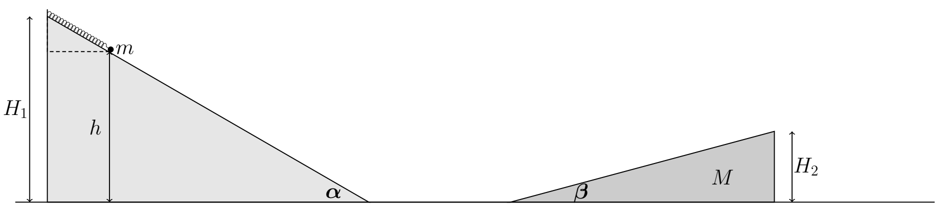
Fisica Generale I (primo modulo)
A.A. 2013-2014, 13 Gennaio 2014

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Un corpo puntiforme di massa $m = 50$ g è appoggiato su un piano inclinato privo di attrito, di altezza $H_1 = 105$ cm e angolo d'inclinazione $\alpha = 30°$. Il corpo è agganciato ad una molla di costante elastica $k = 6.125\,\mathrm{Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 6$ cm, in modo tale che un estremo della molla sia vincolato al punto più alto del piano inclinato, ad altezza H_1.

a) Calcolare la lunghezza della molla, l, e l'altezza h a cui si trova inizialmente il corpo all'equilibrio.

Ad un certo istante il corpo viene rilasciato dalla molla e scivola lungo il piano inclinato, percorre un tratto orizzontale fino ad incontrare una rampa scabra, di altezza $H_2 = 0.4$ m e angolo d'inclinazione $\beta = 15°$. Si assuma liscio il raccordo tra piano orizzontale e rampa, mentre sulla rampa il coefficiente d'attrito dinamico è pari a $\mu_d = 0.1$.

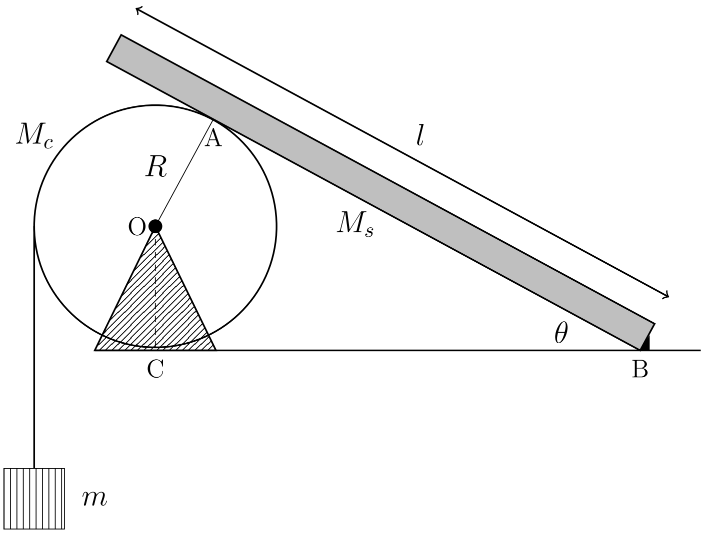
b) Stabilire se il corpo riesce ad arrivare in cima alla rampa e, in tal caso, calcolare la velocità con cui vi arriva.

c) Calcolare a che distanza dal bordo della rampa atterrerà il corpo.

Si supponga ora che la rampa di destra, anziché essere fissa, possa scivolare lungo il piano orizzontale senza alcun attrito. La rampa ha massa $M = 60$ g. Supponiamo inoltre che l'attrito tra il corpo di massa m e la rampa sia tale che il corpo rallenti fino ad arrestarsi, rispetto alla rampa, nel suo punto più alto.

d) Qual'è la velocità finale della rampa e quant'è il lavoro fatto dalla forza di attrito?

Esercizio I.2



Si consideri una carrucola cilindrica, omogenea, di raggio $R = 15$ cm e massa $M_c = 1.6$ kg, libera di ruotare intorno al suo asse passante nel punto fisso O. Attorno alla carrucola è avvolta una corda inestensibile e di massa trascurabile, al cui capo è appeso un bicchiere vuoto di massa $m = 200$ g.

a) Calcolare l'accelerazione a del bicchiere e la tensione T del filo.

