Fisica Generale I
A.A. 2014-2015, 20 luglio 2015

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Una mela di massa $m = 250$ g, approssimabile ad una sfera omogenea di raggio $r = 5$ cm, è appesa al ramo di un albero per mezzo di un bastoncino sottile di lunghezza $l = 55$ cm e massa trascurabile. La mela e il bastoncino sono agganciati rigidamente tramite il picciolo in modo da costituire un unico corpo che può oscillare rigidamente attorno all'altro estremo del bastoncino, nel punto O posto sul ramo. Robin scocca una freccia dalla collina di fronte. La freccia, di massa $m_f = 30$ g, si conficca nella mela con velocità $v_f = 35$ m/s ad un angolo di 30° rispetto all'orizzonte, dall'alto verso il basso. Una volta conficcata, il suo centro di massa coincide con quello della mela e il sistema inizia ad oscillare attorno al punto O. Si calcoli:
a) il momento angolare della freccia rispetto a O prima dell'impatto;
b) la velocità angolare del sistema dopo l'impatto, considerando sia la mela che la freccia come particelle puntiformi a distanza $l + r$ da O;
c) l'energia cinetica del sistema subito dopo l'impatto e la quota massima raggiunta dalla mela (sarebbe corretto applicare l'approssimazione di piccoli angoli al moto oscillatorio?);
d) la quota massima, stavolta però tenendo conto che la mela e la freccia sono corpi estesi e assumendo la freccia come equivalente ad un'asta sottile e omogenea di lunghezza $l_f = 40$ cm; quant'è la variazione relativa rispetto al risultato precedente?
e) Nell'istante esatto in cui la mela con la freccia conficcata ripassa sulla verticale, la mela si stacca dal bastoncino. Si descriva il moto successivo, trascurando l'effetto dell'aria. A quale altezza dal suolo doveva trovarsi la mela affinché la punta della freccia toccasse il suolo per prima e in direzione verticale?

Esercizio I.2

Una piattaforma circolare (disco omogeneo) di massa $M = 100$ kg e raggio $R = 4$ m è libera di ruotare attorno al suo asse centrale, senza attrito. In prossimità del bordo si trova Andrea ($m_A = 80$ kg) con un cesto ($m_c = 5$ kg) contenente due palle mediche ($m_p = 8$ kg ciascuna). Il tutto è inizialmente in quiete in un sistema inerziale.
a) Ad un certo istante Andrea prende una palla e la lancia orizzontalmente con velocità $v' = 6$ m/s rispetto alla piattaforma e in direzione tangenziale ad essa. Calcolare il momento angolare acquistato dalla palla, la velocità angolare con cui la piattaforma inizia a ruotare e l'energia spesa da Andrea

nel lancio.
b) Dopo un po' Andrea ripete la stessa operazione con la seconda palla. Calcolare di quanto varia il momento angolare della seconda palla; calcolare la nuova velocità angolare della piattaforma.
c) Andrea si sposta dal bordo fino al centro della piattaforma lasciando il cesto vuoto al bordo. Calcolare la nuova velocità angolare della piattaforma e l'energia spesa da Andrea nello spostamento.
d) Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico μ_s tra la piattaforma e il cesto affinché quest'ultimo non scivoli via?
e) Andrea aveva in tasca una biglia di vetro. Arrivato al centro, la lancia in modo da farla cadere nel cesto. Se il punto di lancio ha la stessa quota del bordo del cesto e se il lancio avviene a 75° rispetto al piano orizzontale, quale deve essere la velocità iniziale della biglia? In quale direzione deve avvenire il lancio?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

