Fisica Generale I
A.A. 2015-2016, 14 luglio 2016

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

L'ascensore di un grande e moderno edificio è in grado di muoversi traslando su una parete esterna lungo una guida rettilinea inclinata di un angolo $\phi = 30°$ rispetto all'orizzonte. All'interno dell'ascensore è collocato un tavolino di lunghezza $L = 0.5$ m, il cui piano d'appoggio rimane sempre orizzontale. L'ascensore sta salendo con velocità $v_0 = 12$ m/s, nella direzione della guida. Una chiave di massa $m = 75$ g, e dimensioni trascurabili rispetto a L, è appoggiata al tavolino in prossimità del bordo posteriore rispetto alla direzione del moto. Ad un certo istante l'ascensore inizia a frenare con accelerazione negativa costante, in direzione della guida, di modulo $a_0 = 4$ m/s^2, e la chiave inizia a scivolare sul tavolino.
a) In assenza di attrito, si scriva l'equazione del moto della chiave durante la frenata e si calcoli tempo Δt che impiega a raggiungere il bordo opposto del tavolino.
b) Si ripeta il calcolo del punto precedente, ma stavolta in presenza di attrito radente tra la chiave e il tavolino, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = \mu_0 = 0.3$. Quale condizione deve soddisfare il coefficiente di attrito statico μ_s affinché la chiave inizi a scivolare non appena l'ascensore frena?
c) Si traccino i grafici di posizione e velocità della chiave rispetto al tavolino in funzione del tempo, nei due casi con e senza attrito. Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza di attrito nel tragitto della chiave da un estremità all'altra del tavolino e la potenza dissipata.
d) Come cambia il moto nel caso in cui il coefficiente di attrito dinamico non sia uniforme, bensì aumenti linearmente da 0 a $4\mu_0$ tra le due estremità del tavolo? Si scriva l'equazione del moto e si tracci il grafico della posizione $x(t)$. La chiave raggiunge il bordo opposto? Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza di attrito.
e) Cosa sarebbe successo se a_0 fosse stato 10 volte più grande? Si descriva la traiettoria della chiave rispetto all'ascensore.

Esercizio I.2

Un oggetto è formato da un tubo cilindrico con pareti sottili, di massa $M = 3$ kg, lunghezza $L = 50$ cm e raggio $R = 10$ cm e da una lastra sottile che lo attraversa per intero passando per un suo diametro. La lastra, che ha massa e lunghezza uguali a quelle del cilindro, è larga $6R$ e sporge dal cilindro in modo simmetrico rispetto all'asse di quest'ultimo. Tubo e lastra hanno distribuzione di massa omogenea, sono saldati assieme e sono vincolati ad un asse coincidente con il loro asse di simmetria, posto in direzione orizzontale, attorno al quale possono ruotare rigidamente. Sull'asse di rotazione agisce una molla a spirale, dotata di costante di torsione $C = 0.2$ Nm, che tende a mantenere la lastra orizzontale ($\theta = 0$).

a) Si determini il momento d'inerzia dell'oggetto, I_0, rispetto all'asse di simmetria. Si scriva l'equazione del moto e la legge oraria, $\theta(t)$, nel caso di piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$, calcolando il periodo di oscillazione T_0. Cosa cambia nel caso di grandi ampiezze di oscillazione?

b) Una bilia di massa $m = 0.4$ kg cade sulla lastra, inizialmente in quiete, urtandola elasticamente a distanza $d = R$ dal bordo esterno. Se la velocità verticale della bilia immediatamente prima dell'urto è $v = 2$ m/s, determinare la velocità v' della bilia e la velocità angolare ω' della struttura rotante nell'istante immediatamente successivo all'urto.

c) Quali sono l'angolo massimo $\theta_{\max}$ di torsione e la quota massima $h_{\max}$ raggiunti rispettivamente dal tubo e dalla bilia a seguito dell'urto?

d) Si determini la quota H da cui dovrebbe partire la bilia da ferma, al di sopra della lastra, affinché anche il secondo rimbalzo avvenga esattamente quando la lastra si trova in posizione orizzontale [domanda facoltativa: che tipo di moto si osserverà in questo caso?].

