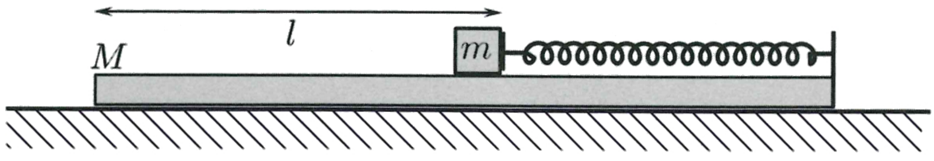
Fisica Generale I
A.A. 2013-2014, 22 Luglio 2014

Esercizio I.1



Un corpo di massa $m = 1$ kg è poggiato su una lastra di massa $M = 4$ kg. La lastra può scivolare su un piano orizzontale liscio (vedi figura). Il corpo può scivolare senza attrito sulla lastra ed è inizialmente appoggiato a uno degli estremi di una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 600$ N/m, che ha l'altro estremo fissato alla lastra. La molla è inizialmente tenuta compressa di 5 cm e lo spazio che separa il corpo di massa m dal bordo sinistro della lastra è pari a $l = 20$ cm. Ad un certo istante, $t = 0$, la forza esterna che comprime la molla cessa di agire e il corpo viene spinto dalla molla che si stende. Determinare:
a) le accelerazioni del corpo e della lastra al tempo $t = 0$, e l'accelerazione relativa;
b) le velocità del corpo e della lastra nell'istante in cui il corpo raggiunge l'estremo sinistro della lastra.
Supponendo che il corpo di massa m scivoli sulla piastra con un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$, determinare in questo caso:
c) le accelerazioni del corpo e della lastra al tempo $t = 0$, e l'accelerazione relativa;
d) le velocità del corpo e della lastra nell'istante in cui il corpo raggiunge l'estremo sinistro della lastra.

Esercizio I.2

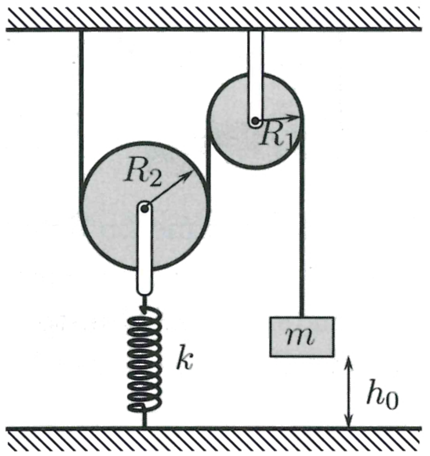
Si abbiano le due pulegge mostrate in figura, da considerare come cilindri pieni omogenei di raggio $R_1 = 5$ cm e $R_2 = 10$ cm e massa $M_1 = 2$ kg e $M_2 = 4$ kg. La puleggia 1 può ruotare liberamente attorno al suo asse mantenuto fisso da una staffa fissata al soffitto. All'asse della puleggia 2 è invece agganciata una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m con l'altro estremo fissato al pavimento. Tra le pulegge passa una fune ideale avente l'estremo sinistro attaccato al soffitto; al suo estremo destro è invece appeso un corpo di massa $m = 6$ kg che si trova ad un'altezza $h_0 = 15$ cm dal pavimento. L'asse della puleggia 2, a seconda del moto del corpo di massa m, può salire o scendere liberamente. Si supponga inoltre che sia la molla che la fune abbiano massa trascurabile e che quest'ultima sia inestensibile e che non scivoli mai rispetto alle pulegge.

a) Determinare l'allungamento della molla all'equilibrio.

b) Ad un certo istante la molla viene improvvisamente tolta, la puleggia 2 sale e il corpo di massa m scende. Usando la conservazione dell'energia meccanica, determinare la velocità del corpo di massa m nell'istante in cui raggiunge il pavimento [si ricordi che le condizioni di rotolamento puro per le velocità angolari delle pulegge danno $\omega_1 = v/R_1$ e $\omega_2 = v/(2R_2)$].

c) Tornando alla configurazione con la molla come in figura, si consideri il caso in cui la massa m sia spostata di una quota y generica rispetto alla posizione di equilibrio calcolata al punto (a); si scrivano le equazioni del moto per la massa m e per le pulegge; si dimostri che il sistema si comporta come un oscillatore armonico e se ne calcoli il periodo.

d) *facoltativo:* Si ripeta il calcolo del periodo del punto precedente ma usando la conservazione dell'energia meccanica.