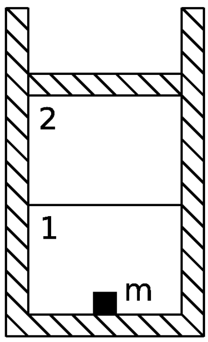
Esercizio II.1

Due moli di gas ideale monoatomico sono contenute all'interno di un cilindro con pistone di massa trascurabile che può scorrere senza attrito. Le pareti del contenitore (cilindro e pistone) sono ricoperte di un materiale isolante che impedisce gli scambi termici con l'esterno. Inizialmente il gas è nello stato di equilibrio A con temperatura $T_A = 350$ K e pressione uguale alla pressione atmosferica esterna $P_A = 10^5$ Pa. Successivamente il pistone viene bloccato nella sua posizione iniziale e il gas viene riscaldato tramite una resistenza elettrica posta all'interno del contenitore che agisce per 5 minuti con una potenza media di 10 W. Al termine della trasformazione il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio B. Si calcoli:
a) il volume V_A e le coordinate termodinamiche dello stato B;
b) la variazione di entropia dell'universo e si dica se la trasformazione AB è reversibile o irreversibile.
Partendo da B, il pistone viene sbloccato e mosso in modo da realizzare un'espansione quasistatica reversibile fino ad una nuova condizione di equilibrio C con pressione di nuovo uguale a quella atmosferica P_A.
c) Si calcolino le coordinate termodinamiche di C.
Infine lo strato isolante viene rimosso improvvisamente dal fondo del cilindro, che viene posto a contatto con un termostato a temperatura T_A, fino a raggiungere, a pressione esterna costante, lo stato di equilibrio iniziale A.
d) Si calcoli la variazione di entropia dell'universo nella trasformazione CA e si dica se questa è reversibile o irreversibile.
e) Si rappresentino le trasformazioni del gas su un diagramma P-V.
f) Se nella trasformazione AB la resistenza fosse sostituita da un termostato

a temperatura T_B, precedentemente calcolata, e la trasformazione avvenisse in un tempo tale da raggiungere l'equilibrio termico con il termostato lasciando tutte le altre condizioni invariate, il ciclo rappresenterebbe il funzionamento di una macchina termica che opera tra due serbatoi. Quanto varrebbe il suo rendimento?

Esercizio II.2

Si consideri un contenitore cilindrico con due pistoni mobili, privi di attrito. La stessa quantità di gas ideale monoatomico, $n_1 = n_2 = 1$ mol, è contenuta nelle porzioni 1 e 2 indicate in figura. Le pareti del cilindro e il pistone superiore sono adiabatici, mentre il pistone interno permette lo scambio di calore tra i comparti. Gli scambi di calore tra il gas e il contenitore siano trascurabili. L'area dei pistoni è $A = 0.04\ \mathrm{m}^2$ e la loro massa è trascurabile. Inizialmente la temperatura del gas è $T_0 = 300$ K ed il sistema si trova all'equilibrio con la pressione atmosferica $P_0 = 10^5$ Pa. Ad un certo istante nella porzione 1 viene inserito un blocchetto di ferro caldo di massa $m = 25$ g e temperatura $T_{\mathrm{fe}} = 430$ K, che cederà calore al gas in 1 e 2, fino al raggiungimento di un nuovo equilibrio. Il calore specifico del ferro è $c = 460\ \mathrm{J\ kg^{-1}K^{-1}}$. Si calcoli:
a) la temperatura finale T' del gas;
b) lo spostamento verticale del pistone superiore (si trascuri il volume del blocchetto rispetto al volume del gas);
c) la variazione di entropia del gas, del blocchetto e dell'universo.
d) Ricalcolare la temperatura di equilibrio del punto (a) se invece il pistone inferiore rimane bloccato.
e) Si consideri nuovamente la configurazione al punto (a), con entrambi i pistoni mobili. Una massa M venga appoggiata sul pistone superiore; il valore di M viene scelto in modo che, sotto l'azione del peso, il gas torni al volume iniziale, in un nuovo stato di equilibrio a temperatura T''. Si scriva l'espressione del primo principio applicato al gas nella fase di compressione (senza dimenticare la capacità termica del blocchetto). E' possibile determinare M con i dati del problema?



Soluzione esercizio I.1

a)
Il momento angolare della freccia è un vettore diretto perpendicolarmente al piano individuato dalla direzione verticale del bastoncino e dalla direzione della velocità della freccia. Per calcolarne il modulo basta moltiplicare la quantità di moto della freccia $m_f v_f$ per la distanza da O della retta su cui si muove la freccia sapendo che questa passa per il CM della mela formando un angolo $\alpha = 30°$ con l'orizzonte. Dunque

$$L_f = m_f v_f (l + r) \cos\alpha = m_f v_{fx}(l + r) = 0.5456 \text{ kg m}^2/\text{s}\,, \tag{1}$$

dove abbiamo indicato con v_{fx} la componente orizzontale della velocità.

