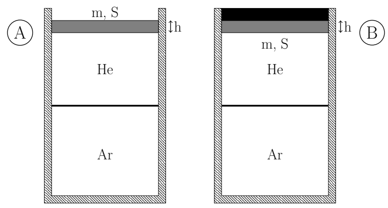
e) (facoltativa) Calcolare le reazioni vincolari che il piano esercita sulla ruota e sul disco. Dare una condizione per il minimo valore del coefficiente d'attrito statico μ_s che deve essere presente sul piano inclinato affinché disco e ruota rotolino senza strisciare.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Un ciclo di Brayton è costituito da due trasformazioni isobare ($A \to B$ e $C \to D$) e da due trasformazioni adiabatiche ($B \to C$ e $D \to A$), tutte reversibili. Due moli di gas ideale monoatomico sono inizialmente nello stato A alla pressione $P_A = 3$ atm e temperatura $T_A = 150$ K. Il gas viene poi portato allo stato B a volume $V_B = 17\,\mathrm{dm}^3$, successivamente nello stato C a volume $V_C = 30\,\mathrm{dm}^3$ ed infine, dopo essere passato per lo stato D, torna allo stato iniziale A.
a) Calcolare per ogni stato temperatura, pressione e volume.
b) Disegnare il diagramma del ciclo nel piano P-V.
c) Calcolare per ogni trasformazione lavoro, calore e variazione di energia interna.
d) Calcolare il rendimento del ciclo.

Esercizio II.2



Un recipiente di sezione $S = 0.01$ m^2 è diviso in due scomparti da un setto mobile di massa trascurabile ed è chiuso da un blocco mobile di poliuretano, di massa $m = 2$ kg e altezza $h = 10$ cm. Il volume inferiore è occupato da una mole di argon, mentre quello superiore da due moli di elio. Inizialmente il sistema è all'equilibrio alla temperatura $T_0 = 300$ K. Il blocco superiore è soggetto dall'alto alla pressione atmosferica.
a) Determinare pressione e volume iniziale dei due gas (stato iniziale A).
Il recipiente viene poi chiuso a contatto con il blocco di poliuretano come in figura.
b) Si ponga lo scomparto con l'argon a contatto con una sorgente a temperatura $T_1^{\mathrm{Ar}} = 400$ K. Supponendo che il setto divisorio mobile non conduca calore, determinare pressione e volume dei due gas una volta raggiunto l'equilibrio.
c) Si permetta adesso il passaggio di calore attraverso il setto intermedio e, sapendo che il poliuretano ha un coefficiente di dilatazione termica pari a $k = 10^{-4}$ K^{-1}, calcolare la pressione ed il volume dei due gas all'equilibrio (stato finale B).
d) Qual è la variazione di entropia dei due gas dallo stato iniziale A allo stato finale B?

Soluzione esercizio I.1

a) L'equazione del moto per la giostra è

$$I\alpha = RF \ . \tag{1}$$

Usando l'espressione del momento d'inerzia di un disco, $I = (1/2)M_G R^2$, si ottiene l'espressione per l'accelerazione angolare della giostra

$$\alpha = \frac{2F}{M_G R} \ . \tag{2}$$

L'accelerazione è costante e quindi l'angolo descritto dalla giostra cresce nel tempo secondo la legge

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \ . \tag{3}$$

Il tempo impiegato a compiere due giri ($\theta = 4\pi$) è quindi

$$t = \sqrt{8\pi/\alpha} \ . \tag{4}$$

In questo tempo la velocità angolare cresce secondo la legge $\omega = \alpha t$ e, dopo due giri vale

$$\boxed{\omega = \sqrt{8\pi\alpha} = \sqrt{\frac{16\pi F}{M_G R}} = 0.65\,\mathrm{rad/s}} \tag{5}$$

b) Essendo nulli i momenti delle forze esterne al sistema giostra+bambino, il momento angolare totale del sistema si conserva. Dato che il salto del bambino avviene in direzione radiale, il suo momento angolare è inizialmente nullo e il momento angolare del sistema coincide con quello della sola giostra, che è dato da

$$L_i = I_G\omega = \frac{1}{2}M_G R^2 \omega \ . \tag{6}$$

dove ω è la velocità calcolata al punto precedente. Nello stato finale il bambino è fermo sulla giostra. Visti da un osservatore inerziale, bambino e giostra ruotano alla stessa velocità angolare $\tilde{\omega}$, così che il momento angolare può essere scritto in questa forma:

$$L_f = I_G\tilde{\omega} + L_B = \frac{1}{2}M_G R^2\tilde{\omega} + M_B d^2\tilde{\omega} \ . \tag{7}$$