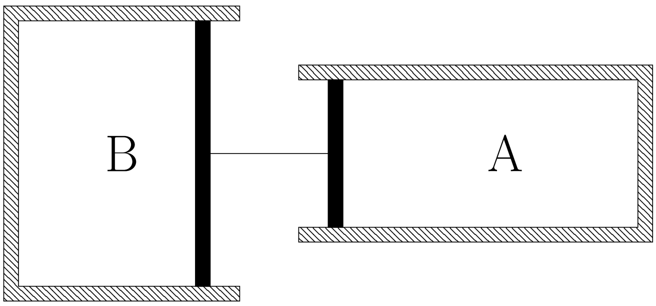


Esercizio II.1

Tre moli di gas ideale monoatomico, inizialmente nello stato I a pressione $P_I = 10^4$ Pa e volume $V_I = 0.5$ m^3, subiscono dapprima una espansione isoterma fino allo stato A di volume doppio e poi una trasformazione isocora fino lo stato finale $F = (2V_I, 2P_I)$. Lo stesso stato finale potrebbe essere raggiunto a partire dal medesimo punto iniziale I dapprima facendo raddoppiare la pressione comprimendo il gas lungo la stessa isoterma di prima fino al punto B e poi facendolo espandere in una trasformazione isobara fino al punto F. Tutte le trasformazioni siano quasistatiche reversibili.

a) Disegnare il diagramma dei due diversi cammini passanti per i punti di equilibrio A e B nel piano $P - V$.
b) Per ciascuna delle 4 trasformazioni calcolare la variazione di energia interna, il lavoro fatto, il calore scambiato e la variazione di entropia.
c) Confrontare le variazioni di entropia e di energia interna lungo i due percorsi passanti per A e per B.
d) Se il primo percorso viene invertito e si percorre il ciclo I-B-F-A-I, si ottiene una macchina termica. Si calcoli il rendimento.

Esercizio II.2



Due cilindri adiabatici A e B, di sezioni $S_A = 0.05$ m^2 ed $S_B = 0.1$ m^2, sono diposti orizzontalmente, contrapposti in modo che i due pistoni che li chiudono sono affacciati e collegati da una fune inestensibile di massa trascurabile. I due cilindri contengono rispettivamente $n_A = 0.1$ mol ed $n_B = 0.4$ mol di gas ideale e sono ciascuno a contatto termico con una diversa miscela di acqua e ghiaccio, alla stessa temperatura $T_0 = 273.15$ K. Il volume inizialmente racchiuso nel cilindro A è $V_A = 0.01$ m^3, mentre la pressione esterna vale $P_0 = 10^5$ Pa. Il sistema è in equilibrio termodinamico con la fune tesa e la sua tensione vale T.
a) Determinare le pressioni iniziali del gas nei due cilindri A e B.
Ad un certo istante la fune viene tagliata e il gas contenuto in ciascun cilindro subisce una rapida compressione. Lo stato di equilibrio termodinamico viene nuovamente raggiunto, anche grazie all'attrito che smorza ogni eventuale oscillazione dei due pistoni.
b) Determinare i nuovi volumi di equilibrio e i lavori effettuati dai due gas nei due cilindri.
c) Nel nuovo stato di equilibrio si osserva che, nelle miscele di acqua e ghiaccio a contatto con i due cilindri A e B, si sono sciolti rispettivamente m_A ed m_B kg di ghiaccio; determinare le quantità m_A ed m_B, sapendo che il calore di fusione del ghiaccio è $\lambda_F = 3.3 \times 10^5$ J/kg.
d) Calcolare la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione esercizio I.1