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Un cilindro con pistone, contenente $n = 2$ mol di gas biatomico ideale, si trova all'equilibrio termico con un termostato alla temperatura $T_A = 400$ K. Il gas viene compresso in modo reversibile rimanendo a contatto con il termostato fino a che il volume si riduce ad un terzo di quello iniziale: $V_B = V_A/3$. Poi il gas viene isolato termicamente e viene riportato al volume iniziale tramite un'espansione adiabatica reversibile, fino allo stato di equilibrio C. Infine il pistone viene bloccato e il contatto termico tra il gas e il serbatoio viene ristabilito, in modo che il gas torni allo stato iniziale A.

a) Calcolare la temperatura T_C e tracciare il diagramma $P - V$ del ciclo.

b) Calcolare il calore scambiato, il lavoro eseguito e la variazione di entropia dell'universo nel ciclo.

c) Si discutano i risultati del punto precedente alla luce del II principio della termodinamica.

d) Lasciando invariati lo stato A e lo stato C, sostituiamo ora lo stato di equilibrio B con un nuovo stato di equilibrio B$'$, tale che AB$'$ sia un'isobara reversibile e B$'$C un'adiabatica reversibile. Ricalcolare i nuovi valori delle grandezze chieste al punto b).

Esercizio II.2

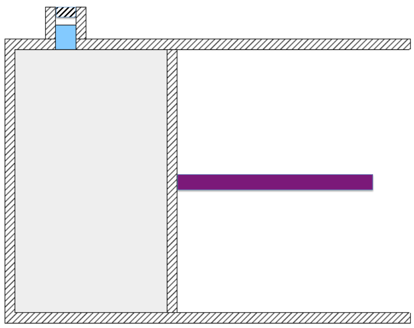
Un gas monoatomico ideale è contenuto all'interno di un cilindro con pistone mobile. Inizialmente il gas è termicamente isolato dall'ambiente esterno e il pistone è bloccato; il gas si trova alla temperatura $T_A = 250$ K, alla pressione $P_A = 10^5$ Pa e occupa un volume pari a $V_A = 0.3$ m^3. Ad un certo istante, tramite un'apposita apertura nella parete superiore, il gas viene posto a contatto termico con un piccolo recipiente contenente 100 g di acqua a temperatura $T_0 = 300$ K, come in figura, anch'esso isolato termicamente dall'ambiente. Il sistema raggiunge lo stato di equilibrio B a temperatura T_B.

a) Determinare le coordinate termodinamiche (P, V, T) del gas in B.

b) Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'universo nella trasformazione AB e spiegare se la trasformazione sia reversibile o irreversibile.

c) Successivamente il pistone viene sbloccato e, tramite una forza esterna, il volume del gas viene fatto espandere lentamente, in modo reversibile. Calcolare le coordinate termodinamiche del gas nello stato C quando metà della massa d'acqua si è solidificata. [calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_f = 3.3 \times 10^5$ J/kg]

d) Calcolare il calore ed il lavoro scambiati dal gas nella trasformazione BC.



Soluzione esercizio I.1

a) Rispetto ad un sistema di riferimento solidale con l'edificio, l'ascensore si muove lungo un percorso rettilineo inclinato di 30° rispetto all'orizzonte, prima con moto uniforme e poi uniformemente accelerato (con accelerazione negativa, trattandosi di una frenata). Ci interessa il moto della chiave relativamente al tavolino nella fase di frenata. Per questo ci conviene lavorare nel sistema di riferimento, non inerziale, solidale con l'ascensore. In tale sistema di riferimento la chiave è soggetta anche alla forza apparente, diretta lungo la guida, con verso concorde alla velocità $\mathbf{v_0}$ e di modulo ma_0. Se x è la coordinata orizzontale, lungo il piano del tavolino, e y quella verticale, la forza apparente è diretta ad un angolo $\phi = 30°$ nel piano x-y ed ha componenti positive in entrambe le direzioni. L'equazione del moto della chiave è

$$\boxed{\begin{cases} ma_x = ma_0 \cos\phi \\ ma_y = N - mg + ma_0 \sin\phi\,. \end{cases}}$$

Essendo $g > a_0 \sin\phi$, la reazione vincolare del tavolino bilancia le componenti verticali delle forze e mantiene la chiave a quota $y = 0$. Dunque abbiamo

$$\begin{cases} a_x = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0 \\ N = m(g - \frac{1}{2} a_0)\,. \end{cases}$$

