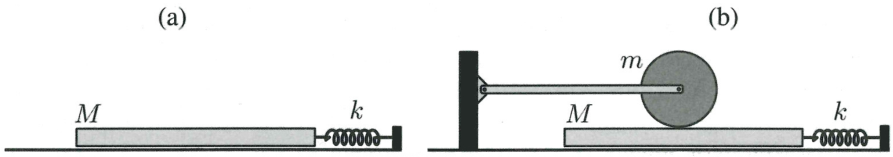
Fisica Generale I, A. A. 2013-2014, 28 Agosto 2014

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1



Una lastra di massa $M = 10$ kg poggia su un piano orizzontale su cui può scivolare senza attrito; in uno degli estremi la lastra è agganciata ad una molla di costante elastica $k = 395$ N/m mentre l'altro estremo è fisso, come nella figura in alto a sinistra.

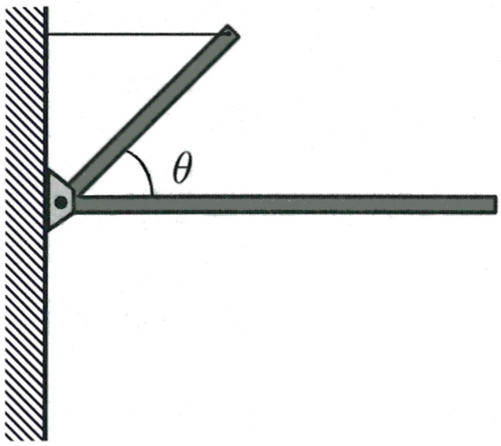
a) Determinare il periodo di oscillazione della lastra, T, attorno alla posizione di equilibrio.

b) Successivamente sulla lastra viene appoggiato un cilindro pieno di massa $m = 12$ kg e raggio R. Il cilindro può ruotare liberamente attorno al proprio asse che è mantenuto fisso da un'asta rigida di massa trascurabile, incernierata a una parete verticale come nella figura in alto a destra. Si scriva l'espressione dell'energia meccanica del sistema in un istante generico e la si usi per calcolare il nuovo periodo di oscillazione T', assumendo che il cilindro rotoli sulla lastra senza scivolare.

c) Se al tempo $t = 0$ la lastra è ferma e la molla è allungata di 10 cm rispetto alla sua lunghezza a riposo, si calcoli l'accelerazione massima della lastra durante il moto successivo; si calcoli inoltre il minimo valore del coefficiente di attrito statico tra lastra e cilindro, μ_s, affinché la condizione di puro rotolamento sia verificata in ogni istante del moto.

d) Supponiamo che l'asse attorno a cui ruota il cilindro sia sostituito con una molla di torsione, che esercita sul cilindro un momento torcente di richiamo $\tau = -C\theta$, dove $C = 2.37$ Nm/rad è il coefficiente di torsione (o rigidità angolare) e θ è l'angolo descritto dal cilindro rispetto all'angolo di equilibrio, coincidente con la posizione di equilibrio della lastra sottostante. Si scrivano le equazioni del moto della lastra e del cilindro, sempre in condizioni di puro rotolamento, e si scriva l'espressione del nuovo periodo di oscillazione del sistema, T'', in funzione dei parametri M, m, k e C. Quanto deve valere R affinchè $T'' = T$?

Esercizio I.2



Si consideri un sistema costituito da due aste omogenee di alluminio (densità 2700 kg/m^3) dello stesso spessore di 1 cm^2, aventi lunghezze $l =$ 120 cm e $l/2$, saldate insieme per un estremo in modo da formare un vertice di angolo $\theta = 45°$. Il vertice è ancorato ad una parete verticale tramite una cerniera che ne permette la libera rotazione in un piano verticale. L'estremo superiore dell'asta più corta è vincolato alla stessa parete tramite una fune orizzontale, inestensibile e di massa trascurabile, in modo che l'asta più lunga sia perfettamente orizzontale.
a) Determinare la tensione della fune e la reazione vincolare (orizzontale e verticale) della cerniera all'equilibrio.
b) Sull'asta più lunga, ad una distanza x dal vertice, viene appoggiato un cubetto di piombo di massa $m = 1.2$ kg. Se la fune può sopportare una tensione massima $T_{\max} = 32$ N, determinare la massima distanza x per la quale la fune resiste.
c) Supponiamo che il cubetto di piombo si trovi proprio alla distanza critica, con il sistema all'equilibrio, e che ad un certo istante una mosca vi si poggi sopra: la fune si rompe, il cubetto cade dall'asta e precipita in caduta libera, e il sistema delle due aste ruota attorno al vertice. Determinare la velocità angolare delle aste nell'istante in cui l'asta lunga tocca la parete verticale.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Due moli di un gas ideale biatomico si trovano nello stato di equilibrio iniziale 1 caratterizzato dalla pressione $P_1 = 30$ atm e volume $V_1 = 3\,\mathrm{dm}^3$. A partire da tale stato il gas esegue il ciclo composto dalle seguenti trasformazioni quasistatiche reversibili: *i)* espansione isoterma fino allo stato 2 con volume $V_2 = xV_1$, con $x > 1$; *ii)* compressione isobara fino allo stato 3 con volume V_1; *iii)* compressione isocora fino a tornare allo stato 1.

