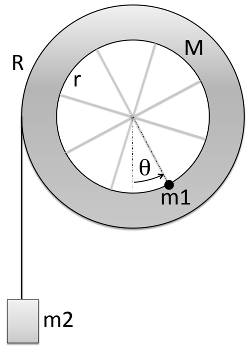
Fisica Generale I
A.A. 2014-2015, 31 agosto 2015

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1
Giocando a minigolf un ragazzo riesce a mettere in buca in un colpo solo una pallina di raggio $r = 2$ cm e massa $m = 100$ g. Dal punto di battuta la pista presenta, in sequenza, un tratto iniziale orizzontale (AB), un tratto curvo in salita (BC) che descrive un dodicesimo di circonferenza con raggio di curvatura $R = 3$ m, una salita lineare (CD) con pendenza costante di 30 gradi, una parte nuovamente curva (DE) con lo stesso raggio di prima ma curvatura opposta in modo da ritornare ad un profilo orizzontale (EF) ad un'altezza $h = 1$ m rispetto alla quota iniziale. Nel punto F uno scalino verticale riporta la pista alla quota iniziale dove, a distanza d dal gradino, si trova la buca. La superficie della pista è tale da garantire la condizione di rotolamento puro per tutto il percorso, senza attrito volvente. La mazza colpisce la pallina in modo che questa parte con velocità di traslazione $v_0 = 5$ m/s.
a) Si calcoli l'energia meccanica fornita alla pallina nella battuta.
b) Si calcoli l'energia cinetica di traslazione e la velocità in E (per quale valore minimo di v_0 la pallina non raggiungerebbe il punto E?).
c) Si descriva il moto della pallina dopo il punto F e si calcoli la distanza d se la pallina entra direttamente in buca nella caduta.
d) Si calcoli il momento angolare intrinseco della pallina quando arriva in buca.
e) Tornando al tratto in salita, quanto vale la reazione vincolare esercitata sulla pallina dalla pista, in direzione perpendicolare a questa, nel tratto DE? Quanto dovrebbe valere la velocità iniziale v_0 affinché la pallina si stacchi dalla pista prima di raggiungere E?

Esercizio I.2
Si consideri una carrucola di massa $M = 2$ kg, che ha la forma di un cilindro cavo omogeneo (come in figura) con raggio esterno $R = 8$ cm e raggio interno $r = 6$ cm, vincolata al suo asse di simmetria da dei raggi rigidi e privi di massa. All'estremità di uno dei raggi, a distanza r dall'asse, è fissata una massa $m_1 = 1$ kg di dimensioni trascurabili. Attorno alla carrucola è arrotolata una corda inestensibile e di massa trascurabile a cui è appesa una massa $m_2 = 100$ g.
a) Si determini l'angolo θ_0 di equilibrio del sistema e si scriva l'equazione del moto per la carrucola e per la massa m_2 nel caso di piccole oscillazioni di ampiezza $\Delta\theta$ attorno a θ_0.

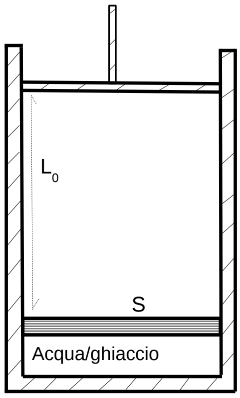
b) Partendo con il sistema in quiete a θ_0 si immagini di togliere improvvisamente m_2. Si descriva il nuovo moto e si determini dopo quanto tempo Δt la massa m_1 si trova sotto l'asse della carrucola a $\theta = 0$.
c) Partendo invece in quiete a $\theta = 0$, senza massa appesa, si immagini adesso di appendere improvvisamente alla corda una massa pari m_1, uguale a quella fissata alla carrucola. Si calcoli la velocità angolare istantanea della carrucola ha percorso mezzo giro.
d) Nelle stesse ipotesi del punto precedente, si scriva l'espressione dell'energia potenziale del sistema in funzione dell'angolo, se ne faccia un grafico e lo si utilizzi per descrivere qualitativamente il moto di rotazione e srotolamento.



Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1
Un recipiente cilindrico adiabatico è collocato in un ambiente a pressione esterna di 10^5 Pa. Nella parte inferiore del cilindro c'è un parete fissa di area S, sotto la quale sta un sottile strato di ghiaccio a temperatura $t_0 = 0°$C. Questa parete divisoria, inizialmente anch'essa adiabatica, può essere resa termicamente conduttrice rimuovendo l'isolante. Il cilindro è chiuso in alto da un pistone adiabatico. Inizialmente la distanza tra la parete S e il pistone è $L_0 = 40$ cm, il pistone è tenuto fermo da un vincolo e lo spazio interno è riempito da $n = 2.2$ moli di gas ideale biatomico a temperatura $t = 77°$C che occupano un volume $V = 5$ l. Il ghiaccio sottostante è confinato e gli unici contatti termici possono avvenire tramite la superficie S.
a) Determinare la forza esercitata dal vincolo sul pistone nello stato iniziale.
b) Ad un certo istante viene rimosso l'isolante termico dalla base inferiore S e si osserva lo scioglimento completo della massa di ghiaccio che rimane alla temperatura $t_0 = 0°$C. Tenendo conto che il calore latente di fusione del ghiaccio è 334 kJ/kg, calcolare la massa sciolta m e la variazione di entropia del sistema acqua/ghiaccio, del gas e dell'universo.
c) A questo punto si rimette l'isolante termico in S e il pistone viene spostato in modo quasistatico verso l'alto di un tratto ΔL. Il pistone viene poi

nuovamente bloccato e l'isolante in S rimosso. Calcolare lo spostamento del pistone ΔL nel caso in cui, alla fine del processo, si sia formata sotto S una massa di ghiaccio pari a 3 g.
d) Calcolare la variazione di entropia dell'universo nella trasformazione complessiva.



Esercizio II.2

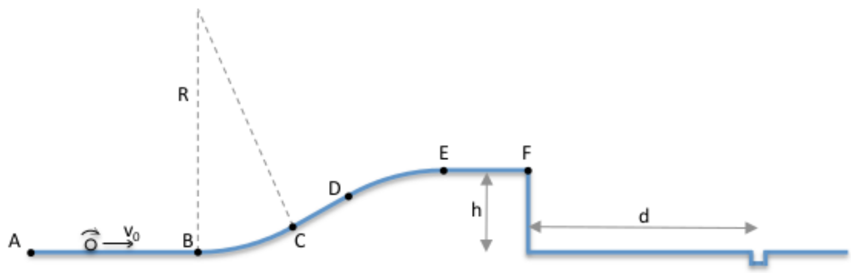
Un recipiente cilindrico con pareti adiabatiche è chiuso superiormente da un pistone ed è diviso in due scompartimenti da un altro pistone interno, libero di muoversi e anch'esso adiabatico. All'inizio il pistone esterno viene tenuto bloccato e i due scompartimenti contengono l'uno una mole di gas ideale monoatomico e l'altro una mole di gas ideale biatomico che occupano ciascuno lo stesso volume $V_i = 3$ l alla stessa pressione $P_i = 8$ atm.
a) Agendo con una forza esterna viene mosso il pistone interno in modo che il gas biatomico subisce una compressione quasistatica reversibile, che porta il suo volume a $4/5$ di quello iniziale. Determinare le nuove coordinate termodinamiche dei due gas.
b) Per mezzo di una sottile resistenza elettrica, il gas monoatomico viene poi portato alla stessa temperatura di quello biatomico, mantenendo inalterato il volume. A questo punto viene rimosso il pistone interno e i due gas iniziano a mescolarsi. Determinare la variazione di entropia dei due gas e dell'universo nell'intero processo descritto nel punto b).
c) Compiendo un lavoro pari a $|W| = 1500$ J, il pistone esterno viene lentamente spostato e la miscela di gas subisce un'espansione adiabatica quasistatica. Calcolare la temperatura T_f alla fine dell'espansione.
d) Sfruttando il primo principio della termodinamica in forma differenziale, si calcoli il coefficiente di dilatazione adiabatica γ_x associato alla miscela.