a) Una volta liberata la molla, entrambi i corpi si mettono in movimento. Il corpo di massa m si muoverà verso sinistra per azione della forza della molla mentre la lastra si muoverà verso destra per azione della stessa forza (vale il principio di azione e reazione). In particolare, applicando il II principio della dinamica all'istante $t = 0$, si ha $ma_m(t = 0) = -k\Delta l$ e $Ma_M(t = 0) = k\Delta l$, dove $\Delta l = 0.05$ m, e quindi

$$\boxed{a_m(0) = -\frac{k\Delta l}{m} = -30 \text{ m/s}^2} \tag{1}$$

e

$$\boxed{a_M(0) = \frac{k\Delta l}{M} = 7.5 \text{ m/s}^2} \; . \tag{2}$$

Notiamo che il rapporto delle accelerazioni è correttamente determinato dal rapporto delle masse, consistentemente con la definizione di massa inerziale.

Se definiamo la coordinata relativa, x_r, come la differenza tra la coordinata spaziale di un punto qualsiasi della lastra e la coordinata del corpo di massa m, si avrà che x_r cresce nel tempo in modo tale che l'accelerazione relativa è data dalla somma dei moduli delle accelerazioni precedentemente trovate ($a_r = a_M - a_m = |a_M| + |a_m|$). Dunque

$$\boxed{a_r(0) = 37.5 \text{ m/s}^2} \; . \tag{3}$$

Notiamo che l'accelerazione relativa è la stessa che avremmo trovato considerando il sistema come un sistema a due corpi puntiformi e interagenti solo tra loro, vincolati a traslare in una direzione. In tal caso si poteva trovare l'accelerazione relativa applicando il II principio al problema a un corpo equivalente, utilizzando la massa ridotta μ:

$$a_r(0) = F/\mu = k\Delta l \, \frac{M+m}{Mm} = \frac{5}{4} \, k\Delta l \tag{4}$$

che dà lo stesso risultato di prima.

b) Trattiamo il problema dal punto di vista delle grandezze conservate. Dato che la forza che produce l'accelerazione è una forza interna al sistema composto dalla lastra e dal corpo, e che nessuna forza esterna agisce in direzione orizzontale, possiamo applicare la conservazione della quantità di moto totale $P = mv_m + Mv_M$, sapendo che $P = 0$ all'istante iniziale $t = 0$. Dunque in ogni istante successivo si ha

$$mv_m + Mv_M = 0 \; . \tag{5}$$

Possiamo anche utilizzare la conservazione dell'energia, dato che la forza elastica è conservativa, e quindi

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}k\Delta l^2\,, \tag{6}$$

dove il membro di destra è l'energia meccanica (puramente potenziale) all'inizio, quando la molla è compressa, e le velocità v_m e v_M sono le velocità del corpo e della lastra in qualsiasi istante dopo che il corpo si è staccato dalla molla, e quindi anche quando il corpo raggiunge il bordo sinistro della lastra. Combinando le due equazioni si ottiene

$$\boxed{|v_{m,f}| = \sqrt{\frac{k\Delta l^2}{m(1+\frac{m}{M})}} = 1.095 \text{ m/s}} \tag{7}$$

e

$$\boxed{|v_{M,f}| = \frac{m}{M}\,|v_{m,f}| = 0.274 \text{ m/s}}\,. \tag{8}$$

c) In questo caso la risoluzione è analoga ai punti precedenti, occorre però aggiungere il contributo della forza di attrito tra il corpo e la lastra: una volta liberata la molla, infatti, il corpo di massa m si muoverà per azione della forza della molla (diretta verso sinistra) e della forza di attrito con la lastra $\mathbf{F}_a$ (diretta verso destra e costante), mentre la lastra si muoverà per azione della forza della molla (diretta verso destra) e della forza di reazione alla forza di attrito con il corpo sovrastante -$\mathbf{F}_a$ (verso sinistra). All'istante $t = 0$ in cui inizia il movimento si ha:

$$ma_m = -k\Delta l + F_a = -k\Delta l + \mu_d mg \tag{9}$$

e

$$Ma_M = k\Delta l - F_a = k\Delta l - \mu_d mg \tag{10}$$

da cui si ottengono i risultati

$$\boxed{a_m(0) = -\frac{k\Delta l}{m} + \mu_d g = -28 \text{ m/s}^2}\,, \tag{11}$$

$$\boxed{a_M(0) = \frac{k\Delta l}{M} - \frac{m}{M}\mu_d g = 7.0 \text{ m/s}^2} \tag{12}$$

avendo approssimato $g \sim 10$ m/s^2 per semplicità. L'accelerazione relativa diventa

$$\boxed{a_r = a_M - a_m = 35 \text{ m/s}^2}\,. \tag{13}$$

Notiamo che l'accelerazione relativa viene ridotta rispetto al valore trovato senza attrito di una quantità pari a F_a/μ, dove $\mu = mM/(m+M)$ è la solita massa ridotta.

d) Anche in questo caso le forze sono tutte interne al sistema e quindi la quantità di moto si conserva e vale anche qui che $mv_m + Mv_M = 0$. Invece, a differenza di prima, ora abbiamo anche una forza dissipativa, l'attrito, di cui però possiamo calcolare facilmente il lavoro eseguito, nota la distanza percorsa. Il lavoro eseguito dall'attrito può essere eguagliato alla variazione di energia meccanica in questo modo:

$$\frac{1}{2}mv_{m,f}^2 + \frac{1}{2}Mv_{M,f}^2 - \frac{1}{2}k\Delta l^2 = -lF_a \tag{14}$$

dove le velocità $v_{m,f}$ e $v_{M,f}$ sono quelle misurate quando il corpo ha raggiunto il bordo della piastra, essendo scivolato per una distanza l soggetto alla forza costante F_a, opposta al moto. Combinando le due leggi si ottengono i risultati

$$\boxed{|v_{m,f}| = \sqrt{\frac{k\Delta l^2 - 2\mu_d mgl}{m(1+\frac{m}{M})}} = 0.76 \text{ m/s}}, \tag{15}$$

e

$$\boxed{|v_{M,f}| = \frac{m}{M}|v_{m,f}| = 0.19 \text{ m/s}}. \tag{16}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Nella situazione di equilibrio le tensioni dei tre tratti di fune (da destra a sinistra T_1, T_2, T_3) devono essere uguali tra di loro, altrimenti le pulegge ruoterebbero soggette a momenti di forze non nulli. Inoltre T_1 deve bilanciare il peso della massa appesa m, mentre la somma di T_2 e T_3 deve compensare il peso della puleggia 2 e la forza elastica esercitata dalla molla. Quindi

$$T_1 = T_2 = mg \tag{17}$$
$$T_2 = T_3 \tag{18}$$
$$T_3 + T_2 = M_2 g + k\Delta y_0 \tag{19}$$

dove Δy_0 è l'allungamento della molla incognito. Risolvendo il sistema si trova:

$$\boxed{\Delta y_0 = \frac{(2m - M_2)g}{k} = 7.85\,\text{cm}} \tag{20}$$

b) All'istante iniziale la configurazione è quella del punto precedente, ma senza la molla. All'istante finale la massa di destra ha raggiunto il pavimento essendo scesa di una quota h_0; la puleggia 2 sarà quindi salita di una quota $h_0/2$, dato che la fune deve mantenere lunghezza fissata. Per la stessa ragione, se la velocità del corpo è v, verso il basso, quella della puleggia 2 è $v/2$ verso l'alto.