Supponiamo poi che sulla carrucola sia appoggiata, nel punto A, un'asta omogenea, di lunghezza $l = 80$ cm e formante un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. L'altro estremo dell'asta sia incernierato ad un perno nel punto fisso B e tra la carrucola e l'asta vi sia attrito, con coefficiente $\mu_s \simeq \mu_d \simeq 0.3$.

b) Trovare il minimo valore della massa dell'asta M_a affinché il sistema sia all'equilibrio [suggerimento: si chiami d la distanza tra A e B e si noti che i triangoli OAB e OHB sono uguali].

c) Supponendo che il valore di M_a sia quello calcolato al punto precedente, si riempia il bicchiere con dell'acqua di massa $m_{H_2O} = 0.15$ kg. Calcolare la nuova accelerazione a del bicchiere.

d) Sapendo che il perno in B può sopportare una forza con componente orizzontale massima pari a 3 N, determinare se esso resiste o meno.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Una mole di gas ideale monoatomico è inizialmente nello stato A alla pressione $P_A = 1$ atm e volume $V_A = 2$ l. Il gas viene portato mediante una trasformazione isocora allo stato B e successivamente nello stato C con una trasformazione adiabatica, alla temperatura $T_C = 50$ K. In seguito, il gas viene riportato nello stato iniziale A mediante una trasformazione isobara. Tutte le trasformazioni sono reversibili.
a) Calcolare per ogni stato temperatura, pressione e volume.
b) Disegnare il diagramma del ciclo nel piano $P - V$.
c) Calcolare per ogni trasformazione lavoro, calore e variazione di energia interna.
d) Calcolare per ogni trasformazione la variazione di entropia.

Esercizio II.2

Un gruppo di ricercatori sta studiando un pezzo di kryptonite allo stato solido di massa $m = 7$ Kg ed inizialmente in equilibrio alla temperatura $T_i = 500$ K. Essi hanno già capito che questo materiale ha un calore specifico dipendente dalla temperatura come $c(T) = a + bT$ nella fase liquida, con $a = 503$ J/(Kg K) e $b = 0.1$ J/(Kg K^2), mentre esso è costante $c(T) = a$ nella fase solida. Inoltre sanno che il suo calore latente di fusione è pari a $\lambda_F = 150$ KJ/Kg.

Ora vogliono trovarne la temperatura di fusione T_F. Per fare ciò il blocco di kryptonite viene messo in un forno che gli fornisce una quantità di calore al secondo pari a $P = 3000$ J/s, il blocco inizia a fondere dopo 4 minuti e viene lasciato nel forno per un totale di 15 minuti. Determinare: **a)** La temperatura di fusione T_F della kryptonite.
b) Se il blocco riesce a fondere completamente e, in caso affermativo, dopo quanto tempo ciò avviene.
c) La temperatura finale della kryptonite.

Soluzione esercizio I.1

a) Le forze che agiscono sul corpo di massa m sono la forza peso, la reazione vincolare del piano e la forza di richiamo della molla. Affinché il corpo risulti in equilibrio, lungo la direzione parallela al piano deve essere:

$$mg\sin\alpha - k(l - l_0) = 0$$

essendo $(l - l_0)$ la deformazione della molla prodotta dal corpo appeso. La lunghezza complessiva della molla sarà dunque

$$\boxed{l = \frac{mg\sin\alpha}{k} + l_0 = 0.1\,\mathrm{m}} \tag{1}$$

mentre l'altezza a cui si trova la massa è data da:

$$\boxed{h = H_1 - l\sin\alpha = 1.0\,\mathrm{m}} \tag{2}$$

b) Quando il corpo viene rilasciato, esso possiede l'energia potenziale mgh. Durante la discesa sul piano liscio, la sua energia potenziale viene convertita in energia cinetica finché, raggiungendo il piano orizzontale, possiede solo energia cinetica. A quel punto, quando inizia la risalita lungo la rampa scabra, una parte dell'energia meccanica viene dissipata in attrito, mentre il corpo riacquista anche energia potenziale. Vogliamo valutare se la massa possiede abbastanza energia per arrivare in cima alla rampa. Supponiamo che vi arrivi con una velocità finale non nulla v. Allora la variazione di energia meccanica sarà data da

$$E_{\text{fin}} - E_{\text{iniz}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgH_2 - mgh\ .$$