Lungo l'asse x abbiamo un moto rettilineo uniformemente accelerato

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a_0 t^2\,. \tag{1}$$

La chiave raggiunge il bordo opposto quando $x(t) = L$, e quindi

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{4L}{\sqrt{3} a_0}} = 0.54 \text{ s}}\,.$$

b) Come prima il moto lungo x è rettilineo e uniformemente accelerato, ma ora all'accelerazione a_x dobbiamo sottrarre l'accelerazione costante dovuta alla forza d'attrito, mentre la reazione vincolare non cambia. Dunque l'equazione del moto è

$$\boxed{ma_x = ma_0 \cos\phi - \mu_0 N = ma_0 \cos\phi - \mu_0 m(g - a_0 \sin\phi)}$$

da cui

$$a_x = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0 - \mu_0 \left(g - \frac{1}{2} a_0 \right)\,.$$

La legge oraria è

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a_0 - \mu_0\left(g - \frac{1}{2}a_0\right)\right]t^2 \tag{2}$$

e il tempo impiegato a raggiungere il bordo opposto del tavolino è

$$\boxed{\Delta t' = \sqrt{\frac{2L}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_0 - \mu_0\left(g - \frac{1}{2}a_0\right)}} = 0.94 \text{ s}}\,.$$

La chiave rimarrebbe inizialmente ferma sul tavolino se la forza apparente $ma_0 \cos\phi$, che la spingerebbe in avanti, fosse minore di $\mu_s N$, dove N è stata calcolata al punto (a): $N = mg - ma_0 \sin\phi$. Il caso limite si ottiene quando vale l'eguaglianza, e dunque

$$\mu_s m(g - a_0 \sin\phi) = ma_0 \cos\phi$$

ovvero

$$\boxed{\mu_s = \frac{a_0 \cos\phi}{g - a_0 \sin\phi} = \frac{(\sqrt{3}/2)a_0}{g - a_0/2} = 0.44}\,.$$

Per valori di μ_s superiore a questo valore critico la chiave rimane ferma, per valori inferiori inizia a scivolare. Notiamo che il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_0 assegnato dal problema è compatibile con questa condizioni, se si tiene conto che di norma $\mu_d < \mu_s$.

c) Dobbiamo tracciare i grafici di posizione $x(t)$ e velocità $v(t)$. La posizione è data dalle Eq. (1) e (2), mentre le velocità sono

$$v(t) = a_0 \cos\phi t, \qquad v(t) = [a_0 \cos\phi - \mu_0(g - a_0 \sin\phi)]t$$

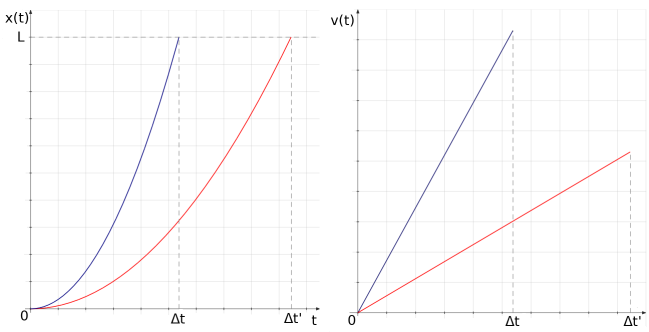


Figura 1: Grafico della posizione $x(t)$ e della velocità $v(t)$: in blu nel caso senza attrito e in rosso nel caso con attrito.

Il lavoro compiuto dalla forza d'attrito (costante) è pari a

$$\boxed{W = \int_0^L F_{\text{att}} dx = F_{\text{att}} L = -\mu_0 m(g - a_0 \sin\phi)L = -87.7 \text{ mJ}}$$

e la potenza totale dissipata sul tavolino è

$$\boxed{P = \frac{|W|}{\Delta t'} = 93 \text{ mW}}\ .$$

d) In questo caso abbiamo un coefficiente d'attrito dinamico dipendente linearmente dalla posizione e pari a

$$\mu_d(x) = \frac{4\mu_0}{L} x\,,$$

infatti in questo modo $\mu_0(0) = 0$, $\mu_0(L) = 4\mu_0$ e $\mu_0(x)$ è lineare in x, come richiesto. Per trovare l'equazione del moto si parte dalla seconda legge della dinamica

$$m\ddot{x}(t) = ma_0 \cos\phi - m\mu_d(x)(g - a_0 \sin\phi)$$

ovvero

$$\boxed{\ddot{x}(t) = a_0 \cos\phi - \frac{4\mu_0}{L} x(t)(g - a_0 \sin\phi)}$$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) = -\alpha x(t) + \beta$$

avendo definito le costanti

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{4\mu_0}{L}(g - a \sin\phi) \\ \beta = a \cos\phi\ . \end{cases}$$