Soluzione esercizio I.1

a)
La pallina trasla e ruota contemporaneamente, soggetta alla condizione di puro rotolamento. La velocità di traslazione e la velocità angolare di rotazione sono legate dalla relazione $v = r\omega$ in qualsiasi punto della pista. Questo implica che l'energia cinetica iniziale della pallina è la somma di una parte di traslazione e di una di rotazione

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = 1.75 \text{ J} , \tag{1}$$

dove abbiamo usato il momento d'inerzia di una sfera omogenea: $I = (2/5)mr^2$. L'energia E_0 coincide con l'energia meccanica se assumiamo nulla l'energia potenziale alla quota iniziale della pallina. Inoltre l'energia meccanica rimane uguale a E_0 lungo tutto il percorso, dato che sono assenti forze di attrito dissipative.



b)
Il punto E si trova ad una quota di $h = 1$ m sopra la quota iniziale. La conservazione dell'energia ci dice che

$$\frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}I\omega_E^2 + mgh = E_0 , \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}mv_E^2\right) = E_0 - mgh , \tag{3}$$

avendo usato, come prima, il rapporto fisso tra l'energia cinetica di traslazione e di rotazione, che sono rispettivamente 5/7 e 2/7 dell'energia cinetica complessiva. Dunque

$$E_{\text{trasl}}(\text{E}) = \frac{1}{2}mv_E^2 = \frac{5}{7}(E_0 - mgh) = 0.55 \text{ J} , \tag{4}$$

a cui corrisponde una velocità di traslazione $v_E = 3.32$ m/s. Notiamo che la velocità in E sarebbe nulla se $mgh = E_0 = (7/10)mv_0^2$, ovvero per

$v_0 = \sqrt{(10/7)gh} = 3.74$ m/s e per velocità iniziali minori di questo valore la pallina non arriverebbe in cima alla rampa.Il profilo della rampa è descritto nel dettaglio nel testo dell'esercizio ed è rappresentato nella figura qui sopra. Gli archi di circonferenza corrispondono a due angoli di 30 gradi (un dodicesimo di circonferenza) e hanno curvatura opposta, raccordandosi senza spigoli ai tratti rettilinei.

c)
Tra E e F nulla cambia nel moto della pallina. Dopo F la pallina cade liberamente, a partire dalla quota h e con velocità orizzontale v_E. Le leggi orarie sono

$$\begin{aligned} x &= v_E t \qquad (5) \\ y &= h - (1/2)gt^2 \ . \qquad (6) \end{aligned}$$

Eliminando il tempo dalle due equazioni e imponendo $x = d$ quando $y = 0$ si ottiene

$$d = \sqrt{2hv_E^2/g} = 1.50 \text{ m} \ . \qquad (7)$$

Oltre al moto balistico di traslazione, la pallina conserva inalterato il moto di rotazione attorno al suo centro di massa per tutta la caduta, con velocità angolare costante $\omega_E = v_E/r = 166$ rad/s.

d)
Dato che la rotazione della pallina avviene attorno ad un asse principale d'inerzia, il momento angolare è semplicemente

$$L = I\omega_E = (2/5)mr^2\omega_E = 2.66 \cdot 10^{-3} \text{ Js} \ . \qquad (8)$$

e)
Nel tratto DE la pallina percorre un tratto di circonferenza di raggio $R = 3$ m. Il centro del cerchio osculatore si trova sulla verticale sotto il punto E. L'arco percorso corrisponde ad un angolo di 30 gradi. Consideriamo un istante generico in cui la pallina si trovi ad un angolo generico θ dalla verticale, salendo verso E. Le forze che agiscono sulla pallina perpendicolarmente al profilo della pista, cioè radialmente rispetto al cerchio osculatore, sono la componente $mg\cos\theta$ della forza peso e la reazione vincolare N in verso opposto. Queste due forze devono garantire l'accelerazione centripeta che compete al moto circolare. Se in quel punto la particella viaggia a velocità v, allora si deve avere

$$mv^2/R = mg\cos\theta - N \ . \qquad (9)$$

Notiamo di passaggio che in questa equazione, per essere precisi, avremmo dovuto usare $R + r$ come raggio da inserire nell'espressione dell'accelerazine

centripeta, dato che il CM della pallina si trova a distanza $R + r$ dal centro del cerchio osculatore della pista. Tuttavia il rapporto tra r e R è $2/300$ e trascurando r nell'equazione precedente facciamo un errore trascurabile, con un errore su N inferiore all'1%.
Ora osserviamo che v e θ possono essere scritti entrambi in funzioni della quota y a cui si trova la pallina. Infatti, dalla conservazione dell'energia, come al punto b, si ha