a) Determinare la temperatura T_1 del gas nello stato iniziale, scrivere le espressioni della pressione, volume e temperatura negli stati 2 e 3 in funzione di x e disegnare il diagramma PV del ciclo.

b) Per ogni trasformazione calcolare lavoro, variazione di energia interna e calore scambiato.

c) Calcolare l'espressione del rendimento del ciclo in funzione di x e verificare se esso cresce o diminuisce con x.

d) Calcolare la variazione di entropia per ogni trasformazione nel caso $x = 4$.

Esercizio II.2

Un blocco metallico di massa $m = 10$ kg, inizialmente alla temperatura dell'ambiente $T_A = 300$ K, viene posto in contatto con una sorgente alla temperatura T_F pari alla temperatura di fusione del metallo. Il calore specifico del metallo è $c = 835$ J/(kg K). La sorgente fornisce una quantità di calore pari a $P = 4180$ W. Dopo un tempo $t_1 = 10$ minuti da quando è stato posto in contatto con la sorgente il blocco inizia a fondere e risulta completamente fuso dopo un ulteriore tempo $t_2 = 5$ minuti. Durante il riscaldamento il blocco è isolato dall'ambiente. Determinare:

a) la temperatura della sorgente;

b) il calore latente di fusione del metallo λ_F;

c) la variazione di entropia del blocco.

d) A fusione avvenuta il blocco viene separato dalla sorgente e posto a contatto con l'ambiente riportandosi quindi alla temperatura T_A. Calcolare la variazione di entropia del blocco e quella dell'universo per il processo complessivo (riscaldamento con sorgente e raffreddamento senza sorgente).

Soluzione esercizio I.1

a) Il sistema è del tutto equivalente ad una particella puntiforme attaccata ad una molla in assenza di attriti. Il moto è armonico con periodo pari a

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 1.00 \text{ s}}\,.$$

b) L'oscillazione della lastra implica la rotazione del cilindro, con la condizione di rotolamento puro $R\omega = v$, dove v è la velocità di traslazione della lastra e ω è la velocità angolare del cilindro. In un istante generico, in cui la molla è allungata di una quantità x, l'energia meccanica è data da

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2\,,$$

dove $I = (1/2)mR^2$ è il momento d'inerzia del disco. Dunque

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{2}\right)v^2 + \frac{1}{2}kx^2}\,.$$

Ma questa è l'energia meccanica di un oscillatore di massa $M' = M + (m/2)$, il cui periodo di oscillazione è

$$\boxed{T' = 2\pi\sqrt{\frac{M'}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m/2)}{k}} = 1.26 \text{ s}}\,.$$

Nota: se non ci si ricorda che quella è la forma standard dell'energia di un oscillatore, si può sempre ricorrere alla conservazione dell'energia nella forma $dE/dt = 0$ e derivare i vari termini di E per arrivare all'equazione del moto dell'oscillatore.

c) In un oscillatore armonico vale $a = -\Omega^2 x$, dove Ω è la pulsazione, che nel nostro caso vale $\Omega = \sqrt{k/M'}$. Dunque l'accelerazione massima si ha quando lo spostamento è massimo, corrispondente alla condizione iniziale. Quindi

$$\boxed{a_{\max} = \frac{kx_{\max}}{M'} = \frac{kx_{\max}}{M + (m/2)} = 2.47 \text{ m/s}^2}$$

e l'accelerazione angolare massima sarà $\alpha_{\max} = a_{\max}/R$.