L'energia meccanica del sistema si conserva: la variazione di energia potenziale gravitazionale deve essere uguale all'energia cinetica finale, dato che all'inizio il sistema è fermo. Quindi:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M_2(\frac{v}{2})^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = mgh_0 - M_2gh_0/2\ . \tag{21}$$

Ora ricordiamo che $\omega_1 = v/R_1$ e $\omega_2 = v/(2R_2)$, e che i momenti d'inerzia delle due pulegge sono $I_1 = (1/2)M_1R_1^2$ e $I_2 = (1/2)M_2R_2^2$. Dunque

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{8}M_2v^2 + \frac{1}{4}M_1v^2 + \frac{1}{16}M_2v^2 = (m - M_2/2)gh_0\ , \tag{22}$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}M_1v^2 + \frac{3}{16}M_2v^2 = (m - M_2/2)gh_0\ , \tag{23}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4(m - M_2/2)gh_0}{2m + M_1 + (3/4)M_2}} = 1.176\,\mathrm{m/s}}\ . \tag{24}$$

Notiamo che lo stesso risultato può essere scritto nella forma

$$v = v_{\mathrm{lib}}\sqrt{\frac{1 - M_2/(2m)}{1 + M_1/(2m) + 3M_2/(8m)}}\ , \tag{25}$$

dove $v_{\mathrm{lib}} = \sqrt{2gh_0}$ è la velocità con cui cadrebbe il corpo se fosse svincolato dalla fune e dalle pulegge. Con i valori assegnati, il fattore a destra è uguale a $\sqrt{8/17}$ e $v < v_{\mathrm{lib}}$, com'è giusto aspettarsi che sia.

c) Prendiamo come positivo il verso di y che punto versa il basso. Le equazioni del moto che ci interessano sono quelle per

i) la traslazione del corpo di massa m:

$$ma = mg - T_1 \tag{26}$$

ii) la rotazione della puleggia 1:

$$I_1\alpha_1 = (T_1 - T_2)R_1 \tag{27}$$

iii) la rotazione della puleggia 2:

$$I_2\alpha_2 = (T_2 - T_3)R_2 \tag{28}$$

iv) la traslazione della puleggia 2:

$$M_2a_2 = T_2 + T_3 - M_2g - k(y/2) \tag{29}$$

Ricordando le condizioni di rotolamento puro e i momenti d'inerzia delle pulegge, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} ma &= mg - T_1 && (30)\\ (1/2)M_1 a &= T_1 - T_2 && (31)\\ (1/4)M_2 a &= T_2 - T_3 && (32)\\ (1/2)M_2 a &= T_2 + T_3 - M_2 g - k(y/2)\,. && (33) \end{aligned}$$

Le tre tensioni possono essere eliminate con facili passaggi algebrici. Ad esempio si può ricavare T_1 dalla prima e inserirlo nella seconda, e ricavare T_3 dalla terza e inserire il tutto nella quarta. Si ottiene

$$\boxed{a = -\left(\frac{k/2}{2m + M_1 + (3/4)M_2}\right) y + \frac{2(m - M_2/2)g}{2m + M_1 + (3/4)M_2}} \qquad (34)$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di periodo

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2m + M_1 + (3/4)M_2}{k/2}} = 1.16\ \mathrm{s}\,.} \qquad (35)$$

d) Sia y la distanza della massa m dalla posizione di equilibrio in direzione verticale, in modo che in un istante generico la quota a cui si trova il corpo sia $h_0 - y$ e la sua velocità sia $v = \dot{y}$. Nello stesso istante la quota della puleggia 2 è $h_2 + (y/2)$, dove h_2 è la quota all'equilibrio, e la velocità della puleggia è $\dot{y}/2$. Infine, la molla avrà un allungamento pari a $(y/2) + \Delta y_0$, dove Δy_0 era l'allungamento all'equilibrio. L'energia meccanica del sistema sarà dunque

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M_2(\frac{\dot{y}}{2})^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 && (36)\\ &+ mg(h_0 - y) + M_2 g[h_2 + (y/2)] + \frac{1}{2}k[(y/2) + \Delta y_0]^2\,. && (37) \end{aligned}$$

Al solito si ricordano le condizioni per il rotolamento puro e i valori dei momenti d'inerzia, in modo da scrivere