Imponendo che i due momenti angolari siano uguali, si ottiene

$$\boxed{\tilde{\omega} = \frac{1}{1 + 2(M_B/M_G)(d/R)^2}\ \omega = 0.552\,\mathrm{rad/s}} \tag{8}$$

Se il bambino è approssimato da un cilindro, ciò che cambia nel calcolo precedente è solo l'espressione del suo momento angolare L_B, che può essere scritta usando il teorema di Steiner:

$$L_B = (I_B + M_B d^2)\tilde{\omega} = \left(\frac{1}{2} M_B R_B^2 + M_B d^2\right) \tilde{\omega} \ . \tag{9}$$

Usando nuovamente la conservazione del momento angolare si ottiene:

$$\boxed{\tilde{\omega} = \frac{1}{1 + 2(M_B/M_G)\left[(R_B^2/2 + d^2)/R^2\right]} \omega = 0.550 \, \text{rad/s}} \tag{10}$$

La differenza tra le due velocità è quindi

$$\boxed{\delta\tilde{\omega} = 2 \times 10^{-3} \, \text{rad/s}} \tag{11}$$

I due valori differiscono dunque soltanto dello 0.4%. Considerare il bambino come un punto materiale è dunque una buona approssimazione ai fini del calcolo della velocità angolare. Nei punti seguenti useremo il valore $\tilde{\omega} = 0.55$ rad/s.

c) Sul bambino agiscono la forza centrifuga F_C e la forza di attrito $F_A = \mu_s N$ in versi opposti. La condizione critica per cui rimane in equilibrio la otteniamo ponendo queste due forze uguali in modulo:

$$|F_A| = |F_C| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_s = \frac{\tilde{\omega}^2 d}{g} = 0.031} \tag{12}$$

d) Dato che la biglia, nel suo moto sul piano della giostra dopo il lancio, non è soggetta ad alcuna forza (forza peso e reazione vincolare sono verticali e si compensano), essa si muoverà di moto uniforme, come una particella libera, se vista dal sistema di riferimento inerziale. In questo sistema di riferimento, indichiamo con O$= (0, 0)$ il centro della giostra e con A$= (0, -d)$ la posizione del bambino al momento del lancio. La traiettoria della biglia è una retta percorsa a velocità costante. Il problema ci fornisce il valore della velocità iniziale nel sistema di riferimento in rotazione con la giostra, v', in direzione radiale. Per ottenere la velocità nel sistema di riferimento inerziale, dobbiamo aggiungere la velocità $\tilde{\omega}d$, in direzione tangenziale. Notiamo poi che $v_0 = \tilde{\omega}d = 0.55$ m/s e quindi la biglia, nel sistema di riferimento inerziale, si muove lungo una retta inclinata ad un angolo di 45° rispetto alla retta passante per i punti A e O. A questo punto possiamo trovare il punto in cui essa cade dalla giostra, che sarà individuato dall'intersezione della retta $y = x - d$ con la circonferenza rappresentante il bordo della giostra. Per farlo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x - d \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \tag{13}$$

che ha come soluzione

$$x_{int} = \frac{d + \sqrt{2R^2 - d^2}}{2} \,, \qquad y_{int} = x_{int} - d \,. \tag{14}$$

Il tempo impiegato dalla biglia per cadere dalla giostra sarà quindi

$$\boxed{t = \frac{x_{int}}{\tilde{\omega} d} = \frac{y_{int} + d}{v_0} = \frac{1 + \sqrt{2R^2/d^2 - 1}}{2\tilde{\omega}} = 2.69\,\mathrm{s}} \tag{15}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Nella risoluzione di questo esercizio si assume come sistema d'assi cartesiano quello composto dall'asse x lungo la direzione parallela al piano verso il basso, l'asse y nella direzione perpendicolare al piano verso l'alto e l'asse z uscente dal foglio.