b)
L'urto con la mela è perfettamente anelastico. La quantità di moto non si conserva in quanto durante l'urto agisce una forza esterna impulsiva nel punto in cui il bastoncino è collegato al ramo, che impedisce alla mela di cadere. Si conserva invece il momento angolare rispetto allo stesso punto O, dato che il momento di questa forza è nullo. Dunque si ha

$$I\omega = L_f\,, \tag{2}$$

con

$$I = (m + m_f)(l + r)^2 = 0.1008 \text{ kg m}^2\,, \tag{3}$$

e la velocità angolare di rotazione dopo l'impatto è

$$\omega = \frac{L_f}{I} = \frac{m_f}{m + m_f}\frac{v_{fx}}{l + r} = 5.413 \text{ rad/s}\,. \tag{4}$$

c)
L'energia cinetica è

$$E_K = (1/2)I\omega^2 = 1.477 \text{ J}\,. \tag{5}$$

Nel moto successivo tale energia viene convertita in energia potenziale gravitazionale. La quota massima si ha quando la conversione è totale: $(m + m_f)gh = E_K$. Quindi

$$h = \frac{E_K}{(m + m_f)g} = 0.538 \text{ m} = 53.8 \text{ cm}\,. \tag{6}$$

Notiamo che questa altezza è confrontabile con la distanza da O, che è $l+r = 60$ cm. L'angolo massimo formato dal bastoncino rispetto alla verticale è

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{l + r - h}{l + r} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{6.2}{60} \sim \frac{\pi}{2} - 0.1 \sim \frac{\pi}{2}\,. \tag{7}$$

Ne segue che l'approssimazione di piccoli angoli non è applicabile e il moto non è armonico.

d)
Consideriamo mela e freccia come corpi estesi, rispettivamente una sfera e un'asta sottile, che ruotano attorno ad 0. Applichiamo il teorema di Steiner per ricalcolare il momento d'inerzia del sistema:

$$I' = (5/2)mr^2 + m(l+r)^2 + (1/12)m_f l_f^2 + m_f(l+r)^2\,, \tag{8}$$

ovvero

$$I' = (m+m_f)(l+r)^2+(5/2)mr^2+(1/12)m_f l_f^2 = I+\Delta I = I[1+(\Delta I/I)]\,, \tag{9}$$

dove abbiamo fattorizzato il momento d'inerzia già trovato al punto (b). La correzione è piccola, infatti

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{(5/2)mr^2 + (1/12)m_f l_f^2}{(m+m_f)(l+r)^2} = 6.4\times 10^{-3}\,. \tag{10}$$

Ora possiamo rifare i calcoli dei punti precedenti. Si trova

$$\omega' = \frac{L_f}{I'} = \frac{L_f}{I[1+(\Delta I/I)]}\,, \tag{11}$$

$$E'_K = (1/2)I'\omega'^2 = (1/2)I\omega^2/[1+(\Delta I/I)] = E_K/[1+(\Delta I/I)]\,, \tag{12}$$

e infine

$$h' = \frac{E'_K}{(m+m_f)g} = \frac{h}{1+(\Delta I/I)} \sim h[1-(\Delta I/I)]\,. \tag{13}$$

La quota corretta per effetto dell'estensione dei corpi e leggermente più bassa di quella in approssimazione di corpi puntiformi. La variazione relativa risulta essere

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{h-h'}{h} = \frac{\Delta I}{I} = 6.4\times 10^{-3}\,. \tag{14}$$

Si tratta di una correzione trascurabile.

e)
Dopo il distacco il moto del CM del sistema mela+freccia è parabolico, soggetto alla sola forza peso. Detta H la quota del CM al momento dello stacco, quando la velocità è orizzontale, la quota al tempo t è

$$y(t) = H - (1/2)gt^2\,. \tag{15}$$

Nel frattempo, durante la caduta del CM, il sistema continua a ruotare con la velocità angolare che aveva al momento del distacco, che coincide con quella posseduta immediatamente dopo l'urto con la freccia, già calcolata in (a). Al distacco, la freccia formava un angolo di 30° rispetto all'orizzonte, mentre noi vogliamo che si trovi a 90° quando tocca il suolo. Dunque il tempo trascorso dev'essere pari a un sesto del periodo di rotazione, oppure un sesto più un numero intero di ulteriori periodi:

$$t = \left(k + \frac{1}{6}\right) \frac{2\pi}{\omega} \,. \tag{16}$$

Inoltre, dato che la freccia è lunga l_f, l'impatto con il suolo deve avvenire quando la quota del CM è $l_f/2$. Mettendo assieme queste condizioni, si trova:

$$\frac{l_f}{2} = H - (1/2)g\left(k + \frac{1}{6}\right)^2 \frac{4\pi^2}{\omega^2} \,, \tag{17}$$

da cui si ottiene la quota più bassa ammissibile (per $k = 0$):

$$H = \frac{l_f}{2} + \frac{\pi^2 g}{18\omega^2} = 38.3 \text{ cm} \,. \tag{18}$$

Soluzione esercizio I.2

a)
Il momento a angolare acquistato dalla palla medica rispetto al centro della piattaforma è

$$L_p = m_p v' R = 192 \text{ kg m}^2/\text{s} \,. \tag{19}$$

Il momento angolare angolare totale deve conservarsi perchè non agiscono momenti di forze esterne. Dunque la piattaforma, Andrea, il cesto e la palla rimasta devono iniziare a ruotare in verso opposto al lancio, in modo che

$$I_1\omega_1 = L_p \,, \tag{20}$$

essendo

$$I_1 = (M/2 + m_A + m_c + m_p)R^2 = 2288 \text{ kg m}^2 \,, \tag{21}$$

da cui

$$\omega_1 = \frac{L_p}{I_1} = 0.0839 \text{ rad/s} \,. \tag{22}$$

L'energia spesa da Andrea è pari all'energia cinetica acquistata dal sistema, che è

$$E_K = \frac{1}{2} m_p v'^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = 152 \text{ J} \,. \tag{23}$$

b)
Vista nel sistema di riferimento inerziale, prima del lancio la seconda palla aveva una velocità tangenziale di modulo $R\omega_1$ e di verso concorde alla

rotazione della piattaforma, su cui si trovava in quiete. Dopo il lancio, la sua velocità diventa $v' - R\omega_1$ in verso opposto. La variazione di momento angolare è

$$\Delta L = m_p(v' - R\omega_1)R - m_p(-R\omega_1)R = m_p v' R = L_p \,, \tag{24}$$

ed è uguale a quella del primo lancio, già calcolata al punto (a).
Per la conservazione di L, tutto il resto (piattaforma con Andrea e il cesto vuoto) deve aumentare la velocità angolare di rotazione per compensare esattamente la perdita di L_p. Dunque deve essere

$$I_2\omega_2 = I_2\omega_1 + L_p \,, \tag{25}$$

essendo

$$I_2 = (M/2 + m_A + m_c)R^2 = 2160 \text{ kg m}^2 \,, \tag{26}$$

da cui

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{L_p}{I_2} = 0.173 \text{ rad/s} \,. \tag{27}$$

c)
Anche in questo caso la velocità angolare deve aumentare, ma stavolta per compensare la diminuzione del momento d'inerzia, sempre a momento angolare costante:

$$I_3\omega_3 = I_2\omega_2 \,, \tag{28}$$

con

$$I_3 = (M/2 + m_c)R^2 = 880 \text{ kgm}^2 \,, \tag{29}$$

da cui

$$\omega_3 = \frac{I_2}{I_3}\omega_2 = \frac{M/2 + m_A + m_c}{M/2 + m_c}\omega_2 = 0.425 \text{ rad/s} \,. \tag{30}$$

L'energia spesa da Andrea corrisponde almeno all'incremento di energia cinetica del sistema:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = 47.1 \text{ J} \,. \tag{31}$$

d)
Quando la piattaforma ruota con velocità angolare ω_3, il cesto è sottoposto ad una forza centrifuga che in modulo vale $m_c\omega_3^2 R$. Affinchè il cesto non scivoli è necessario che la forza di attrito, uguale e opposta, non superi il valore imposto dalla condizione