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M_2(\frac{\dot{y}}{2})^2 + \frac{1}{4}M_1\dot{y}^2 + \frac{1}{16}M_2\dot{y}^2 && (38)\\ &+ mg(h_0 - y) + M_2 g[h_2 + (y/2)] + \frac{1}{2}k[(y/2) + \Delta y_0]^2\,. && (39) \end{aligned}$$

Ora si può usare la conservazione dell'energia meccanica nella forma $dE/dt = 0$, da cui

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dE}{dt} &= m\ddot{y}\dot{y} + \frac{1}{4}M_2\ddot{y}\dot{y} + \frac{1}{2}M_1\ddot{y}\dot{y} + \frac{1}{8}M_2\ddot{y}\dot{y} && (40)\\ &- mg\dot{y} + \frac{1}{2}M_2 g\dot{y} + \frac{1}{2}k[(y/2) + \Delta y_0]\dot{y}\,. && (41) \end{aligned}$$

Riordinando i termini e ricordando dal punto (a) che $k\Delta y_0 = (2m - M_2)g$, si ottiene

$$\boxed{2[2m + M_1 + (3/4)M_2]\ddot{y} = -ky} \tag{42}$$

che è l'equazione di un oscillatore, con il periodo già trovato al punto precedente.

Soluzione esercizio II.1

a) Per disegnare il grafico conviene calcolare dapprima la temperatura dell'isoterma. Usando l'equazione di stato nel punto di equilibrio I si ottiene: $T_I = P_I V_I/(nR) = 200.5$ K, essendo $n = 3$ mol e $R = 8.3143$ J/(mol K). La temperatura nel punto di equilibrio finale F si ottiene allo stesso modo e sarà pari a quattro volte quella iniziale, $T_F = 802$ K. (grafico...)

b)

Percorso 1: Il gas viene dapprima espanso lungo un'isoterma, raggiungendo lo stato A di volume $V_A = 2V_I = 0.25$ m^3. Dato che $PV =$ costante, la pressione si riduce alla metà di quella iniziale: $P_A = P_I/2 = 5000$ Pa. Le quantità termodinamiche richieste, nel tratto di **isoterma I → A** sono:

$$\boxed{W_{IA} = nRT_I \ln\frac{V_A}{V_I} = P_I V_I \ln 2 = 3466\,\mathrm{J}} \tag{43}$$

$$\boxed{\Delta U_{IA} = 0} \tag{44}$$

$$\boxed{Q_{IA} = \Delta U_{IA} + W_{IA} = W_{IA} = 3466\,\mathrm{J}} \tag{45}$$

$$\boxed{\Delta S_{IA} = \frac{Q_{IA}}{T_I} = nR\ln\frac{V_A}{V_I} = nR\ln 2 = 17.29\,\mathrm{J/K}}\,. \tag{46}$$

Poi il gas raggiunge, mediante un'isocora, lo stato $F = (2V_I, 2P_I)$. Per l'**isocora A → F** si ha:

$$\boxed{W_{AF} = 0} \tag{47}$$

$$\boxed{\Delta U_{AF} = nc_v(T_F - T_A) = \frac{9}{2}P_I V_I = 22500\,\mathrm{J}} \tag{48}$$

essendo $c_v = (3/2)R$ il calore specifico a volume costante di un gas ideale monoatomico. Poi

$$\boxed{Q_{AF} = \Delta U_{AF} = 22500\,\mathrm{J}} \tag{49}$$

$$\boxed{\Delta S_{AF} = nc_v \ln\frac{T_F}{T_A} = nc_v \ln 4 = 3nR\ln 2 = 51.87\,\mathrm{J/K}} \tag{50}$$

