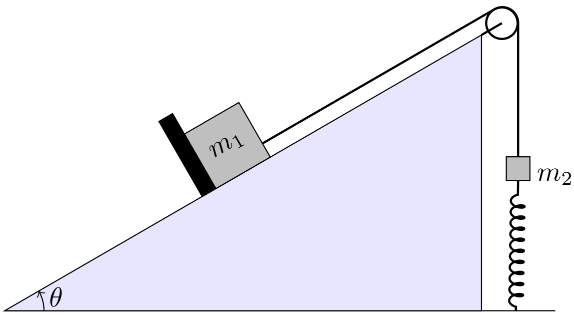
Fisica Generale I
A.A. 2013-2014, 16 Giugno 2014

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

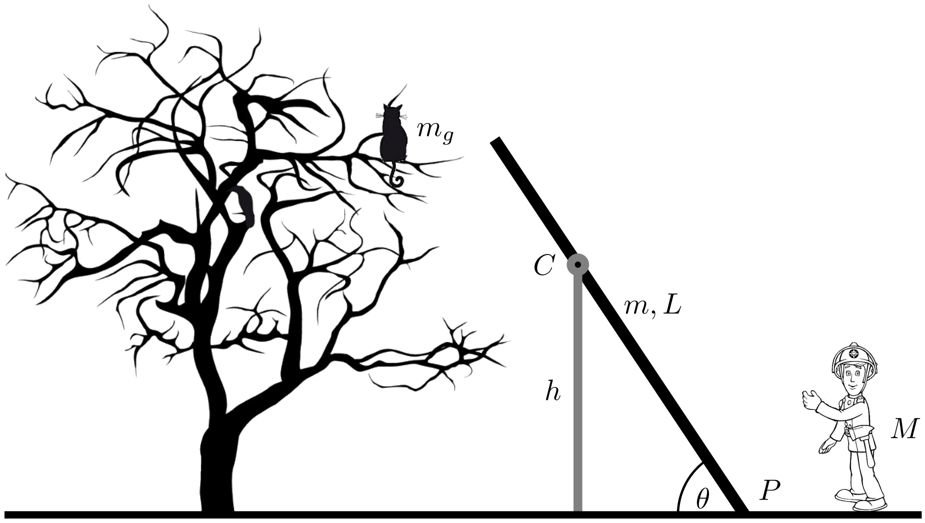
Esercizio I.1



Due corpi di massa $m_1 = 14$ Kg ed $m_2 = 2$ Kg sono collegati da un filo inestensibile e disposti come in figura. La massa m_2 è sospesa mediante il filo ad un'altezza $x_0 = 25$ cm e collegata al suolo da una molla di costante elastica $k = 100$ N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 5$ cm, in modo tale, che nella configurazione in figura, la molla è allungata di $\Delta l_0 = 20$ cm. Il corpo di massa m_1 è appoggiato sul piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ ed è tenuto fermo da un appoggio fisso, per cui il sistema è inizialmente in quiete. Si consideri trascurabile ogni attrito.

a) Calcolare la tensione del filo e la reazione vincolare esercitata dall'appoggio.
b) Ad un certo istante il vincolo viene rimosso. Calcolare l'accelerazione iniziale del sistema.
c) Determinare la frequenza di pulsazione del moto armonico successivo.
d) Scrivere la legge oraria $x(t)$ del corpo m_2 e determinare la massima altezza che raggiunge.
e) Verificare che l'energia meccanica alla massima altezza è uguale a quella iniziale.