$$m_c\omega_3^2 R \le \mu_s m_c g \,. \tag{32}$$

da cui si ottiene

$$\mu_s \ge \frac{R\omega_3^2}{g} = 0.074 \,. \tag{33}$$

e)
Per evitare problemi nella trattazione delle forze apparenti, conviene decisamente mettersi nel sistema di riferimento inerziale dove il moto della biglia è un semplice moto balistico parabolico, soggetto alla sola accelerazione di gravità. Nel piano che contiene la parabola (qualunque esso sia a seconda della direzione in cui Andrea effettua il lancio) possiamo scrivere le leggi orarie: $r(t) = v_0 \cos\alpha t$ e $y(t) = v_0 \sin\alpha t - (1/2)gt^2$. Dalla seconda si ricava il tempo di volo $t_v = (2v_0/g)\sin\alpha$. Inserendo t_v nella prima, si ottiene la gittata che, nel nostro caso, deve essere R, e quindi $R = (2v_0^2/g)\cos\alpha\sin\alpha = (v_0^2/g)\sin 2\alpha$, da cui si ottiene direttamente il valore di v_0:

$$v_0 = \sqrt{gR/\sin 2\alpha} = 8.85 \text{ m/s}\,. \tag{34}$$

Una volta nota la velocità v_0, possiamo anche calcolare il tempo di volo:

$$t_v = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha = 1.745 \text{ s}\,. \tag{35}$$

Durante questo tempo la piattaforma, e dunque anche il cesto, ruota di un angolo

$$\phi = \omega_3 t_v = 0.742 \text{ rad} = 42.5^\circ\,. \tag{36}$$

Quindi Andrea deve effettuare il lancio in una direzione radiale a 42.5° dal raggio individuato dal cesto, nel verso di rotazione della piattaforma. In questo modo, mentre la biglia compie un moto parabolico planare, il cesto raggiunge esattamente la posizione in cui la biglia ricade, al bordo della piattaforma. Vista dal sistema non-inerziale in rotazione, la traiettoria della biglia è una combinazione del moto balistico e di una spirale di Archimede, prodotta dall'azione congiunta delle forze apparenti centrifuga e di Coriolis.

Soluzione esercizio II.1

a)
Il volume V_A si calcola dall'equazione di stato:

$$V_A = nRT_A/P_A = 5.82 \times 10^{-2} \text{ m}^3\,. \tag{37}$$

Siccome nella trasformazione AB il pistone è bloccato, il volume nello stato B sarà $V_B = V_A = 5.82 \times 10^{-2}$ m^3. Inoltre, durante la trasformazione AB il gas assorbe tutto il calore rilasciato dalla resistenza, pari a 10 W per 300 secondi, ovvero $Q_{\mathrm{AB}} = 3000$ J. La trasformazione è isocora, quindi per il primo principio $Q_{\mathrm{AB}} = \Delta U_{\mathrm{AB}} = nc_v(T_B - T_A)$ e quindi

$$T_B = T_A + Q_{\mathrm{AB}}/(nc_v) = 470 \text{ K} \tag{38}$$

e la pressione si calcola tramite l'equazione di stato:

$$P_B = nRT_B/V_B = 1.34 \times 10^5 \text{ Pa}. \tag{39}$$

b)
Si tratta di una trasformazione con irreversibilità meccanica esterna: del lavoro esterno viene dissipato interamente in calore e convertito in energia interna del sistema. Non essendo coinvolti serbatoi di calore, la variazione di entropia dell'ambiente è nulla, mentre quella del sistema si calcola direttamente dall'espressione dell'entropia di un gas ideale, e si trova

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{amb}} + \Delta S_{\text{gas}} = \Delta S_{\text{gas}} = nc_v \ln(T_B/T_A) = 7.35 \text{ J/K}. \tag{40}$$

Dunque la variazione di entropia dell'universo è positiva e la trasformazione è irreversibile. Notiamo che ΔS_{gas} poteva essere calcolata integrando $\delta Q/T$ lungo una trasformazione isocora reversibile da T_A a T_B, con $\delta Q = nc_v dT$.