Percorso 2: Dallo stato iniziale I, il gas viene compresso mediante l'**isoterma I $\to$ B** fino allo stato $B = (V_I/2, 2P_I)$. Le quantità termodinamiche richieste sono:

$$\boxed{W_{IB} = nRT_I \ln \frac{V_B}{V_I} = P_I V_I \ln(1/2) = -W_{IA} = -3466\,\mathrm{J}} \tag{51}$$

$$\boxed{\Delta U_{IB} = 0} \tag{52}$$

$$\boxed{Q_{IB} = \Delta U_{IB} + W_{IB} = W_{IB} = -3466\,\mathrm{J}} \tag{53}$$

$$\boxed{\Delta S_{IB} = nR \ln \frac{V_B}{V_I} = nR \ln(1/2) = -nR \ln 2 = -17.29\,\mathrm{J/K}} \tag{54}$$

Il punto finale F viene quindi raggiunto mediante un'**isobara B $\to$ F**, per cui si ha:

$$\boxed{W_{BF} = P_F(V_F - V_B) = 3P_I V_I = 15000\,\mathrm{J}} \tag{55}$$

$$\boxed{\Delta U_{BF} = nc_v(T_F - T_B) = \frac{3}{2}nR(T_F - T_B) = \frac{9}{2}P_I V_I = 22500\,\mathrm{J}} \tag{56}$$

$$\boxed{Q_{BF} = W_{BF} + \Delta U_{BF} = \frac{15}{2}P_I V_I = 37500\,\mathrm{J}} \tag{57}$$

$$\boxed{\Delta S_{BF} = nc_p \ln \frac{T_F}{T_B} = nc_p \ln 4 = 5nR \ln 2 = 86.45\,\mathrm{J/K}} \tag{58}$$

c) Ci aspettiamo che la variazione di entropia e la variazione di energia interna lungo i due percorsi siano uguali, in quanto queste due quantità sono funzioni di stato e pertanto le loro variazioni dipendono solo dallo stato iniziale e finale e non dal percorso intermedio.
Esplicitando le variazioni di entropia:

$$\Delta S_1 = \Delta S_{IA} + \Delta S_{AF} = nR \ln 2 + 3nR \ln 2 = 4nR \ln 2 = 69.16\,\mathrm{J/K} \tag{59}$$

$$\Delta S_2 = \Delta S_{IB} + \Delta S_{BF} = -nR \ln 2 + 5nR \ln 2 = 4nR \ln 2 = 69.16\,\mathrm{J/K} \tag{60}$$

Per le variazioni di energia interna si ha:

$$\Delta U_1 = \Delta U_{IA} + \Delta U_{AF} = \frac{9}{2}P_I V_I = 22500\,\mathrm{J/K} \tag{61}$$

$$\Delta U_2 = \Delta U_{IB} + \Delta U_{BF} = \frac{9}{2}P_I V_I = 22500\,\mathrm{J/K} \tag{62}$$

e tutto torna.

d) Il rendimento è definito come il rapporto tra il lavoro netto eseguito nel ciclo e il calore assorbito. Percorrendo il ciclo in senso orario, il calore viene assorbito solo nell'espansione isobara BF, mentre il lavoro eseguito sarà la somma algebrica dei lavori eseguiti nei tratti BF, AI e IB, avendo cura di invertire il segno del lavoro precedentemente trovato per IA. Dunque

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{assorb}}} = \frac{W_{BF} + W_{AI} + W_{IB}}{Q_{BF}} = \frac{W_{BF} + 2W_{IB}}{Q_{BF}} \tag{63}$$

e inserendo i valori numerici precedentemente trovati, si ottiene

$$\boxed{\eta = \frac{15000\ \text{J} - 6932\ \text{J}}{37500\ \text{J}} = 0.215}\,. \tag{64}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Con i dati a disposizione, la pressione del gas all'interno del pistone A è immediatamente ricavabile dalla legge dei gas perfetti:

$$\boxed{P_A = n_A R T_0 / V_A = 0.227 \times 10^5\,\text{Pa}}\,. \tag{65}$$

Si noti che P_A è minore della pressione esterna e la differenza di pressione tiene la fune in tensione.