Esercizio I.2



Sam il pompiere è stato chiamato per recuperare un gatto che non riesce più a scendere dall'albero. Per farlo usa una scala di massa $m = 40$ kg e lunghezza $L = 15$ m incernierata e libera di ruotare attorno ad una cerniera C ad altezza $h = 8$ m dal suolo. La scala è inoltre appoggiata nel punto P al suolo, approssimabile come un piano orizzontale liscio, con cui forma un angolo $\theta = 60°$. Si considerino Sam e il gatto come punti materiali rispettivamente di massa $M = 75$ kg e $m_g = 5$ Kg.
a) Considerando che la reazione vincolare in P è necessariamente verticale, se ne calcoli il modulo, e si calcoli modulo e direzione anche della reazione vincolare in C.
b) Sam comincia a salire la scala fino ad oltrepassare il punto C. Calcolare l'altezza critica h_c a cui può arrivare senza pregiudicare l'equilibrio della scala.
c) Arrivato all'altezza critica, Sam prende in braccio il gatto. Calcolare il momento d'inerzia del sistema composto dalla scala, dal pompiere e dal gatto, in rotazione attorno a C.
d) Calcolare l'accelerazione angolare iniziale del sistema, subito dopo aver preso il gatto.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Un ciclo è costituito dalle seguenti trasformazioni: compressione isobara (AB), compressione isoterma (BC), espansione isobara (CD) ed espansione isoterma (DA). Si consideri una mole di gas ideale monoatomico caratterizzato da:

$$P_A = 120 \text{ kPa}, \quad P_C = 600 \text{ kPa}, \quad T_A = 1273.15 \text{ K}, \quad T_B = 293.15 \text{ K} .$$

a) Disegnare il diagramma P-V del ciclo, determinando le grandezze P,V,T per ogni trasformazione.
b) Determinare la variazione di energia interna, il calore scambiato e il lavoro compiuto dal sistema per ogni trasformazione.
c) Determinare la variazione di entropia del gas in ogni trasformazione.

Esercizio II.2

Una macchina frigorifera compie 4 cicli al secondo assorbendo una potenza $P = 12$ kW. Essa lavora scambiando calore soltanto tra due sorgenti a temperatura $T_{\text{amb}} = 300K$ e T_0 ignota. Inoltre, ad ogni ciclo, l'entropia dell'ambiente varia di $\Delta S_{\text{amb}} = 15$ J/K.
a) Determinare il calore assorbito dalla sorgente alla temperatura T_0 in un ciclo.
b) Qual è il coefficiente di prestazione del frigorifero?
Nel frigorifero c'è una massa di acqua $m = 2$ kg a temperatura $T_0 > 0°$C. Metà dell'acqua ghiaccia dopo 70 secondi. ($c = 4186$ J/kg K e $\lambda = 333,5$ kJ/kg)
c) Determinare la temperatura T_0.
d) Di quanto è cambiata l'entropia dell'acqua?

Soluzione esercizio I.1

a) Nella configurazione iniziale, il corpo m_2 è soggetto alla forza di richiamo della molla, orientata verso il basso, alla forza peso e alla tensione della fune T; la risultante di queste forze è nulla, in quanto il corpo è in quiete:

$$-m_2 g - k\Delta l_0 + T = 0$$

dove si è scelto il verso positivo orientato verso l'alto. Da questa equazione si ottiene direttamente T:

$$\boxed{T = m_2 g + k\Delta l_0 = 39.6 \text{ N}}$$

Nella direzione parallela al piano, il corpo m_1 è soggetto alla componente della forza peso in quella direzione, alla tensione della fune T (la stessa di prima in modulo) e alla reazione vincolare dell'appoggio R. All'equilibrio si ha

$$m_1 g \sin(\theta) - T - R = 0$$

che fornisce il valore

$$\boxed{R = (1/2)m_1 g - m_2 g - k\Delta l_0 = 29.0 \text{ N}}$$

Le componenti delle forze perpendicolari al piano non ci interessano.

b) Quando viene rimosso l'appoggio sulla massa m_1, quest'ultima sarà libera di scivolare lungo il piano inclinato. Le equazioni della dinamica sono

$$\begin{aligned} m_2 a &= -m_2 g - k\Delta l_0 + T' \\ m_1 a &= (1/2)m_1 g - T' \,, \end{aligned}$$

dove l'accelerazione è la stessa per le due masse. Sommandole si elimina T' e si ottiene l'accelerazione iniziale del sistema:

$$\boxed{a = \frac{(1/2)m_1 g - m_2 g - k\Delta l_0}{m_1 + m_2} = 1.81 \text{ m/s}^2}$$