c)
La trasformazione BC è adiabatica quasistatica e porta il gas all'equilibrio alla pressione finale $P_C = P_A = 10^5$ Pa. Lungo la trasformazione vale la relazione PV^γ =costante. Dunque

$$V_C = V_B(P_B/P_C)^{1/\gamma} = V_A(P_B/P_A)^{1/\gamma} = 6.94 \times 10^{-2} \text{ m}^3 , \tag{41}$$

e la temperatura può essere ricavata dall'equazione di stato

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{P_A V_C}{nR} = 419 \text{ K}. \tag{42}$$

d)
La variazione di entropia dell'universo sarà data da

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{amb}} + \Delta S_{\text{gas}} \tag{43}$$

dove per ambiente si intende il termostato a temperatura costante T_A che assorbe un calore $|Q| = nc_p(T_C - T_A) = 2868$ J dal gas, che si raffredda e si comprime a pressione costante. Per il gas, basta usare l'espressione di S come funzione di T e P. Dunque:

$$\Delta S_{\text{univ}} = \frac{nc_p(T_C - T_A)}{T_A} + nc_p \ln\frac{T_A}{T_C} = (8.195 - 7.480) \text{ J/K} = 0.715 \text{ J/K}. \tag{44}$$

La variazione di entropia è positiva e quindi la trasformazione CA è irreversibile. In effetti, si tratta di una tipica trasformazione con irreversibilità termica, in cui il sistema si trova inizialmente a una temperatura significativamente diversa da quella del termostato con cui è in contatto.

e)
Nel tracciare il diagramma P-V basta considerare che AB è isocora irreversibile, BC è un'adiabatica quasistatica reversibile e CA è una isobara irreversibile. Le coordinate termodinamiche dei punti A, B e C sono tutte note dalle risposte precedenti.

f)
Notiamo che gli stati di equilibrio A e B, estremi della trasformazione AB, non cambierebbero sostituitendo la resistenza con il termostato, e la trasformazione avverrebbe comunque a volume costante. Dunque, il calore scambiato con il termostato deve essere ancora $nc_v(T_B - T_A)$, che è lo stesso di prima. Il calore che il gas assorbe dal termostato è quindi lo stesso di quello fornito dalla resistenza nel caso precedente, cioè 3000 J. Il rendimento diventa

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\mathrm{CA}}|}{|Q_{\mathrm{AB}}|} = 1 - \frac{2868}{3000} = 0.044\,. \tag{45}$$

Soluzione esercizio II.2

a)
Visto che il pistone interno permette il contatto termico, nello stato di equilibrio finale le temperature del blocchetto e del gas, sia in 1 che in 2, saranno uguali ad uno stesso valore T'. Il calore ceduto dal blocchetto deve essere uguale a quello assorbito dal gas in 1 e 2. Il fatto che i pistoni siano mobili assicura che il calore viene assorbito a pressione costante, pari alla pressione esterna. Dunque vale la relazione

$$mc(T_{\mathrm{fe}} - T') = (n_1 + n_2)c_p(T' - T_0), \tag{46}$$

da cui

$$T' = \frac{mcT_{\mathrm{fe}} + (n_1 + n_2)c_pT_0}{mc + (n_1 + n_2)c_p} = 328.2 \ \ \mathrm{K}\ . \tag{47}$$

b)
Dato che i gas in 1 e 2 hanno la stessa pressione e temperatura, hanno anche lo stesso volume, che può essere ricavato dall'equazione di stato:

$$V_1' = V_2' = \frac{n_1RT'}{P_0} = 2.73 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3\,. \tag{48}$$

Il volume iniziale era

$$V_1 = V_2 = \frac{n_1RT_0}{P_0} = 2.494 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3\,. \tag{49}$$

e la variazione di volume complessiva del gas nel cilindro è

$$\Delta V = 2(V_1' - V_1) = 0.472 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3\,. \tag{50}$$

L'area $A = 0.04\ \mathrm{m}^2$ del pistone è nota e quindi possiamo calcolare lo spostamento verticale come

$$h = \frac{\Delta V}{A} = 0.118\ \mathrm{m}\,. \tag{51}$$

c)
La variazione di entropia del gas è la somma delle variazioni in ciascuna porzione 1 e 2, che sono uguali, dato che le due porzioni hanno le stesse coordinate termodinamiche. Usando l'espressione di $S(T, P)$ per un gas ideale e tenendo conto che P è costante, si può quindi scrivere

$$\Delta S_{\mathrm{gas}} = (n_1 + n_2)c_p \ln\frac{T'}{T_0} = 3.735\ \mathrm{J/K}\,. \tag{52}$$