$$\frac{1}{2}mv_E^2 = \frac{5}{7}(E_0 - mgy) \ , \tag{10}$$

mentre la geometria del profilo ci dice che

$$y = h - R(1 - \cos\theta) \ . \tag{11}$$

Con queste espressioni, e con alcuni semplici passaggi algebrici, si ottiene

$$N(y) = \frac{mg}{R}\left(\frac{17}{7}y - \frac{10}{7}\frac{E_0}{mg} + R - h\right) \ . \tag{12}$$

La reazione vincolare deve essere positiva, dato che il piano d'appoggio non può trattenere la pallina. Essendo N una funzione crescente della quota y, il suo valore minimo è alla quota del punto D, $y_D = h - R(2 - \sqrt{3})/2 =$ 60 cm. Quindi, se si stacca, si stacca in D e il valore limite si ottiene quando $N(y_D) = 0$, ovvero

$$E_0 = \frac{7mg}{10}\left(\frac{17}{7}y_D + R - h\right) \ . \tag{13}$$

che corrisponde

$$v_0 = \sqrt{g\left(\frac{17}{7}y_D + R - h\right)} = 5.82 \text{ m/s} \ . \tag{14}$$

Per velocità iniziali superiori a questo valore, la pallina si stacca in D e non segue il profilo della pista.

Soluzione esercizio I.2

a)

Possiamo per prima cosa scrivere le equazioni del moto per la traslazione della massa m_2 e per la rotazione della carrucola:

$$\begin{aligned} m_2\ddot{y} &= T - m_2 g \\ I\ddot{\theta} &= TR - m_1 gr\sin\theta \end{aligned} \tag{15}$$

dove la quota y e l'angolo θ sono legati dalla condizione di inestensibilità del filo, $dy = -Rd\theta$. La condizione di equilibrio si trova annullando le accelerazioni:

$$\begin{aligned} & T - m_2 g = 0 \\ & TR - m_1 g r \sin\theta = 0 \ . \end{aligned} \tag{16}$$

Eliminando T dalle due equazioni si ottiene

$$\sin\theta_0 = \frac{m_2 R}{m_1 r} \quad \longrightarrow \quad \theta_0 \sim 0.133 = 7.6^\circ \ . \tag{17}$$

Eliminando T dalle equazioni del moto iniziali si ottiene invece

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_1 g r}{I + m_2 R^2} \sin\theta + \frac{m_2 g R}{I + m_2 R^2} \tag{18}$$

Notiamo a questo punto che l'angolo di equilibrio θ_0 è già abbastanza piccolo da usare l'approssimazione di piccoli angoli per qualsiasi oscillazione di piccola ampiezza $\Delta\theta$ attorno ad esso. Quindi si può scrivere

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = \frac{m_2 g R}{I + m_2 R^2} \tag{19}$$

con

$$\Omega^2 = \frac{m_1 g r}{I + m_2 R^2} \ , \tag{20}$$

e il moto è armonico con pulsazione Ω.
In realtà il moto è armonico anche se θ_0 è più grande, purché sia piccolo $\Delta\theta$. Infatti possiamo anche riscrivere l'equazione (18) in questo modo

$$\ddot{\theta} + \frac{m_1 g r}{I + m_2 R^2} (\sin\theta - \sin\theta_0) = 0 \tag{21}$$

e chiamare $\phi = \theta - \theta_0$ l'angolo misurato rispetto all'equilibrio, con ϕ compreso entro un intervallo di piccola un'ampiezza $\Delta\theta$. Usando le formule trigonometriche di addizione e approssimando $\cos\phi \simeq 1$ e $\sin\phi \simeq \phi$, si ottiene la nuova equazione armonica

$$\ddot{\phi} + \tilde{\Omega}^2 \phi = 0 \tag{22}$$

con $\tilde{\Omega}^2 = \Omega^2 \cos\theta_0$, e si vede che se θ_0 è piccolo la pulsazione rimane uguale a quella calcolata in precedenza. La legge oraria, a meno di una fase arbitraria, è

$$\theta(t) = \theta_0 + \Delta\theta \cos(\tilde{\Omega} t) \ . \tag{23}$$

Dato il vincolo di inestensibilità della corda, il moto della massa m_2 sarà

$$y(t) = y_0 + R\theta(t) \tag{24}$$

dove y_0 è una quota arbitraria determinata dallla lunghezza della corda.