La rotazione del cilindro è determinata dalla forza di attrito statico F tra il cilindro e la lastra. Dalla seconda legge della dinamica scritta in forma angolare possiamo scrivere

$$I\alpha = RF\,.$$

Tale forza sarà massima in modulo quando l'accelerazione angolare e quindi anche l'accelerazione della lastra saranno massime in modulo. Ne segue che

$$I\alpha_{\max} = RF_{\max}$$

e quindi

$$F_{\max} = I\frac{\alpha_{max}}{R} = \frac{1}{2}ma_{max} = \frac{mkx_{\max}}{2[M+(m/2)]}\,.$$

Affinché l'attrito statico garantisca in ogni istante il rotolamento, tale valore massimo della forza agente tra il cilindro e la lastra deve essere inferiore o uguale al valore critico $\mu_s mg$:

$$F_{\max} \leq \mu_s mg$$

da cui segue

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{kx_{\max}}{2g[M+(m/2)]} = 0.126}\,. \tag{1}$$

d) L'equazione del moto per la traslazione della lastra è

$$M\ddot{x} = -kx - F$$

dove F è la forza che agisce al punto di contatto tra la lastra e il cilindro.

L'equazione del moto per la rotazione del cilindro attorno al suo asse è

$$I\ddot{\theta} = -C\theta + RF$$

dove F è la stessa di prima, presa con verso opposto per il principio di azione e reazione. Ricordando che $I = (1/2)mR^2$ e che $\ddot{\theta} = \ddot{x}/R$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}mR\ddot{x} = -\frac{C}{R}x + RF$$

ovvero

$$\frac{1}{2}m\ddot{x} = -\frac{C}{R^2}x + F$$

Se ora sommiamo le equazioni del moto della lastra e del cilindro membro a membro, la forza F sparisce, e otteniamo

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)\ddot{x} = -\left(k + \frac{C}{R^2}\right)x$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di periodo

$$\boxed{T'' = 2\pi\sqrt{\frac{M+(m/2)}{k+(C/R^2)}}}\,.$$

Notiamo che, rispetto all'oscillatore iniziale composto dalla piastra con molla, l'inerzia associata al cilindro modifica il numeratore (rinormalizza la massa), mentre la molla di torsione modifica il denominatore (rinormalizza il coefficiente che quantifica la forza di richiamo). Affinchè il periodo rimanga lo stesso deve valere

$$\frac{M + (m/2)}{k + (C/R^2)} = \frac{M}{k} \,,$$

da cui, dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene il risultato

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2MC}{km}} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}} \,.$$

Notiamo infine che il periodo T'' poteva essere trovato anche usando il metodo del punto (b), cioè scrivendo l'energia meccanica del sistema. Rispetto al punto (b), qui si deve aggiungere l'energia potenziale $(1/2)C\theta^2$ che è l'energia accumulata dalla molla di torsione quando il cilindro viene ruotato di un angolo θ.

Soluzione esercizio I.2

Chiamiamo M la massa complessiva del sistema di due aste rigidamente collegate. Dato che l'una è lunga il doppio dell'altra e che le aste sono omogenee, le due aste hanno massa $(2/3)M$ e $(1/3)M$. Il valore numerico di M può essere calcolato a partire dalla densità assegnata; se V è il volume e S la sezione, si ha

$$M = V\rho = (3/2)lS\rho = 1.8 \text{ m} \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 2700 \text{ kg/m}^3 = 0.486 \text{ kg} \,.$$

La condizione per l'equilibrio statico si traduce in tre equazioni: le due equazioni per la traslazione orizzontale e verticale e l'equazione per la rotazione attorno al vertice. Chiamiamo R_x e R_y le componenti orizzontale e verticale della reazione esercitata dalla cerniera nel vertice, e T la tensione della fune. Per impedire la traslazione devono annullarsi le componenti orizzontali e verticali delle forze in gioco. Le due condizioni diventano

$$R_x = T$$

e

$$R_y = Mg \,.$$

Nell'equazione per la rotazione attorno al vertice la reazione $\mathbf{R}$ non entra perché ha momento nullo. Il momento associato alla tensione della fune è $T(l/2)\sin\theta = Tl/(2\sqrt{2})$. Il momento della forza peso può essere calcolato facilmente separando i contributi delle due aste, con le rispettive forze peso applicate al punto medio di ciascuna. Equilibrando i momenti si ottiene l'equazione:

$$\frac{Tl}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{3}Mg\frac{l}{4}\sin\theta$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{Tl}{2\sqrt{2}} &= \frac{2}{3}Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{3}Mg\frac{l}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= Mg\left[\frac{2}{3}\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{l}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\right], \end{aligned}$$

dove abbiamo volutamente evidenziato il termine in parentesi quadra per mostrare che il membro di destra puè essere anche calcolato come momento della forza Mg applicata al centro di massa del sistema, che si trova ad una distanza dalla parete pari alla media pesata delle distanze dei centri di ciascuna asta, usando i pesi (2/3) e (1/3).