Lo stesso risultato poteva essere ricavato considerando le due masse come un sistema unidimensionale, a due corpi posti a distanza fissa, soggetto a tre forze esterne: la forza elastica, la forza peso associata a m_2 e, nella direzione opposta, metà della forza peso associata a m_1. L'accelerazione del centro di massa di tale sistema coincide con il risultato appena trovato.

c) Negli istanti successivi, quando la massa m_2 si trova ad una quota generica x, l'equazione del moto del sistema è la seguente

$$(m_1+m_2)d^2x/dt^2 = (1/2)m_1 g - m_2 g - k(x - l_0) = -kx + [(1/2)m_1 - m_2 + kl_0] \,. \tag{1}$$

ovvero $\ddot{x} = -\omega^2 x + c$, con

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 2.5 \text{ rad/s}}$$

e

$$c = \frac{(1/2)m_1 g - m_2 g + k l_0}{m_1 + m_2} = 3.38 \text{ m/s}^2 \,. \tag{2}$$

d) Il moto è armonico, dato che le due forze peso sono costanti e l'altra forza attiva è la forza elastica. Il sistema è equivalente ad un'unica massa, $(1/2)m_1 - m_2$, appesa verticalmente alla molla. La soluzione dell'equazione del moto è del tipo:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{c}{\omega^2}}$$

che corrisponde ad un'oscillazione di ampiezza A attorno al punto medio $c/\omega^2 = 0.54$ m. L'ampiezza è la distanza del punto iniziale dal punto medio di oscillazione, $A = c/\omega^2 - x_0 = 0.29$ m. Le condizioni iniziali, $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, impongono $\varphi = -\pi$, ovvero

$$\boxed{x(t) = \frac{c}{\omega^2} - A\cos(\omega t)} \,.$$

La massima altezza raggiunta è $x_M = c/\omega^2 + A = 0.83$ m.

e) La quota iniziale della massa m_2 è x_0, mentre la quota massima è x_M. A queste corrispondono le quote h_0 e h_M della massa m_1, che scende lungo il piano, in modo che $(h_0 - h_M) = (1/2)(x_M - x_0)$. La conservazione dell'energia, tra l'istante iniziale e quello di massima elongazione impone che:

$$m_1 g h_0 + m_2 g x_0 + \frac{1}{2}k(x_0 - l_0)^2 = m_1 g h_M + m_2 g x_M + \frac{1}{2}k(x_M - l_0)^2$$

da cui

$$\frac{1}{2}k[(x_M - l_0)^2 - (x_0 - l_0)^2] = m_1 g(h_0 - h_M) - m_2 g(x_M - x_0)$$

ovvero

$$\frac{1}{2}k[(x_M - l_0)^2 - (x_0 - l_0)^2] = g[(1/2)m_1 - m_2](x_M - x_0)$$

Inserendo i valori numerici precedentemente trovati si può verificare l'identità dei due membri, entrambi uguali a 28.42 J.

Soluzione esercizio I.2

a) Chiamiamo F la reazione vincolare agente sulla scala in P, nella direzione verticale. Chiamiamo R_x e R_y le componenti orizzontale e verticale della reazione vincolare agente sulla scala nel punto C. Imponiamo quindi l'equilibrio per traslazioni (lungo x ed y) e per rotazioni attorno a C, sapendo che la distanza tra C e P vale $h/\sin(\theta) = 2h/\sqrt{3}$ e che la forza peso è applicata nel CM della scala ad una distanza $b = 2h/\sqrt{3} - L/2$:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y + F - mg = 0 \\ (1/2)(2h/\sqrt{3})F - (1/2)mg(2h/\sqrt{3} - L/2) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Da cui si ottengono i risultati