Per risolverla cambiamo variabile in questo modo:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \frac{\beta}{\alpha}$$

così che l'equazione del moto diventi

$$\ddot{\tilde{x}}(t) = -\alpha \tilde{x}(t)$$

che è un'equazione armonica. La sua soluzione è

$$\tilde{x}(t) = A \cos(\sqrt{\alpha} t + \varphi)$$

da cui otteniamo

$$x(t) = \frac{\beta}{\alpha} + A\cos(\sqrt{\alpha}t + \varphi)\ .$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ si trova $\varphi = 0$ e $A = -\beta/\alpha$ ed è quindi infine possibile scrivere la legge oraria

$$\boxed{x(t) = \frac{La_0\cos\phi}{4\mu_0(g - a_0\sin\phi)}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{4\mu_0}{L}(g - a_0\sin\phi)}\ t\right)\right]}$$

e possiamo tracciarne il grafico

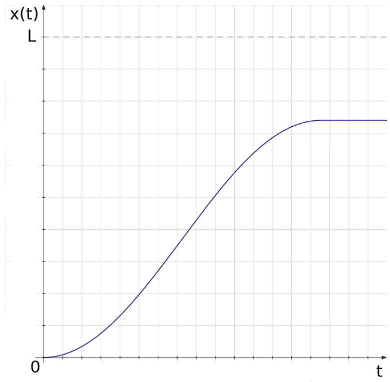


Figura 2: Grafico della posizione $x(t)$ nel caso con attrito dipendente dalla posizione.

Il valore di x in cui la chiave si ferma corrisponde al massimo della curva nel grafico che, a sua volta, corrisponde al caso in cui il coseno vale -1. Dunque

$$x_{\max} = \frac{La_0\cos\phi}{2\mu_0(g - a_0\sin\phi)} = \frac{\sqrt{3}a_0}{4\mu_0[g - (1/2)a_0]}L = 0.37\text{m}$$

e si vede che la chiave non raggiunge il bordo opposto del tavolino. Il lavoro compiuto dalla forza di attrito sarà

$$\boxed{W = \int_0^{x_{\max}} F_{\text{att}}dx = -\frac{4\mu_0}{L}m[g - (1/2)a_0]\int_0^{x_{\max}} xdx}$$

da cui integrando si ottiene

$$\boxed{W = -\frac{2m\mu_0}{L}[g - (1/2)a_0]x_{\max}^2 = -96\text{ mJ}}\ .$$

e) Se $a_0 = 40$ m/s^2 abbiamo $g < a_0 \cos\phi$, quindi la chiave non resta più appoggiata al tavolino ma si alza da esso muovendosi di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a' = \sqrt{(a_0 \sin\phi - g)^2 + (a_0 \cos\phi)^2} \simeq 36.1$ m/s^2, lungo una retta inclinata di un angolo

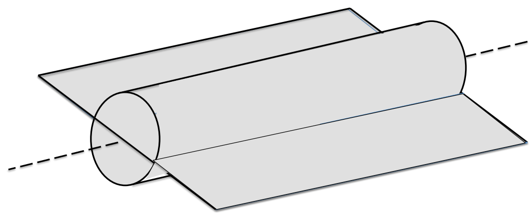
$$\beta = \tan^{-1} \frac{a_0 \sin\phi - g}{a_0 \cos\phi} = 0.286 \text{ rad} = 16.4°$$

rispetto al piano del tavolino.