Rimaneggiando i termini dell'ultima equazione si ottiene

$$\boxed{T = \frac{1+4\sqrt{2}}{6}\, Mg = 5.28 \text{ N}},$$

da cui segue

$$\boxed{R_x = T = 5.28 \text{ N}},$$

che si aggiunge a

$$\boxed{R_y = Mg = 4.76 \text{ N}}.$$

b) Quando il cubetto di piombo è appoggiato a distanza x dal vertice, le condizioni per l'equilibrio sono come quelle di prima, salvo aggiungere la nuova forza peso mg. Dunque $R_y = (M+m)g$ e $R_x = T'$, dove T' è determinato dall'equazione

$$\frac{T'l}{2\sqrt{2}} = Mg\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) + mgx\,,$$

da cui

$$T' = \frac{1+4\sqrt{2}}{6}\, Mg + 2\sqrt{2}mg\left(\frac{x}{l}\right),$$

dove il primo addendo a destra altro non è che la tensione T già calcolata in assenza del cubetto:

$$T' = T + 2\sqrt{2}mg\left(\frac{x}{l}\right).$$

Quindi

$$\frac{x}{l} = \frac{T'-T}{2\sqrt{2}mg}\,.$$

Ora possiamo imporre la condizione limite per cui T' assume il valore malore massimo assegnato dal problema. Si trova

$$\frac{x_{\max}}{l} = \frac{T_{\max} - T}{2\sqrt{2}mg} = 0.8\,,$$

ovvero

$$\boxed{x_{\max} = 0.8\ l = 96.4\ \text{cm}}\,.$$

c) Una volta spezzata la fune, il cubetto perde immediatamente il contatto con l'asta e cade liberamente con accelerazione g, mentre le due aste ruotano rigidamente attorno al vertice comune. Non essendo presenti attriti, l'energia meccanica iniziale delle aste si conserva e possiamo quindi eguagliare l'energia cinetica di rotazione nel momento in cui l'asta lunga tocca la parete, $(1/2)I\omega^2$, alla variazione di energia potenziale delle aste stesse. Quest'ultima è pari a Mg volte la variazione di quota del centro di massa. Conviene ragionare separatamente per le due aste di massa $(2/3)M$ e $(1/3)M$: il CM dell'asta lunga scende di $(l/2)$, mentre quello dell'asta corta scende di $\sqrt{2}(l/4)$. Dunque:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{2}{3}Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{3}Mg\frac{\sqrt{2}l}{4} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}\left(\frac{l}{2}\right)Mg\,.$$

Per trovare ω serve il momento d'inerzia delle due aste. Con le lunghezze e la sezione assegnata dal problema, possiamo tranquillamente applicare l'espressione valida per aste sottili che ruotano attorno ad un asse passante per un loro estremo. Dunque

$$I = I_{\text{lunga}} + I_{\text{corta}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}M\right)l^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}M\right)(l/2)^2 = \frac{1}{4}Ml^2\,.$$

Inserendo questa espressione nell'equazione precedente e risolvendo per la velocità angolare, si trova

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2(4+\sqrt{2})g}{3l}} = 5.43\ \text{rad/s}}\,.$$

Soluzione esercizio II.1

a) La temperatura dello stato 1 si ricava facilmente dall'equazione di stato:

$$\boxed{T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = 548\,\text{K}}$$

In modo simile per gli stati 2 e 3 abbiamo

$$\boxed{V_2 = xV_1 \qquad P_2 = \frac{V_1}{V_2}P_1 = \frac{P_1}{x} \qquad T_2 = T_1}$$

$$\boxed{V_3 = V_1 \qquad P_3 = P_2 \qquad T_3 = \frac{V_3}{V_2}T_2 = \frac{T_1}{x}}$$

b) L'energia interna è funzione della sola temperatura quindi nella trasformazione isoterma avremo $\Delta U_{12} = 0$ e

$$Q_{12} = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_1 \ln x > 0$$

Per la trasformazione isobara avremo invece

$$Q_{23} = nc_P(T_3 - T_2) = n\frac{7}{2}R(T_3 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1\left(\frac{1}{x} - 1\right) < 0$$

$$W_{23} = P_2(V_3 - V_2) = P_1V_1\left(\frac{1}{x} - 1\right) < 0$$

$$\Delta U_{23} = Q_{23} - W_{23} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{7}{2}nRT_1 - P_1V_1\right) = \frac{5}{2}P_1V_1\left(\frac{1}{x} - 1\right) < 0$$