Tale variazione deve essere prodotta dal lavoro (negativo) compiuto dalla forza di attrito che, se la rampa è ferma, è una forza costante di modulo pari a $F = \mu_d mg\cos\beta$. La lunghezza della rampa è $H_2/\sin\beta$. Si ottiene così la condizione

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgH_2 - mgh = -\mu_d mg\cos\beta\frac{H_2}{\sin\beta}\ .$$

Risolvendo per la velocità finale si ottiene

$$\boxed{v = \sqrt{2g\left[h - H_2\left(1 + \mu_d\cot\beta\right)\right]} = 2.97\ \mathrm{m/s}} \tag{3}$$

Il corpo sarà quindi in grado di arrivare in cima e cadere oltre la rampa.

c) Per calcolare la distanza raggiunta dal corpo bisogna considerare il problema balistico. Le equazioni della cinematica lungo i due assi x, y sono le seguenti:

$$x = v_x t$$
$$y = H_2 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \, .$$

Eliminando t dalle equazioni e imponendo che il corpo raggiunga quota $y = 0$, si risolve per x e si ottiene:

$$x = \frac{v_x v_y}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_x v_y}{g}\right)^2 + 2H_2 \frac{v_x^2}{g}} \, .$$

Ricordando che $v_x = v \cos\beta$ e $v_y = v \sin\beta$, la gittata è data dalla soluzione positiva, ovvero:

$$\boxed{x = \frac{v^2}{g} \sin\beta\cos\beta + \sqrt{\left(\frac{v^2 \sin\beta\cos\beta}{g}\right)^2 + 2H_2 \frac{v^2 \cos^2\beta}{g}} \simeq 1.1\,\mathrm{m}} \tag{4}$$

d) In base al punto **a)**, la velocità posseduta dalla massa nel momento in cui comincia a salire sulla rampa è:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \simeq 4.4 \text{ m/s}$$

Nell'istante in cui il corpo raggiunge la quota massima, esso è fermo rispetto alla rampa, ma nel sistema di riferimento del laboratorio, si muove con la stessa velocità della rampa. L'intero processo di risalita può quindi essere assimilato ad un "urto" completamente anelastico, in cui prima dell'urto il corpo ha velocità v_0 e la rampa è ferma, e dopo l'urto rampa e corpo si muovono insieme alla stessa velocità V. Dato che la forza di attrito e la reazione vincolare sono forze interne al sistema costituito dal corpo e dalla rampa, e dato che la forza peso è verticale, la componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva e si può dunque scrivere

$$m v_0 = (m + M) V$$

da cui:

$$\boxed{V = \frac{m}{m+M} v_0 \simeq 2 \text{ m/s}} \tag{5}$$

Si noti che, poiché durante il processo di risalita la rampa accelera, la forza d'attrito sviluppata con il corpo non è costante. Il lavoro fatto dalla forza d'attrito può essere ottenuto solo calcolando l'energia meccanica persa durante la risalita:

$$\boxed{W = mgH_2 + \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -0.07\,\mathrm{J}}$$

Soluzione esercizio I.2

Nella risoluzione di questo esercizio considereremo come asse x l'asse orizzontale, y quello verticale e z quello uscente dal foglio.

a) Le forze che agiscono sul bicchiere sono la forza peso e la tensione del filo, dirette entrambe lungo l'asse y ma in versi opposti. Per quanto riguarda la carrucola dobbiamo scrivere la sua equazione del moto per rotazione attorno ad un asse fisso (asse z) in cui l'unica forza esterna agente è la tensione del filo. Abbiamo dunque il sistema

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ I\alpha = \tau = RT \end{cases} \tag{6}$$