Il disco e la ruota sono soggetti ad un moto di puro rotolamento, che è possibile solo in presenza di una forza F nel punto di appoggio, opposta al verso del moto. Le forze che agiscono sui due corpi slegati sono quindi la forza F e la forza peso. Scegliamo il centro di massa come polo per calcolare i momenti delle forze e il momento angolare, in modo che valga la legge $I\alpha = \tau$ anche nel caso in cui il corpo accelera. Le equazioni del moto per la rotazione e la traslazione di uno qualsiasi dei due corpi, preso singolarmente, sono

$$I\alpha = FR \tag{16}$$

$$ma = mg \sin\beta - F \,. \tag{17}$$

Ricavando F dalla prima e sostituendola nella seconda, con la condizione di rotolamento puro $\alpha = a/R$, si ottiene

$$a = \frac{g \sin\beta}{1 + I/(mR^2)} \tag{18}$$

e i due casi differiscono solo per il rapporto $I/(mR^2)$, che vale 1/2 per il disco e 1 per la ruota. Dunque

$$\boxed{a_D = (2/3) g \sin\beta = (1/3) g = 3.267\,\mathrm{m/s^2}} \tag{19}$$

e

$$\boxed{a_R = (1/2) g \sin\beta = (1/4) g = 2.45\,\mathrm{m/s^2} \,.} \tag{20}$$

b) Il disco, che ha un momento d'inerzia minore, ha un'accelerazione maggiore della ruota. Lo spazio percorso dalla ruota sarà $x_R = \frac{1}{2} a_R t^2$, mentre quello percorso dal disco sarà $x_D = l + \frac{1}{2}a_D t^2$, con $l = 0.5$ m. Il disco raggiunge la ruota quando $x_D = x_R$ e ciò avviene ad un tempo dato da:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2l}{a_R - a_D}} = 1.22\,\mathrm{s}} \tag{21}$$

c) Per calcolare l'energia della bicicletta si può considerare l'energia dei suoi singoli costituenti: sbarra, ruota e disco. L'energia della sbarra è cinetica e potenziale, mentre quella degli altri due oggetti ha anche una parte rotazionale. Sia $\dot{x}$ la velocità dei tre oggetti, l'energia cinetica traslazionale è data da:

$$E_{\mathrm{trasl}} = \frac{1}{2}(m_D + m_R + M)\dot{x}^2 \tag{22}$$

L'energia cinetica rotazionale invece è:

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}(I_D + I_R)\omega^2 = \frac{1}{4}m_D R^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_R R^2\omega^2\ . \tag{23}$$

Usando la condizione di puro rotolamento, $\dot{x} = R\omega$, si può scrivere

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_D + m_R\right)\dot{x}^2 \tag{24}$$

e l'energia cinetica totale diventa

$$\boxed{E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_D + 2m_R + M\right)\dot{x}^2} \tag{25}$$

Per scrivere l'energia potenziale in funzione della posizione della bicicletta possiamo chiamare h la quota a cui si trova il centro geometrico del sistema (a metà dell'asta) in un istante generico. Allora

$$\boxed{E_{\mathrm{pot}} = Mgh + m_R g\left(h - \frac{l}{2}\sin\beta\right) + m_D g\left(h + \frac{l}{2}\sin\beta\right)}\ . \tag{26}$$

d) La conservazione dell'energia meccanica implica $dE/dt = 0$, dove E è la somma di E_{cin} e E_{pot} calcolate al punto precedente. Derivando rispetto al tempo i vari termini si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{3}{2}m_D + 2m_R + M\right)\dot{x}\,\ddot{x} + (m_D + m_R + M)g\,\dot{h} = 0\ . \tag{27}$$

La derivata temporale della quota può essere espressa tramite la velocità di traslazione lungo il piano. Infatti, dato che uno spostamento dx lungo il piano comporta una variazione di quota negativa $dh = -dx \sin\beta$, si può scrivere $\dot{h} = -\dot{x} \sin\beta$. Dunque:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{3}{2} m_D + 2m_R + M\right) \dot{x}\, \ddot{x} - (m_D + m_R + M) g\, \dot{x} \sin\beta = 0 \tag{28}$$

da cui si ricava:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{m_D + m_R + M}{\frac{3}{2} m_D + 2m_R + M} g \sin\beta = 3.19\,\mathrm{m/s^2}} \tag{29}$$

e) Le reazioni vincolari N_R e N_D esercitate dal piano inclinato sulla ruota e sul disco si ricavano dall'equazione del moto nella direzione perpendicolare al piano. Indichiamo con T_R e T_D le componenti lungo y delle forze esercitate dalla sbarra rispettivamente sulla ruota e sul disco. Allora le condizioni per avere accelerazione nulla lungo y diventano