b)
Il sistema adesso è in equilibrio a θ_0 e viene tolta la massa m_2. La carrucola inizierà quindi a ruotare per portarsi nella nuova posizione di equilibrio con la massa m_1 nella posizione più bassa ovvero a $\theta = 0$. L'equazione del moto è armonica:

$$I\ddot{\theta} = m_1 g r \theta \quad \longrightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{m_1 g r}{I}}t. \tag{25}$$

Il tempo che impiega la massa m_1 a raggiungere il fondo è un quarto del periodo di oscillazione

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{I}{m_1 g r}}\,. \tag{26}$$

Il momento d'inerzia della carrucola è quello di un cilindro cavo più quello della massa puntiforme m_1. Per il cilindro cavo si ha $I_c = (1/2)M(R^2 + r^2)$ [se non si ricorda l'espressione a memoria, basta integrare per anelli da r a R la massa infinitesima $2\pi\rho r dr$ per ottenere M, e integrare allo stesso modo $2\pi\rho r^3 dr$ per ottenere I_c eliminando ρ tramite il primo integrale]. Dunque

$$\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}M(R^2 + r^2) + m_1 r^2}{m_1 g r}} = 0.24 \text{ s}. \tag{27}$$

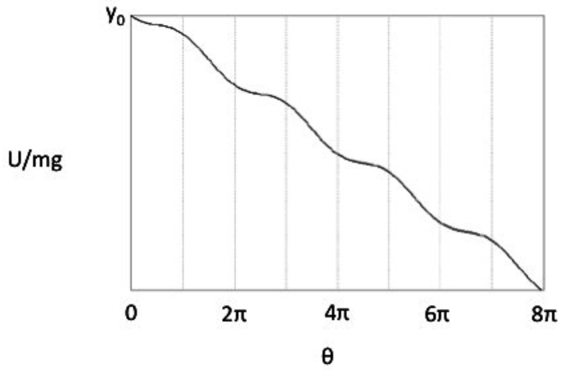
c)
Per determinare la velocità angolare istantanea dopo mezzo giro si può sfruttare la conservazione dell'energia meccanica confrontando l'energia nota all'inizio, quando il sistema è in quiete, e quella nel momento di interesse. Chiamiamo y_0 la quota generica a cui il corpo di massa m_1 viene appeso alla corda nell'istante iniziale, misurata rispetto alla quota iniziale della massa solidale alla carrucola. L'equazione che esprime l'eguaglianza dell'energia finale e quella iniziale diventa

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_y^2 + 2m_1 g r + m_1 g(y_0 + \Delta y) = m_1 g y_0\,. \tag{28}$$

Ricordiamo che $\Delta y = -\pi R$ e che $v_y = R\dot{\theta}$. Si ottiene quindi

$$\dot{\theta} = \left(\frac{2g(\pi m_1 R - 2m_1 r)}{I + m_1 R^2}\right)^{1/2} = 11.38 \text{ rad/s}\,. \tag{29}$$

Successivamente la massa appesa alla carrucola continuerà a cadere con un'accelerazione non costante data dalla somma di quella di gravità g e di quella prodotta dalla tensione della carrucola che avrà un'intensità variabile a seconda dell'angolo θ durante lo srotolamento.



d)
L'energia potenziale del sistema è puramente dovuta alla gravità e vale

$$U(\theta) = m_1 g r(1 - \cos\theta) + m_1 g(y_0 - R\theta) \tag{30}$$

Si può tracciare il grafico della funzione $U/(m_1 g)$ per θ positivi (vedi figura sopra). Tale funzione appare come una retta che parte dal valore arbitrario y_0 in $\theta = 0$ e scende con pendenza negativa R al crescere di θ, a cui si aggiunge una funzione oscillante, con valore nullo in $\theta = 2\pi n$, con n intero, e valore massimo $2r$ per $\theta = \pi + 2\pi n$. Dato che l'energia meccanica si conserva, dal grafico si deduce che l'energia cinetica cresce con θ, ma presentando lo stesso tipo di oscillazioni sovrapposte all'andamento lineare. La velocità di conseguenza aumenta nel tempo, anch'essa con modulazioni periodiche.