La stessa relazione può essere vista come l'integrale di $\delta Q/T$ lungo una trasformazione isobara reversibile che connette gli stessi stati.
La variazione di entropia del blocchetto può essere calcolata come:

$$\Delta S_{\mathrm{fe}} = \int \frac{dQ}{T} = mc\int_{T_{\mathrm{fe}}}^{T'} \frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T'}{T_{\mathrm{fe}}} = -3.107\ \mathrm{J/K}\,. \tag{53}$$

La variazione di entropia dell'ambiente esterno è nulla, dato che il cilindro è termicamente isolato. La variazione di entropia dell'universo è quindi la somma dei valori appena calcolati:

$$\Delta S_{\mathrm{univ}} = \Delta S_{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{fe}} = 0.628\ \mathrm{J/K}\,. \tag{54}$$

Il valore positivo mostra che la trasformazione è irreversibile. Si tratta di un processo con irreversibilità termica, perché fino al raggiungimento della temperatura T' il gas si trova a contatto con un corpo che ha una temperatura diversa.

d)
Se il pistone inferiore è bloccato, nello scambio termico tra il blocchetto di ferro e il gas, il gas nel comparto inferiore 1 subisce una trasformazione isocora, mentre il gas in 2 compie un'espansione isobara. Il calore rilasciato dal blocchetto, invece di andare in 1 e 2 in parti uguali, come succedeva prima, si ripartisce secondo la nuova relazione

$$mc(T_{\mathrm{fe}} - T') = n_1 c_v(T' - T_0) + n_2 c_p(T' - T_0) = (n_1 c_v + n_2 c_p)(T' - T_0), \tag{55}$$

da cui si trova:

$$T' = \frac{mcT_{\mathrm{fe}} + (n_1 c_v + n_2 c_p)\, T_0}{mc + n_1 c_v + n_2 c_p} = 333\ \mathrm{K}\,. \tag{56}$$

e)

Dopo che la massa M viene appoggiata sul pistone superiore, la pressione esterna che agisce sul gas diventa

$$P_{\mathrm{ext}} = P_0 + \frac{Mg}{A}\ . \tag{57}$$

Tale pressione esterna è costante e, dunque, indipendentemente da come avviene il moto del pistone, essendo comunque h la variazione di quota tra lo stato di equilibrio iniziale e quello finale, il lavoro compiuto dall'ambiente esterno sul gas è $W_{\mathrm{amb}} = P_{\mathrm{ext}}\Delta V = P_{\mathrm{ext}}Ah$, dove $\Delta V = 2(V_1' - V_1)$ e h sono stati calcolati al punto (b). Per il principio di azione e reazione, il lavoro fatto dal gas è uguale in modulo e opposto in segno:

$$W_{\mathrm{gas}} = -P_{\mathrm{ext}}\Delta V\ . \tag{58}$$

Durante la compressione il gas varia la sua energia interna in questo modo:

$$\Delta U_{\mathrm{gas}} = n_{\mathrm{tot}} c_v (T'' - T')\ , \tag{59}$$

dove $n_{\mathrm{tot}} = n_1 + n_2 = 2n_1$ e T'' può essere scritto in termini di P_{ext} tramite l'equazione di stato:

$$T'' = \frac{P_{\mathrm{ext}} V_1}{n_1 R}\,. \tag{60}$$

Infine, durante la compressione il gas cede al blocchetto di ferro il calore

$$Q_{\mathrm{gas}} = -mc(T'' - T')\ . \tag{61}$$

Dunque, il primo principio, $\Delta U = Q - W$, scritto per il gas corrisponde alla seguente relazione:

$$n_{\mathrm{tot}} c_v (T'' - T') = -mc(T'' - T') + P_{\mathrm{ext}}\Delta V\,. \tag{62}$$

ovvero

$$P_{\mathrm{ext}}\Delta V - (mc + n_{\mathrm{tot}} c_v)(T'' - T') = 0\,, \tag{63}$$

oppure ancora

$$P_{\mathrm{ext}}\Delta V - (mc + n_{\mathrm{tot}} c_v)\left(\frac{P_{\mathrm{ext}} V_1}{n_1 R} - T'\right) = 0\,, \tag{64}$$

da cui si può ricavare P_{ext} in funzione di quantità note e, da questa, il valore di M (il calcolo esplicito non è richiesto; per chi vuole fare il calcolo, il risultato è 57 kg).