$$N_D + T_D - m_D g \cos\beta = 0 \tag{30}$$

$$N_R + T_R - m_R g \cos\beta = 0 \tag{31}$$

$$-T_D - T_R - M g \cos\beta = 0\ , \tag{32}$$

e inoltre la sbarra non ruota, e dunque

$$-T_D \frac{l}{2} + T_R \frac{l}{2} = 0\ . \tag{33}$$

Dalle ultime due equazioni si ricava $T_D = T_R = -\frac{1}{2} M g \cos\beta$, che sostituita nelle prime due dà

$$\boxed{N_D = \left(\frac{1}{2} M + m_D\right) g \cos\beta = 44.60\,\mathrm{N}} \tag{34}$$

e

$$\boxed{N_R = \left(\frac{1}{2} M + m_R\right) g \cos\beta = 10.62\,\mathrm{N}} \tag{35}$$

Affinché si abbia rotolamento, la forza F nel punto di contatto con il piano deve obbedire alla condizione $|F| \leq \mu_s N$. D'altra parte, la forza F può essere calcolata dall'equazione del moto $I\alpha = FR$, con $\alpha = a/R$. Dato che l'accelerazione della bicicletta la conosciamo dal risultato precedente, possiamo usarla per scrivere la condizione per il disco

$$F_D = \frac{1}{2} \frac{m_D + m_R + M}{\frac{3}{2} m_D + 2m_R + M}\ m_D g \sin\beta \leq \mu_s^D N_D \tag{36}$$

e per la ruota

$$F_R = \frac{m_D + m_R + M}{\frac{3}{2} m_D + 2m_R + M}\ m_R g \sin\beta \leq \mu_s^R N_R \tag{37}$$

ovvero

$$\boxed{\mu_s^D \geq \frac{m_D(m_D + m_R + M)}{(M + 2m_D)(\frac{3}{2}m_D + 2m_R + M)}\tan\beta = 0.18} \tag{38}$$

$$\boxed{\mu_s^R \geq \frac{m_R(m_D + m_R + M)}{(M + 2m_R)(\frac{3}{2}m_D + 2m_R + M)}\tan\beta = 0.15} \tag{39}$$

La prima equazione stabilisce la condizione minima del coefficiente di attrito affinché il solo disco non strisci, mentre la seconda equazione è relativa alla condizione di puro rotolamento per la sola ruota. Se il coefficiente d'attrito fosse $\mu_s < 0.15$ sia ruota che disco striscerebbero. Se $0.15 < \mu_s < 0.18$ allora la ruota avrebbe moto di puro rotolamento mentre il disco striscerebbe. La condizione affinché né disco né ruota striscino, quindi è:

$$\boxed{\mu_s > 0.18} \tag{40}$$

Soluzione esercizio II.1

a) Usando l'equazione di stato dei gas perfetti possiamo facilmente ricavare V_A:

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 8.3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{41}$$

Allo stesso modo, notando che la trasformazione $A \to B$ è isobara e quindi $P_A = P_B$, ricaviamo T_B

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 310.6\,\mathrm{K}. \tag{42}$$

Nella trasformazione adiabatica $B \to C$ il prodotto PV^γ rimane costante quindi:

$$P_C = \frac{P_B {V_B}^\gamma}{{V_C}^\gamma} = 1.2 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{43}$$

Allo stesso modo, usando la trasformazione adiabatica $D \to A$ e notando che $P_D = P_C$ ricaviamo V_D

$$V_D = \left(\frac{P_A}{P_D}\right)^{1/\gamma} V_A = 14.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{44}$$

Non ci resta che trovare T_C e T_D usando l'equazione di stato:

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 216.6\,\mathrm{K}. \tag{45}$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = 104.0\,\mathrm{K}. \tag{46}$$

In definitiva, si ha:

$$\boxed{T_A = 150\,\mathrm{K} \qquad V_A = 8.3\,\mathrm{dm}^3 \qquad P_A = 3\times10^5\,\mathrm{Pa}}$$

$$\boxed{T_B = 310.6\,\mathrm{K} \qquad V_B = 17\,\mathrm{dm}^3 \qquad P_B = 3\times10^5\,\mathrm{Pa}}$$

$$\boxed{T_C = 216.6\,\mathrm{K} \qquad V_C = 30\,\mathrm{dm}^3 \qquad P_C = 1.2\times10^5\,\mathrm{Pa}}$$

$$\boxed{T_D = 104.0\,\mathrm{K} \qquad V_D = 14.4\,\mathrm{dm}^3 \qquad P_D = 1.2\times10^5\,\mathrm{Pa}}$$

b) Conoscendo temperatura, volume e pressione di ogni stato A, B, C, D, il diagramma del ciclo nel piano P-V è facilmente disegnabile.