Il momento d'inerzia della carrucola (cilindro) è $I = M_c R^2/2$ e la condizione di rotolamento implica $\alpha = a/R$. Sostituendo questi valori e risolvendo il sistema dato dalle due equazioni del moto si ottiene:

$$\boxed{a = \frac{m}{m + M_c/2} g = 1.96\,\mathrm{m/s^2}} \tag{7}$$

$$\boxed{T = \frac{M_c/2}{m + M_c/2} mg = 1.57\,\mathrm{N}} \tag{8}$$

b) Indichiamo con F il modulo della forza di attrito che agisce sulla carrucola a causa dell'appoggio dell'asta. Tale forza è tangente al cilindro e parallela all'asta. La carrucola sarà in equilibrio statico quando la somma dei momenti delle forze che agiscono su di essa è nulla. In particolare il momento della tensione del filo è rivolto nella direzione positiva dell'asse z mentre quello della forza F in direzione negativa. Dunque

$$RT - RF = 0\ . \tag{9}$$

Affinché il bicchiere non scenda, deve valere la condizione

$$T - mg = 0\ , \tag{10}$$

e quindi $F = T = mg$. Inoltre, affinché l'asta non ruoti attorno al perno, devono annullarsi i momenti delle forze rispetto al perno stesso:

$$M_a g \cos\theta \frac{l}{2} - Nd = 0 \tag{11}$$

dove M_a è la massa dell'asta, N la reazione normale esercitata dalla carrucola sull'asta, perpendicolarmente ad essa, nel punto di contatto A. Notando che i triangoli OAB e OHB sono uguali, si può esprimere d come $d = R/\tan(\theta/2)$, e ricavare

$$N = \frac{M_a g l}{2d}\cos\theta = \frac{M_a g l}{2R}\cos\theta\tan(\theta/2)\ . \tag{12}$$

A questo punto si può finalmente imporre la condizione sul valore della forza F che non deve superare il valore critico imposto dall'attrito statico:

$$F \leq \mu_s N\ . \tag{13}$$

Usando le espressioni precedenti per F e N, nel caso critico $F = \mu_s N$ si ottiene il valore massimo di M_a:

$$\boxed{M_a = \frac{2Rm}{\mu_s l\cos\theta\tan(\theta/2)} = 1.08\,\mathrm{kg}} \tag{14}$$

a cui corrisponde

$$N = \frac{F}{\mu_s} = \frac{mg}{\mu_s}\ . \tag{15}$$

c) Notiamo innanzitutto che il fatto di aver aggiunto acqua nel bicchiere rompe la condizione di equilibrio precedente e produce un'accelerazione del bicchiere verso il basso, a cui corrisponde un'accelerazione angolare della carrucola. Tuttavia, nulla cambia dal punto di vista dell'asta, che rimane in equilibrio. Per essa vale ancora la relazione (11), con la massa M_a già calcolata in (14). La reazione vincolare, $N = mg/\mu_s$, è dunque la stessa di prima. Ora che la carrucola ruota, la forza di attrito F sarà data da $F = \mu_d N$; ma per ipotesi $\mu_d = \mu_s$, e dunque anche F è pure la stessa di prima, $F = mg$, è costante e non dipende dall'accelerazione del bicchiere.
Possiamo quindi scrivere le equazioni del moto del bicchiere e della carrucola, essendo F nota. L'equazione del bicchiere con l'acqua sarà la stessa del punto a) con l'aggiunta di m_{H_2O}. Se definiamo $m_b = m + m_{H_2O}$, possiamo scrivere

$$m_b a = m_b g - T\ . \tag{16}$$

L'equazione per la carrucola ha anch'essa la forma che aveva al punto a) con l'aggiunta della forza d'attrito:

$$(1/2)M_c a = T - F\ , \tag{17}$$

avendo usato $I = M_c R^2/2$ e la condizione di puro rotolamento $\alpha = a/R$. Se sommiamo le due equazioni otteniamo

$$a = \frac{m_b g - F}{m_b + (M_c/2)} = \frac{m_b g - mg}{m_b + (M_c/2)} \tag{18}$$

ovvero

$$\boxed{a = \frac{m_{H_2O}}{m + m_{H_2O} + M_c/2} g = 0.13g \simeq 1.28\,\mathrm{m/s^2}} \tag{19}$$

d) Affinché l'asta non trasli nella direzione orizzontale deve valere la condizione di equilibrio

$$R_x + N_x + F_x = 0 \tag{20}$$

dove R_x è la componente orizzontale della forza esercitata dal perno. Dunque

$$R_x = -N \sin\theta + \mu_d N \cos\theta = (N/2)(\sqrt{3}\mu_d - 1)\ . \tag{21}$$