Soluzione esercizio I.2

a) L'oggetto composto dal cilindro e dalla lastra compone un unico corpo rigido coassiale (vedi figura), il cui momento d'inerzia rispetto all'asse comune è la somma dei momenti d'inerzia di ciascuno. Quello del cilindro cavo è semplicemente MR^2, dato che tutta la massa M si trova a distanza R dall'asse, come per un anello. Quello della lastra può essere visto come la somma di infiniti contributi di aste sottili omogenee di lunghezza $6R$, che ruotano attorno al loro centro di massa e che massa dm. Ciascuna asta contribuisce al momento d'inerzia della lastra con un contributo $(1/12)dm(6R)^2$ e la somma di tutti i contributi dà $(1/12)M(6R)^2$. Dunque

$$\boxed{I_0 = MR^2 + 3MR^2 = 4MR^2 = 0.12 \text{ kg m}^2}\ .$$



In presenza della molla a spirale, il corpo rigido si comporta come un pendolo di torsione, la cui equazione del moto è

$$\boxed{I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta}\ .$$

Si tratta di un'equazione armonica, la cui soluzione generale è

$$\boxed{\theta(t) = \theta_{\max}\cos(\Omega t + \varphi)}\,, \tag{3}$$

dove $\Omega = \sqrt{C/I_0}$ è la pulsazione, e $\theta_{\max}$ e φ sono costanti d'integrazione. Il periodo di oscillazione è

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{C}} = 4.87\ \mathrm{s}}\,.$$

L'equazione è armonica per tutti gli angoli e non è necessario applicare alcuna approssimazione di piccoli angoli. Il periodo è lo stesso per qualsiasi ampiezza dell'oscillazione.

b) Nell'urto si conserva l'energia cinetica, dato che si tratta di un urto elastico. Inoltre, si conserva anche il momento angolare calcolato rispetto a qualsiasi punto dell'asse di rotazione, dove agiscono le sole forze esterne di tipo impulsivo (reazioni vincolari). Le due leggi di conservazioni sono

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_0\omega'^2 \\ 2Rmv = 2Rmv' + I_0\omega'\,, \end{cases}$$

essendo $2R$ la distanza tra il punto dove avviene l'urto e l'asse di rotazione. La velocità v' rimane verticale anche dopo l'urto, dato che non agiscono forze laterali sulla bilia se la lastra è orizzontale. Per quanto riguarda la convezione sui segni nella seconda equazione, supponiamo di guardare il sistema frontalmente lungo l'asse di simmetria del cilindro. Se l'urto avviene sulla parte di lastra sporgente a destra, consideriamo la velocità della bilia positiva quando si muove verso il basso e la velocità angolare del corpo rigido positiva quando ruota in senso orario. Ovviamente, convenzioni diverse sui segni porterebbero agli stessi risultati finali.
Per risolvere il sistema di equazioni si può ricavare una delle due incognite dalla seconda equazione e inserirla nella prima. Ad esempio, possiamo scrivere

$$\omega' = \frac{2mR}{I_0}(v - v')$$

che inserito nella prima dà

$$v^2 = v'^2 + \frac{4mR^2}{I_0}(v - v')^2$$

ovvero

$$v^2 = v'^2 + \frac{m}{M}(v - v')^2\,.$$

Risolvendo l'equazione quadratica si trova

$$v' = -v\frac{1 \pm \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}}\,.$$

La soluzione con il segno più corrisponde al passaggio della bilia attraverso la lastra senza urto, ed è una soluzione da eliminare in quanto non fisica. Dunque la soluzione buona è

$$\boxed{v' = -v\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}} = -0.765\ v = -1.529\ \mathrm{m/s}}$$

e la bilia rimbalza verso l'alto dopo l'urto. Per la velocità angolare del corpo rigido si ha

$$\boxed{\omega' = \frac{\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\frac{v}{R} = 2.353\ \mathrm{rad/s}}$$

c) L'angolo massimo si trova sapendo che la legge oraria per la rotazione del corpo solido, in forma generale, è data dall'equazione (3). Basta usare le condizioni iniziali $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = \omega'$, corrispondenti al tempo immediatamente successivo all'urto, per fissare le costanti di integrazione. Si trova $\varphi = -\pi/2$ e $\theta_{\max} = \omega'/\Omega$. Dunque la legge oraria dopo l'urto è

$$\theta(t) = \theta_{\max}\sin(\Omega t)\ ,$$

e l'angolo massimo è

$$\boxed{\theta_{\max} = \frac{\omega'}{\Omega} = \sqrt{\frac{I_0\omega'^2}{C}} = 1.82\ \mathrm{rad} = 104^\circ}\ .$$