Soluzione esercizio II.1

a)
Il gas è termicamente isolato. Dall'equazione di stato si ottiene la pressione interna:

$$P = \frac{nRT}{V} = 12.8 \cdot 10^5 \text{ Pa} . \tag{31}$$

Considerando anche il contributo della pressione atmosferica esterna, la forza esercitata dal vincolo sarà pari a:

$$F = (P - P_{\text{ext}})S = 14750 \text{ N} \tag{32}$$

essendo $S = V/L_0$.

b)
Il gas subisce una trasformazione isocora reversibile dalla temperatura T alla temperatura T_0, perciò

$$Q = \Delta U = nc_v(T_0 - T) = -nc_v(T - T_0) \tag{33}$$

dove $(T - T_0) = 77$ K e $T_0 = 273.15K$ e il calore specifico è $(5/2)R$ per il gas biatomico. Il calore Q è negativo perché il gas lo cede al ghiaccio che si fonde. Nella fusione si può scrivere $|Q| = \lambda m$, se m è la massa di ghiaccio fuso. Dunque

$$m = \frac{nc_v(T - T_0)}{\lambda} = 10.5 \text{ g} . \tag{34}$$

La variazione di entropia del gas durante la trasformazione è data da

$$\Delta S_{\text{gas}} = nc_v \ln T_0/T = -11.35 \text{ J/K} , \tag{35}$$

mentre quella della miscela acqua/ghiaccio, che mantiene la temperatura costante durante lo scambio di calore, è data da

$$\Delta S_{\text{gh}} = -\frac{Q}{T_0} = 12.89 \text{ J/K} . \tag{36}$$

La variazione di entropia dell'universo è la somma delle due:

$$\Delta S_{\text{univ}} = 1.54 \text{ J/K} \tag{37}$$

ed è positiva, come ci aspettava.

c)

In questo caso abbiamo due trasformazioni in sequenza: espansione adiabatica quasistatica e una isocora irreversibile. Il gas durante l'espansione compie lavoro raffreddandosi ad una temperatura $T' < T_0$, mentre nella fase successiva assorbe calore dall'acqua tornando alla temperatura T_0. Nell'espansione adiabatica si ha

$$T_0 V^{\gamma-1} = T' V'^{\gamma-1} \tag{38}$$

da cui

$$T' = T_0 \left(\frac{V}{V'} \right)^{\gamma-1} . \tag{39}$$

Il calore ceduto dall'acqua durante l'isocora serve a riformare parzialmente il ghiaccio, in modo che

$$\lambda m' = nc_v(T_0 - T') \tag{40}$$

dato che il processo arriva all'equilibrio finale con temperatura T_0 uguale per il gas e la miscela di acqua/ghiaccio, con $m' = 3$ g. Dall'ultima relazione si ha

$$T' = T_0 - \frac{\lambda m'}{nc_v} \tag{41}$$

che inserita in quella precedente dà

$$V' = V \left(1 - \frac{\lambda m'}{nc_v T_0} \right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} = 1.232V . \tag{42}$$

Dato che possiamo scrivere $V' = V + S\Delta L$ e inoltre $V = SL_0$, si ottiene $\Delta L = 0.232 L_0 = 9.3$ cm.

d)
Nel processo complessivo il gas passa da T a T_0 e si espande da V a V'. La sua variazione di entropia è quindi

$$\Delta S_{\text{gas}} = nc_v \ln \frac{T_0}{T} + nR \ln \frac{V'}{V} = -7.53 \text{ J/K} . \tag{43}$$

Il ghiaccio complessivamente si riduce da $m = 10.5$ g a $m' = 3$ g, e dunque

$$\Delta S_{\text{gh}} = -\frac{\lambda(m - m')}{T_0} = 9.17 \text{ J/K} . \tag{44}$$

La variazione di entropia dell'universo è la somma delle due:

$$\Delta S_{\text{univ}} = 1.64 \text{ J/K} \tag{45}$$

ed è positiva anche stavolta.