Ricordiamo che $N = mg/\mu_s$. Allora

$$\boxed{R_x = \frac{mg}{2\mu_s}(\sqrt{3}\mu_d - 1) = -1.57\,\mathrm{N}} \tag{22}$$

il cui modulo è minore del valore massimo sostenibile dal perno. Il perno regge.

Soluzione esercizio II.1

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti, la temperatura T_A vale:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 24\,\mathrm{K} \tag{23}$$

Considerando la trasformazione isobara $C \to A$, si sa che $T/V = \text{cost}$, e $P_C = P_A = 10^5\mathrm{Pa}$ per cui:

$$V_C = \frac{T_C}{T_A} V_A = 4 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3 \tag{24}$$

Nella trasformazione adiabatica $B \to C$ si ha che è costante il prodotto PV^γ, con $\gamma = 5/3$ dal momento che stiamo descrivendo un gas ideale monoatomico. Si avrà $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$. Conoscendo V_C e sapendo che $P_C = P_A$ e $V_B = V_C$, si ricava per P_B:

$$P_B = P_A \left(\frac{T_C}{T_A} V_A\right)^\gamma V_A^{-\gamma} = 3 \times 10^5\mathrm{Pa} \tag{25}$$

Conoscendo P_B, si può ricavare la temperatura nello stato B considerando la trasformazione isocora $A \to B$:

$$T_B = \frac{P_B}{P_A} T_A = 81\,\mathrm{K} \tag{26}$$

In definitiva, si ha:

$$\boxed{T_A = 24\,\mathrm{K} \qquad V_A = 2 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3 \qquad P_A = 10^5\mathrm{Pa}}$$

$$\boxed{T_B = 81\,\mathrm{K} \qquad V_B = 2 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3 \qquad P_B = 3 \times 10^5\mathrm{Pa}}$$

$$\boxed{T_C = 50\,\mathrm{K} \qquad V_C = 4 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3 \qquad P_C = 10^5\mathrm{Pa}}$$

b) Conoscendo temperatura, volume e pressione di ogni stato A, B, C, il diagramma del ciclo nel piano $P - V$ è facilmente disegnabile.

c) Durante il tratto $A \to B$, non c'è lavoro effettuato dal (sul) sistema, per cui, in base al primo principio della termodinamica $\Delta U = Q - L$. In particolare, il calore è dato da:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} = c_V (T_B - T_A) = 715\mathrm{J} \tag{27}$$

dove si è usato il calore specifico a volume costante, che per un gas monoatomico è pari a $c_V = 3/2R$. Per l'isobara $C \to A$, siccome $V_A < V_C$ si tratta di una compressione e quindi il lavoro viene compiuto sul sistema e avrà segno negativo:

$$L_{CA} = P(V_A - V_C) = -215\mathrm{J} \tag{28}$$

Il calore, invece è dato dalla relazione:

$$Q_{CA} = c_P(T_A - T_C) = -539\mathrm{J} \tag{29}$$

dove si è usato il calore specifico a pressione costante, pari a $c_P = 5/2R$ nel caso di un gas monoatomico. Da notare che siccome la temperatura $T_A < T_C$ il sistema si sta raffreddando e quindi cede calore all'ambiente esterno. La variazione di energia interna nella trasformazione isobara vale quindi:

$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} - L_{CA} = -323\mathrm{J} \tag{30}$$

Nella trasformazione adiabatica $B \to C$, il calore scambiato è nullo $Q_{BC} = 0$, pertanto la variazione di energia interna è pari al lavoro compiuto sul sistema. Dal momento che in un ciclo la variazione di energia interna totale è sempre nulla, possiamo scrivere:

$$\Delta U_{BC} = -L_{BC} = -\Delta U_{AB} - \Delta U_{CA} = -392\mathrm{J} \tag{31}$$