Notiamo che questo risultato può essere anche visto come l'esito della conversione completa dell'energia cinetica iniziale $(1/2)I_0\omega'^2$ in energia potenziale associata alla molla a spirale, $(1/2)C\theta_{\max}^2$.
Per quanto riguarda la bilia, basta applicare la conservazione dell'energia meccanica. L'energia cinetica subito dopo l'urto si converte infatti tutta in energia potenziale alla massima quota $h_{\max}$. Dunque

$$\boxed{h_{\max} = \frac{v'^2}{2g} = 0.119\ \mathrm{m}}\ .$$

d) Per risolvere il problema basta imporre che il tempo di volo della bilia dopo il primo urto sia uguale a mezzo periodo di rotazione del corpo rigido. In questo modo, bilia e lastra si incontreranno di nuovo nello stesso punto in cui era avvenuto il primo urto, con la lastra orizzontale. Il periodo di rotazione del corpo rigido, già calcolato al punto (a) non dipende dall'altezza da cui cade la bilia, dato che non dipende dall'ampiezza della rotazione. Dunque il tempo tra un urto e l'altro deve valere $\pi\sqrt{I_0/C}$. Per quanto riguarda la bilia, data una velocità iniziale di modulo v' e verticale, la sua legge oraria è $y(t) = |v'|t - (1/2)gt^2$. Basta quindi imporre che $y = 0$ quando $t = \pi\sqrt{I_0/C}$, ovvero:

$$|v'| = \frac{1}{2} g\pi \sqrt{\frac{I_0}{C}} \ .$$

D'altra parte, dal punto (b) precedente sappiamo che $|v'| = \beta v$ con

$$\beta = \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = 0.765 \ .$$

Inoltre la velocità v d'ingresso al primo urto può essere espressa tramite la quota di partenza h usando la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgH = \frac{1}{2} mv^2 \ ,$$

da cui $v = \sqrt{2gH}$. Combinando questi risultati si ottiene

$$\beta\sqrt{2gH} = \frac{1}{2} g\pi \sqrt{\frac{I_0}{C}} \ ,$$

ovvero

$$\boxed{H = \frac{\pi^2 g I_0}{8\beta^2 C} = 12.4 \text{ m}} \ .$$

Per quanto riguarda la domanda facoltativa si può ragionare in questo modo: nel primo urto le velocità d'ingresso erano v per la bilia e $\omega = 0$ per la lastra, mentre le velocità d'uscita erano v' e ω'. Il secondo urto avviene nello stesso punto del primo, con la lastra orizzontale, e con velocità d'ingresso $-v'$ e $-\omega'$. A meno di un cambiamento di segno globale (e ininfluente) nell'equazione per la conservazione del momento angolare, le due leggi di conservazione per il secondo urto avranno l'output e l'input scambiato rispetto a quelle del primo urto. Ci aspettiamo quindi che le velocità d'uscita dal secondo urto siano uguali a v e $\omega = 0$ come quelle d'ingresso al primo, e il moto si ripeterà periodicamente nel tempo (ovviamente in assenza di attriti!). Nella figura è mostrato il grafico della quota della bilia nel tempo.

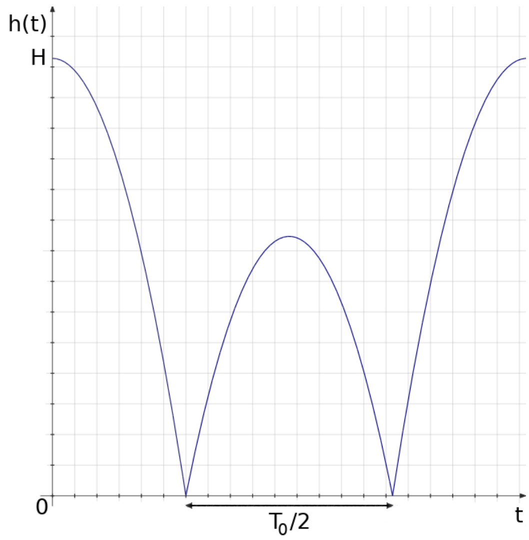


Figura 3: Grafico della quota verticale della bilia in funzione del tempo.