Soluzione esercizio II.2

a)
Il gas monoatomico subisce un'espansione e il gas biatomico una compressione, entrambe quasistatiche e adiabatiche. In entrambi i casi le coordinate termodinamiche finali si ottengono dalle equazioni di conservazione delle trasformazioni adiabatiche:

$$P = P_i \left(\frac{V_i}{V} \right)^{\gamma} \tag{46}$$

Usiamo il suffisso 1 per il gas monoatomico e 2 per quello biatomico, e ricordiamo che $\gamma_1 = 5/3$ e $\gamma_2 = 7/5$. Inoltre, sappiamo che $V_1/V_i = 6/5$ e $V_2/V_i = 4/5$. Eseguendo il calcolo si ottiene

$$P_1 = 5.98 \cdot 10^5 \text{ Pa} \tag{47}$$

e

$$P_2 = 11.07 \cdot 10^5 \text{ Pa} . \tag{48}$$

Poi possiamo usare l'equazione di stato nella forma $T = PV/nR$ per ricavare

$$T_1 = 258.9 \text{ K} \tag{49}$$

e

$$T_2 = 319.6 \text{ K} . \tag{50}$$

b)
La temperatura finale è la stessa per i due gas e coincide con T_2, già calcolato. Il volume finale, per entrambi i gas, è il volume totale $2V_i = 6$ l. Usando l'espressione dell'entropia di un gas ideale in funzione di T e V, si trova dunque:

$$\Delta S_1 = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{2V_i}{V_1} = 6.97 \text{ J/K} \tag{51}$$

e

$$\Delta S_2 = nR \ln \frac{2V_i}{V_2} = 7.62 \text{ J/K} \tag{52}$$

e l'universo aumenta la sua entropia di 14.59 J/K.

c)
Dato che si tratta di un'espansione adiabatica, il lavoro è compiuto dal gas verso l'esterno. Non essendoci scambio di calore con l'esterno, tale lavoro coincide con la variazione di energia interna. Questa può essere scritta come somma delle variazioni di energia di ciascuno dei due gas che compongono la miscela. Dunque si ha

$$n(c_{v1} + c_{v2})(T_f - T_2) = -W \tag{53}$$

essendo T_2 la temperatura iniziale del processo, calcolata precedentemente. Si ottiene

$$T_f = T_2 - \frac{W}{n(c_{v1} + c_{v2})} = 274.5 \text{ K} . \tag{54}$$

d)
La miscela non scambia calore con l'esterno quindi possiamo scrivere il primo principio in forma differenziale nel seguente modo

$$0 = \delta Q = n(c_{v_1} + c_{v_2})dT + PdV \quad \longrightarrow \quad n(c_{v_1} + c_{v_2})dT = -\frac{2nRT}{V}dV \tag{55}$$

Dove il fattore 2 nell'ultima espressione è dato dal fatto che le moli totali che compiono il lavoro infinitesimo sono 2. Separando le variabili e considerando che $(c_{v_1} + c_{v_2}) = 4R$, si ottiene

$$4R\frac{dT}{T} = -2R\frac{dV}{V} \quad \longrightarrow \quad \ln T^2 V = cost. \quad \longrightarrow \quad TV^{1/2} = cost. \tag{56}$$

Ricordando che $TV^{(\gamma_x - 1)} = cost.$, si ha che $\gamma_x = 3/2$. Come era attendibile il gamma della miscela ha un valore compreso tra $\gamma_1 = 5/3$ e $\gamma_2 = 7/5$.
In alternativa si poteva anche usare il primo principio come sopra, in combinazione con la relazione

$$0 = \delta Q = n(c_{p_1} + c_{p_2})dT - VdP \tag{57}$$

dove $c_p = c_v + R$, da cui si ottiene

$$\frac{dP}{P} = -\frac{c_{p_1} + c_{p_2}}{c_{v_1} + c_{v_2}} \frac{dV}{V} \quad \longrightarrow \quad \ln PV^{3/2} = cost. \tag{58}$$

e lo stesso γ_x di prima. Da qui si vede che $\gamma_x = (c_{p_1} + c_{p_2})/(c_{v_1} + c_{v_2})$.