Riassumendo:

$$\boxed{Q_{AB} = 715\mathrm{J} \qquad \Delta U_{AB} = 715\mathrm{J} \qquad L_{AB} = 0\mathrm{J}}$$

$$\boxed{Q_{BC} = 0\mathrm{J} \qquad \Delta U_{BC} = -392\mathrm{J} \qquad L_{BC} = 392\mathrm{J}}$$

$$\boxed{Q_{CA} = -539\mathrm{J} \qquad \Delta U_{CA} = -323\mathrm{J} \qquad L_{CA} = -215\mathrm{J}}$$

d) Nella trasformazione adiabatica reversibile, l'entropia rimane costante:

$$\boxed{\Delta S_{BC} = 0}$$

Le variazioni di entropia nelle altre due trasformazioni si calcolano direttamente dall'integrale di Clausius:

$$\boxed{\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{nc_V}{T}\mathrm{d}T = n\,c_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 15\,\mathrm{J/K}}$$

e

$$\boxed{\Delta S_{CA} = \int_C^A \frac{nc_P}{T}\mathrm{d}T = n\,c_P \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = -15\,\mathrm{J/K}}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Il calore erogato dal forno in 4 minuti si trova facilmente (ricordando di esprimere il tempo in secondi) come

$$Q_1 = Pt = 7.2 \times 10^5\,\mathrm{J}. \tag{32}$$

Durante questo tempo la kryptonite è allo stato solido quindi tutto il calore va ad innalzarne la temperatura fino a quella di fusione e il suo calore specifico è costante. Per ricavare T_F basta quindi invertire l'equazione

$$Q_1 = Pt = mc(T_F - T_i) \tag{33}$$

ottenendo

$$\boxed{T_F = \frac{Pt}{mc} + T_i = 704.5\,\mathrm{K}} \tag{34}$$

b) Nei restanti 11 minuti il forno eroga un calore pari a

$$Q_2 = Pt = 1.98 \times 10^6\,\mathrm{J} \tag{35}$$

mentre il calore necessario alla kryptonite per fondere completamente si può calcolare utilizzando il calore latente di fusione λ_F come

$$Q_F = \lambda_F m = 1.05 \times 10^6\,\mathrm{J}. \tag{36}$$

Il blocco riesci quindi a fondere completamente essendo $Q_2 > Q_F$ e lo fa in un tempo

$$\boxed{t_F = Q_F/P = 350\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{m}\,50\,\mathrm{s}} \tag{37}$$

che va sommato ai 4 minuti iniziali per ottenere il tempo trascorso dall'accensione del forno.

c) Dopo che la kryptonite è completamente fusa il forno eroga ancora una quantità di calore pari a $Q_3 = Q_2 - Q_F$. In quest'ultima fase il materiale è allo stato liquido e il suo calore specifico dipende dalla temperatura. Volendo trovare la temperatura finale bisognerà quindi risolvere la seguente equazione nell'incognita T_f:

$$\begin{aligned} Q_3 &= m\int_{T_F}^{T_f} (a + bT)dT && (38)\\ &= m\left(aT_f + \frac{bT_f{}^2}{2} - aT_F + \frac{bT_F{}^2}{2}\right) && (39)\end{aligned}$$

Si tratta di una semplice equazione di secondo grado con soluzioni

$$\boxed{T_f = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2b\left(aT_F + b{T_F}^2/2 + Q_3/m\right)}}{b}} \tag{40}$$

La soluzione con il segno meno va scartata perché darebbe una temperatura negativa ed otteniamo dunque

$$\boxed{T_f = 931.7\,\mathrm{K}} \tag{41}$$

Come nota finale osserviamo che se avessimo $Q_3 = 0$ in (40) troveremo $T_f = T_F$ a significare che tutto il calore erogato dal forno è stato utilizzato per fondere la kryptonite che si troverà quindi alla fase liquida ma esattamente alla temperatura di fusione.