Soluzione esercizio II.1

a) Per calcolare la temperatura T_C osserviamo che la trasformazione B–C è adiabatica reversibile, quindi vale $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$. Dato che A–B è isoterma, abbiamo $T_B = T_A = 400$ K. Inoltre sappiamo che C–A è isocora, quindi $V_C = V_A$. Ora possiamo calcolare la temperatura T_C come:

$$\boxed{T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 258 \text{ K}} \, .$$

La pressione in C può essere calcolata con l'equazione di stato o, equivalentemente, dal fatto che, essendo V lo stesso in A e C, il rapporto delle pressioni è uguale al rapporto delle temperature; dunque $P_C = (258/400)P_A = 0.645 P_A$. Per tracciare il diagramma $P - V$ notiamo che gli stati di equilibrio A e B si trovano sulla stessa isoterma, mentre i punti B e C stanno sulla stessa adiabatica reversibile, con $V_A = V_C = 3V_B$. Infine osserviamo che la trasformazione C–A è irreversibile, in quanto il gas scambia calore con il termostato alla temperatura T_A, rispetto a cui ha una differenza di temperatura finita.

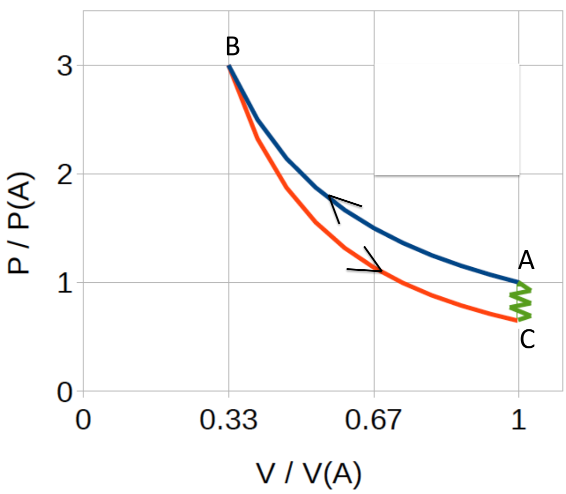


Figura 4: Diagramma $P - V$.

b) Iniziamo con il calcolo del calore scambiato in un ciclo. Il gas cede calore al termostato nella trasformazione A–B, mentre assorbe calore nella trasformazione C–A dallo stesso termostato.

Nella trasformazione isoterma A–B l'energia interna rimane costante, essendo funzione soltanto della temperatura, pertanto dal primo principio segue che $Q_{\text{AB}}^{\text{gas}} = W_{\text{AB}}^{\text{gas}}$. Integrando sulla trasformazione otteniamo:

$$Q_{\text{AB}}^{\text{gas}} = \int_A^B P dV = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = -7.31 \text{ kJ} \, .$$

La trasformazione C–A è isocora, quindi abbiamo:

$$Q_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{gas}} = nc_V \left(T_A - T_C\right) = 5.90 \text{ kJ} .$$

Il calore netto scambiato dal gas in un ciclo è dato dalla somma algebrica:

$$\boxed{Q_{\mathrm{gas}} = Q_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{gas}} + Q_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{gas}} = -1.41 \text{ kJ}} .$$

Applicando il primo principio all'intero ciclo abbiamo che il lavoro netto compiuto dal gas è uguale al calore netto scambiato dal gas, dato che dopo un ciclo l'energia interna deve coincidere con quella iniziale. Dunque

$$\boxed{W_{\mathrm{gas}} = Q_{\mathrm{gas}} = -1.41 \text{ kJ}} .$$

Il segno negativo è consistente con il fatto che il ciclo rappresentato in Fig. 4 viene percorso in verso antiorario.
Per quanto riguarda l'entropia dell'universo notiamo dapprima che nelle trasformazioni A–B e B–C essa rimane costante, essendo trasformazioni reversibili. Quindi la variazione di entropia dell'universo in un ciclo sarà determinata soltanto dalla trasformazione irreversibile C–A. Per quanto riguarda il gas, la variazione di entropia lungo l'isocora si calcola come:

$$\Delta S_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{gas}} = nc_V \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = 18.2 \text{ J/K} .$$

Per l'ambiente invece abbiamo:

$$\Delta S_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{amb}} = -\frac{Q_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{gas}}}{T_A} = -14,8 \text{ J/K} .$$