Per determinare la pressione iniziale nel cilindro B, si devono esprimere le condizioni per l'equilibrio (meccanico) di entrambi i pistoni, tenendo conto della tensione della fune. In base alla definizione di pressione, la forza esercitata dal pistone del cilindro A sulla fune è

$$F_A = S_A(P_0 - P_A) \tag{66}$$

mentre la forza esercitata dal pistone del cilindro B è

$$F_B = S_B(P_0 - P_B)\,. \tag{67}$$

Le due forze agiscono in direzione opposta e devono essere uguali in modulo. Quindi $S_A(P_0 - P_A) = S_B(P_0 - P_B)$, da cui

$$\boxed{P_B = P_0 + \frac{S_A}{S_B}(P_0 - P_A) = P_0 + \frac{1}{2}(P_0 - P_A) = 0.613 \times 10^5\,\text{Pa}} \tag{68}$$

A questo punto possiamo usare l'equazione di stato per ricavare anche il volume inizialmente occupato dal gas nel cilindro B:

$$V_B = n_B R T_0 / P_B = 0.0148\,\text{m}^3\,. \tag{69}$$

b) Nello stato di equilibrio finale, dopo la compressione da parte dell'ambiente esterno a pressione costante P_0, la temperatura dei gas nei due cilindri è ancora uguale alla temperatura del bagno termico esterno T_0, pertanto le variazioni di energia interne sono nulle (il gas è ideale e l'energia interna dipende solo dalla temperatura). I volumi occupati dal gas nei due cilindri nella configurazione finale sono proporzionali alle rispettive moli di gas, in quanto le pressioni dei due gas sono uguali alla pressione esterna P_0 e l'equazione di stato dà:

$$\boxed{V'_A = n_A R T_0/P_0 = 2.27 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} \tag{70}$$

$$\boxed{V'_B = n_B R T_0/P_0 = 9.08 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}\,. \tag{71}$$

c) La trasformazione seguita al taglio della fune è irreversibile (non è quasistatica e ci sono pure attriti). Dato che il gas nei cilindri non varia la sua energia interna, segue che tutto il lavoro eseguito sul sistema dall'esterno, cioè dalla pressione atmosferica esterna costante, viene convertito in calore e trasferito al bagno termico di acqua e ghiaccio. Il lavoro eseguito dalla pressione esterna P_0 è facilmente calcolabile come il prodotto di P_0 per le variazioni di volume dei due cilindri. Quindi, i calori Q_A e Q_B ceduti alle due miscele di ghiaccio e acqua a contatto rispettivamente con il cilindro A e il cilindro B sono

$$Q_A = W_A = P_0|V'_A - V_A| = 773\,\mathrm{J} \tag{72}$$

$$Q_B = W_B = P_0|V'_B - V_B| = 572\,\mathrm{J} \tag{73}$$

e producono lo scioglimento di una quantità di ghiaccio pari a

$$\boxed{m_A = Q_A/\lambda_F = 2.34 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}} \tag{74}$$

$$\boxed{m_B = Q_B/\lambda_F = 1.73 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}} \tag{75}$$

d) La variazione di entropia dell'universo è data dalla somma della variazione di entropia del gas in A e B, dovuta alla compressione, e la variazione di entropia associata alla fusione di una massa di ghiaccio pari a $m_A + m_B$ a temperatura costante. Se si usa l'espressione dell'entropia del gas ideale in funzione di T e P e si considera che gli stati iniziale e finale hanno la stessa temperatura, si ottiene

$$\Delta S_{\mathrm{gas}} = -n_A R \ln\frac{P_0}{P_A} - n_B R \ln\frac{P_0}{P_B} = -2.86\,\mathrm{J/K}\,. \tag{76}$$

Per la miscela acqua-ghiaccio si ha invece

$$\Delta S_{\text{acqua-ghiaccio}} = \frac{Q_A}{T_0} + \frac{Q_B}{T_0} = 4.92\,\mathrm{J/K}\,. \tag{77}$$

La variazione di entropia dell'universo è quindi

$$\boxed{\Delta S_{\mathrm{universo}} = \Delta S_{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\text{acqua-ghiaccio}} = 2.06\,\mathrm{J/K}}\,, \tag{78}$$

ed è positiva, come dev'essere.