c) Per l'isobara $A \to B$, siccome $V_A < V_B$ si tratta di un'espansione e quindi il lavoro viene compiuto dal sistema e avrà segno positivo:

$$L_{AB} = P(V_B - V_A) = 2610\,\mathrm{J} \tag{47}$$

Il calore, invece è dato dalla relazione:

$$Q_{AB} = nc_P(T_B - T_A) = 6672\,\mathrm{J} \tag{48}$$

dove si è usato il calore specifico a pressione costante, pari a $c_P = 5/2R$ nel caso di un gas monoatomico. Da notare che siccome la temperatura $T_B > T_A$ il sistema si sta scaldando e quindi riceve calore dall'ambiente esterno. La variazione di energia interna nella trasformazione isobara vale quindi:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB} = 4062\,\mathrm{J} \tag{49}$$

Lo stesso si fa per l'isobara $C \to D$. Dato che $V_D < V_C$ si tratta di una compressione e quindi il lavoro viene compiuto sul sistema e avrà segno negativo:

$$L_{CD} = P(V_D - V_C) = -1872\,\mathrm{J} \tag{50}$$

Il calore, invece è dato dalla relazione:

$$Q_{CD} = nc_P(T_D - T_C) = -4678\,\mathrm{J} \tag{51}$$

Da notare che siccome la temperatura $T_C > T_D$ il sistema si sta raffreddando e quindi cede calore all'ambiente esterno. La variazione di energia interna nella trasformazione isobara vale quindi:

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} - L_{CD} = -2806\,\mathrm{J} \tag{52}$$

Nella trasformazione adiabatica $B \to C$, il calore scambiato è nullo $Q_{BC} = 0$, pertanto la variazione di energia interna è pari al lavoro compiuto sul sistema.

$$\Delta U_{BC} = -L_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = -2343\,\mathrm{J} \tag{53}$$

dove si è usato il calore specifico a volume costante, pari a $c_V = 3/2R$ nel caso di un gas monoatomico. Lo stesso si può fare per l'adiabatica $D \rightarrow A$:

$$\Delta U_{DA} = -L_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 1147\,\mathrm{J} \tag{54}$$

Riassumendo:

$$\boxed{Q_{AB} = 6672\,\mathrm{J} \qquad \Delta U_{AB} = 4062\,\mathrm{J} \qquad L_{AB} = 2610\,\mathrm{J}}$$

$$\boxed{Q_{BC} = 0\,\mathrm{J} \qquad \Delta U_{BC} = -2343\,\mathrm{J} \qquad L_{BC} = 2343\,\mathrm{J}}$$

$$\boxed{Q_{CD} = -4678\,\mathrm{J} \qquad \Delta U_{CD} = -2806\,\mathrm{J} \qquad L_{CD} = -1872\,\mathrm{J}}$$

$$\boxed{Q_{DA} = 0\,\mathrm{J} \qquad \Delta U_{DA} = 1147\,\mathrm{J} \qquad L_{DA} = -1147\,\mathrm{J}}$$

d) Per calcolare il rendimento ci basta conoscere il lavoro totale fatto dal sistema e calore totale assorbito dal sistema oppure il calore totale ceduto e quello totale assorbito:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} \tag{55}$$

$$= 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = 0.3 \tag{56}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Dal momento che il sistema è all'equilibrio, la pressione dell'argon e quella dell'elio sono uguali fra loro $P_0^{\mathrm{Ar}} = P_0^{\mathrm{He}} = P_0$. Siccome il blocco superiore è libero di muoversi sotto l'azione della gravità, la pressione dell'elio sarà uguale dalla pressione atmosferica più la pressione esercitata dal pistone stesso:

$$\boxed{P_0 = P_{\mathrm{atm}} + \frac{mg}{S} = 1.02 \times 10^5\,\mathrm{Pa}} \tag{57}$$

Sapendo che entrambi i gas sono alla stessa temperatura T_0 e alla stessa pressione P_0, dalle equazioni di stato si calcolano facilmente i volumi dei due gas:

$$\boxed{V_0^{\mathrm{He}} = n_{\mathrm{He}}\frac{RT_0}{P_0} = 48.90\,\mathrm{dm}^3} \tag{58}$$

e

$$\boxed{V_0^{\mathrm{Ar}} = n_{\mathrm{Ar}}\frac{RT_0}{P_0} = 24.45\,\mathrm{dm}^3} \tag{59}$$

b) Bloccando il poliuretano superiore, il volume totale non può cambiare ed è determinato dalla somma dei volumi al punto precedente: $V_{\mathrm{tot}} = V_0^{\mathrm{Ar}} +$