$$\boxed{F = mg[1 - (\sqrt{3}/4)L/h] = 73.73\,\mathrm{N}} \tag{4}$$

$$\boxed{R_x = 0} \tag{5}$$

$$\boxed{R_y = mg - F = (\sqrt{3}/4)L/h = 318.3\,\mathrm{N}} \tag{6}$$

b) Ora che Sam è sulla scala le equazioni per l'equilibrio cambieranno in quanto dobbiamo considerare anche la forza peso esercitata da Sam:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y + F - mg - Mg = 0 \\ (1/2)(2h/\sqrt{3})F - (1/2)mg(2h/\sqrt{3} - L/2) + (1/2)Mgl = 0 \end{cases} \tag{7}$$

dove l è la distanza di Sam dal punto C, con segno, presa come positiva quando sta sopra. Possiamo calcolare di nuovo F tramite l'equazione dei momenti delle forze rispetto a C. Stavolta il modulo di F dipende da l:

$$F(l) = mg[1 - (\sqrt{3}/4)L/h - (\sqrt{3}/2)(M/m)l/h] \tag{8}$$

e la condizione critica si ottiene quando la reazione vincolare del suolo si annulla: $F(l_c) = 0$, da cui segue

$$l_c = \frac{m}{M}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(h/L) - \frac{1}{2}\right)L = 0.927\,\mathrm{m} \tag{9}$$

da cui

$$\boxed{h_c = l_c \sin(\theta) + h = \frac{\sqrt{3}}{2}l_c + h = 8.80\,\mathrm{m}} \tag{10}$$

c) Per la scala usiamo il teorema di Steiner (essa infatti ruota attorno ad un asse parallelo a quello passante per il suo centro di massa) mentre per il pompiere e per il gatto il momento di inerzia sarà semplicemente il prodotto della loro massa per l_c^2 (li stiamo apporssimando come punti materiali). Dunque

$$\boxed{I = \frac{1}{12}mL^2 + m(2h/\sqrt{3} - L/2)^2 + (M + m_g){l_c}^2 = 939.5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2} \tag{11}$$

d) Appena preso il gatto il sistema non è più all'equilibrio. La reazione vincolare al suolo è nulla e la scala comincia a ruotare attorno a C. Le uniche forze che producono la rotazione sono le forze peso della scala, di Sam e del gatto, perché la reazione in C ha momento nullo. Avremo quindi:

$$I\alpha = (1/2)(M + m_g)gl_c - mg(h/\sqrt{3} - L/4) \tag{12}$$

che implica

$$\boxed{\alpha = 0.024\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}} \tag{13}$$

Soluzione esercizio II.1

a) (diagramma P-V). I volumi mancanti si trovano dall'equazione di stato dei gas ideali:

$$V_A = 88.2\ \mathrm{l},\quad \mathrm{V_B} = 20.3\ \mathrm{l},\quad \mathrm{V_C} = 4.06\ \mathrm{l},\quad \mathrm{V_D} = 17.6\ \mathrm{l}\,. \tag{14}$$

b) Dal primo principio della termodinamica ricaviamo tutte le grandezze richieste.

i) Trasformazioni isobare.

Per le due trasformazioni isobare la pressione è costante, quindi il calore scambiato dal sistema è dato da ($c_p = \frac{5}{2}R$ perché si tratta di un gas monoatomico)

$$Q_{A\to B} = nc_p(T_B - T_A) = -20.36\ \mathrm{kJ}, \tag{15}$$

$$Q_{C\to D} = nc_p(T_A - T_B) = 20.36\ \mathrm{kJ}. \tag{16}$$

Il lavoro compiuto dal sistema è dato dall'area sottesa al grafico P-V:

$$W_{A\to B} = P_B(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) = -8.144\ \mathrm{kJ}, \tag{17}$$

$$W_{C\to D} = P_C(V_D - V_C) = nR(T_A - T_B) = 8.143\ \mathrm{kJ}. \tag{18}$$

La variazione di energia interna delle trasformazioni isobare, infine, è data da:

$$\Delta U_{A \to B} = nc_v(T_B - T_A) = -12.22 \text{ kJ}, \tag{19}$$

$$\Delta U_{C \to D} = nc_v(T_D - T_C) = 12.22 \text{ kJ}. \tag{20}$$

ii) Trasformazioni isoterme.
Per le due trasformazioni isoterme la temperatura è costante, quindi l'energia interna $U = U(T)$, che è funzione della sola temperatura, è nulla, infatti

$$\Delta U_{B \to C} = nc_v \Delta T = 0, \tag{21}$$

$$\Delta U_{D \to A} = 0. \tag{22}$$

Per questo motivo, il calore scambiato dal sistema è uguale al lavoro compiuto dal sistema e quindi

$$Q_{B \to C} = W_{B \to C} = \int_{V_B}^{V_C} PdV = nRT_B ln \frac{V_C}{V_B} = -3.92 \text{ kJ} \tag{23}$$

e analogamente

$$Q_{D \to A} = W_{D \to A} = nRT_A ln \frac{V_A}{V_D} = 17.05 \text{ kJ}. \tag{24}$$

c) La variazione di entropia totale in un ciclo è nulla. Lo verifichiamo calcolandola per ogni trasformazione:

$$\Delta S_{A \to B} = \int_{\text{rev } AB} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} = -30.51 \text{ J/K}; \tag{25}$$

$$\Delta S_{B \to C} = \int_{\text{rev } BC} \frac{\delta Q}{T} = nR \ln \frac{V_C}{V_B} = -13.4 \text{ J/K}; \tag{26}$$

$$\Delta S_{C \to D} = \int_{\text{rev } CD} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_C}^{T_D} \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_D}{T_C} = 30.51 \text{ J/K}; \tag{27}$$

$$\Delta S_{D \to A} = \int_{\text{rev } DA} \frac{\delta Q}{T} = nR \ln \frac{V_A}{V_D} = 13.4 \text{ J/K}. \tag{28}$$

E quindi

$$\Delta S_{ciclo} = \Delta S_{A \to B} + \Delta S_{B \to C} + \Delta S_{C \to D} + \Delta S_{D \to A} = 0. \tag{29}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Essendo la potenza di 12 kW il lavore assorbito dal frigorifero in 1 s è di $W = P \cdot 1\text{s} = 12$ kJ o equivalentemente di $W = 3$ kJ per ciclo. Sapendo che

$$\Delta S_{\text{amb}} = \frac{Q_{\text{amb}}}{T_{\text{amb}}} \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{amb}} = \Delta S_{\text{amb}} T_{\text{amb}} \tag{30}$$

possiamo facilmente ricavare il calore assorbito dalla sorgente in un ciclo Q_0 come

$$\boxed{Q_0 = Q_{\text{amb}} - W = 1500\,\text{J}} \tag{31}$$

b) Avendo Q_0 e W è facile ottenere il coeeficiente di prestazione

$$\boxed{COP = \frac{Q_0}{W} = 0.5} \tag{32}$$

c) In $t = 70$ s il calore assorbito dal frigorifero è $Q = 4tQ_0$. Questo calore andrà prima a raffreddare l'acqua fino alla temperatura $T_F = 273.15$ K di solidificazione e poi a trasformarne la metà in ghiaccio:

$$4tQ_0 = m\left[c(T_0 - T_F) + \frac{\lambda}{2}\right] \tag{33}$$

Quindi

$$\boxed{T_0 = T_F + \frac{1}{c}\left(\frac{4tQ_0}{m} - \frac{\lambda}{2}\right) = 283.5\,\text{K}} \tag{34}$$

d) L'entropia dell'acqua varierà in parte durante il cambiamento di temperatura da T_0 a T_F e in parte durante la solidificazione:

$$\boxed{\Delta S = mc\ln\left(\frac{T_F}{T_0}\right) - \frac{m\lambda}{2T_F} = -1.53\,\frac{\text{kJ}}{\text{K}}} \tag{35}$$