Infine quella isocora:

$$\Delta U_{31} = Q_{31} = nc_V(T_1 - T_3) = n\frac{5}{2}R(T_3 - T_1) = \frac{5}{2}nRT_1\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0$$

c) Nel calcolare il rendimento del ciclo bisogna porre attenzione al segno dei calori scambiati nelle varie trasformazioni. Il gas infatti cede calore nella trasformazione $2 \to 3$ ($Q_{23} < 0$) e ne assorbe nelle altre due ($Q_{12} > 0$ e $Q_{31} > 0$). Il rendimento sarà dunque:

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|} \\ &= 1 - \frac{(7/2)nRT_1(1 - 1/x)}{nRT_1[\ln x + 5/2(1 - 1/x)]} = \frac{\ln x - (1 - 1/x)}{\ln x + 5/2(1 - 1/x)}\end{aligned}$$

Come si vede il rendimento dipende solo dal rapporto tra i volumi x e la funzione $\eta(x)$ è monotona crescente (basta calcolare la derivata e vedere che è sempre positiva), con $\eta(1) = 0$ mentre $\lim_{x\to\infty} \eta(x) = 1$.

d) Le variazioni di entropia per $x = 4$ sono:

$$\Delta S_{12} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nR\ln(x) = 23.1\,\mathrm{J/K}$$

$$\Delta S_{23} = nc_P \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = nc_P \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -80.7\,\mathrm{J/K}$$

$$\Delta S_{31} = nc_V \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) = nc_V \ln(x) = 57.6\,\mathrm{J/K}$$

e quindi:

$$\Delta S_{\text{ciclo}} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = nR\ln(x)\left(1 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0$$

Soluzione esercizio II.2

a) Per raggiungere la temperatura di fusione il blocco deve assorbire la quantità di calore:

$$Q_1 = mc(T_F - T_A)\,.$$

La sorgente fornisce nel tempo t_1 la quantità di calore Q_1:

$$Q_1 = Pt_1 = mc(T_F - T_A) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_F = T_A + \frac{Pt_1}{mc} = 600.4\,\mathrm{K}}$$

dove abbiamo usato $t_1 = 600$ s.

b) Per la fusione il blocco deve assorbire la quantità di calore $Q_2 = m\lambda_F$ che la sorgente gli fornisce nel tempo t_2:

$$Q_2 = Pt_2 = m\lambda_F \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_F = \frac{Pt_2}{m} = 1.25 \times 10^5\,\mathrm{J/kg}}\,.$$

c) Per il calcolo della variazione di entropia del blocco dobbiamo distinguere i due processi: 1) riscaldamento del blocco dalla temperatura T_A alla temperatura T_F; 2) fusione del blocco a temperatura costante T_F. Nel primo processo si ha:

$$\Delta S_1 = \int_{T_A}^{T_F} mc\frac{\mathrm{d}T}{T} = mc\ln\left(\frac{T_F}{T_A}\right) = 5.79 \times 10^3\,\mathrm{J/K}$$

mentre nel secondo

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda_F}{T_F} = 2.08 \times 10^3\,\mathrm{J/K}\,.$$

In totale dunque:

$$\boxed{\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 7.87 \times 10^3\,\mathrm{J/K}}\,.$$

d) Nel processo complessivo la variazione di entropia del blocco è nulla dato che lo stato finale coincide con quello iniziale (l'entropia è una funzione di stato). Quella dell'universo è invece data dalla somma delle variazioni di entropia delle due sorgenti (sorgente calda e ambiente) poichè quella del blocco è nulla. La sorgente cede la quantità di calore $Q_0 = Q_1 + Q_2$ a temperatura costante T_F mentre l'ambiente assorbe la stessa quantità di calore a temperatura costante T_A. Pertanto:

$$\boxed{\Delta S_U = -\frac{Q_0}{T_F} + \frac{Q_0}{T_A} = 6.33 \times 10^3 \text{ J/K}}$$

dove $Q_0 = P(t_1 + t_2) = 3.8 \times 10^6$ J.