$V_0^{\text{He}} = 73.35\,\text{dm}^3$. All'equilibrio vale sempre che $P_1^{\text{Ar}} = P_1^{\text{He}} = P_1$ e, dato che il setto non conduce il calore, l'elio subirá una trasformazione adiabatica:

$$P_1(V_1^{\text{He}})^\gamma = P_1(V_{\text{tot}} - V_1^{\text{Ar}})^\gamma = P_0(V_0^{\text{He}})^\gamma \tag{60}$$

$$P_1 V_1^{\text{Ar}} = n_{\text{Ar}} R T_1 \tag{61}$$

Sommando membro a membro si ricava:

$$\boxed{P_1 = \frac{n_{\text{Ar}} R T_1 + P_0(V_0^{\text{He}})^\gamma}{(V_{\text{tot}} - V_1^{\text{Ar}})^\gamma + V_1^{\text{Ar}}}} \tag{62}$$

Sostituendo di nuovo nelle equazioni di stato si ricavano i volumi:

$$\boxed{V_1^{\text{Ar}} = \frac{n_{\text{Ar}} T_1}{P_1}} \tag{63}$$

e

$$\boxed{V_1^{\text{He}} = V_{\text{tot}} - V_1^{\text{Ar}}} \tag{64}$$

c) Permettendo il passaggio di calore tra i due scomparti, sia l'elio che il blocco di poliuretano raggiungono la temperatura T_1 della sorgente. Il poliuretano subisce una variazione di volume dipendente dal suo volume iniziale $V_p^i n = Sh = 1$ dm^3:

$$\Delta V_{\text{p}} = k V_p^{in}(T_1 - T_0) = 0.01\,\text{dm}^3 \tag{65}$$

Assumendo che il volume ora occupato dal poliuretano fosse prima occupato interamente dall'elio, il volume totale a disposizione per i due gas è $\tilde{V}_{\text{tot}} = V_{\text{tot}} - \Delta V_{\text{p}} = 73.34$ dm^3. Inoltre, ora i due gas avranno la stessa temperatura e la stessa pressione $P_2^{\text{Ar}} = P_2^{\text{He}} = P_2$, in quanto all'equilibrio e a contatto con una sorgente di calore; pertanto si ha:

$$\boxed{P_2 = \frac{RT_1(n_{\text{He}} + n_{\text{Ar}})}{\tilde{V}_{\text{tot}}} = 1.36 \times 10^5 \text{Pa}} \tag{66}$$

mentre per i volumi:

$$\boxed{V_2^{\text{Ar}} = \frac{\tilde{V}_{\text{tot}}}{n_{\text{He}} + n_{\text{Ar}}} = 24.44\,\text{dm}^3} \tag{67}$$

e

$$\boxed{V_2^{\text{He}} = \frac{n_{\text{He}} \tilde{V}_{\text{tot}}}{n_{\text{He}} + n_{\text{Ar}}} = 48.89\,\text{dm}^3} \tag{68}$$

d) L'entropia per un gas perfetto è calcolabile mediante l'integrale di Clausius:

$$\Delta S_{02} = \int_0^2 \frac{nc_V \mathrm{d}T}{T} + \int_0^2 \frac{nR\mathrm{d}V}{V} \tag{69}$$

Per cui, conoscendo le temperature e i volumi dei gas tra lo stato 0 e lo stato 2, si ha che la variazione di entropia per l'elio è:

$$\boxed{\Delta S_{02}^{\mathrm{He}} = n_{\mathrm{He}} c_V \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + n_{\mathrm{He}} R \ln\left(\frac{V_2^{\mathrm{He}}}{V_0^{\mathrm{He}}}\right) = 7.17\,\mathrm{J/K}} \tag{70}$$

mentre per l'argon:

$$\boxed{\Delta S_{02}^{\mathrm{He}} = n_{\mathrm{He}} c_V \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + n_{\mathrm{He}} R \ln\left(\frac{V_2^{\mathrm{He}}}{V_0^{\mathrm{He}}}\right) = 3.58\,\mathrm{J/K}} \tag{71}$$