Dunque la variazione di entropia dell'universo in un ciclo completo è

$$\boxed{\Delta S_{\mathrm{univ}} = \Delta S_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{CA}}^{\mathrm{amb}} = 3.4 \text{ J/K}} .$$

c) La compatibilità dei risultati precedenti con il II principio della termodinamica è verificabile in almeno due modi. Per prima cosa si nota che la variazione di entropia dell'universo è positiva, come deve essere per un ciclo di trasformazioni che comprendono una trasformazione irreversibile (per irreversibilità termica). In secondo luogo, notiamo che questo ciclo viene compiuto utilizzando un solo serbatoio a temperatura costante. Dunque, per non violare l'enunciato di Kelvin-Planck, il lavoro netto eseguito deve essere negativo, come in effetti è. Percorrere il ciclo al contrario, per ottenere un lavoro positivo, non è possibile in assenza di altri serbatoi di calore, dato che con quello a disposizione l'inversione del ciclo implicherebbe il raffreddamento del gas da A a C tramite contatto termico con un serbatoio più caldo, in violazione dell'enunciato di Clausius. Infine notiamo che, essendoci

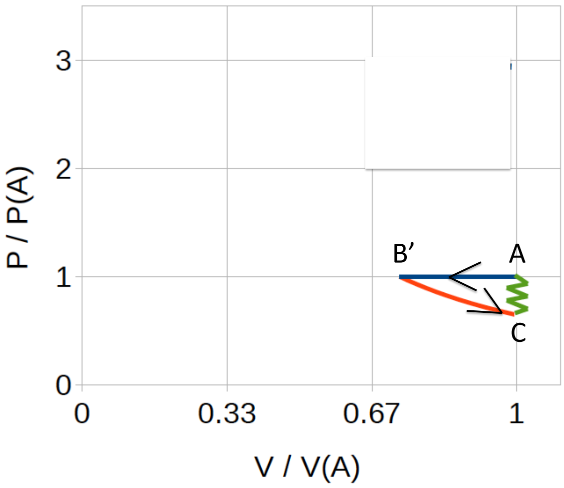


Figura 5: Ciclo AB′C.

un solo serbatoio di calore, questo ciclo non può servire per realizzare nè una macchina frigorifera nè una macchina termica.

d) Considerando la trasformazione isobara AB′ si ottiene il diagramma $P-V$ riportato in Fig. 5. Dal grafico si deduce che l'area descritta dal ciclo è cambiata rispetto a prima e quindi il lavoro (e di conseguenza il calore) scambiato dal gas in un ciclo risulterà diverso; invece la variazione di entropia dell'universo in un ciclo rimarrà invariata, dal momento che la trasformazione C–A, l'unica irreversibile, non viene modificata. Per il calcolo del lavoro e del calore abbiamo i seguenti dati:

$$T_A = 400 \text{ K}, \quad T_C = 258 \text{ K}, \quad V_A = V_C, \quad P_A = P_{B'} \ .$$

Come sopra, scriviamo il calore scambiato in un ciclo come somma dei contributi delle trasformazioni A–B' e C–A:

$$Q_{\text{gas}} = Q^{\text{gas}}_{\text{AB'}} + Q^{\text{gas}}_{\text{CA}} = nc_P\left(T_{B'} - T_A\right) + nc_V\left(T_A - T_C\right) \ ,$$

dove $c_V = 5/2R$ e $c_P = 7/2R$ sono i calori specifici a volume e pressione costante per il gas biatomico. L'unica incognita è la temperatura $T_{B'}$. Ci serve dunque un'altra relazione indipendente che leghi $T_{B'}$ alle altre coordinate termodinamiche note. Possiamo sfruttare la trasformazione adiabatica reversibile B'–C in cui:

$$T_{B'} = T_C\left(\frac{V_C}{V_{B'}}\right)^{\gamma-1}$$

Poi usiamo il fatto che $V_C = V_A$ e utilizziamo l'equazione di stato in questo modo:

$$T_{B'} = T_C\left(\frac{V_A}{V_{B'}}\right)^{\gamma-1} = T_C\left(\frac{V_A P_{B'}}{nRT_{B'}}\right)^{\gamma-1} = T_C\left(\frac{P_A V_A}{nRT_{B'}}\right)^{\gamma-1} = T_C\left(\frac{T_A}{T_{B'}}\right)^{\gamma-1} \ ,$$

da cui si ottiene

$$T_{B'} = \left(T_C T_A^{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 292 \text{ K}$$

avendo inserito $\gamma = c_P/c_V = 7/5$ per il gas ideale biatomico. Ora finalmente possiamo calcolare il calore scambiato con il termostato:

$$\boxed{Q_{\text{gas}} = nc_P\left(T_{B'} - T_A\right) + nc_V\left(T_A - T_C\right) = -382 \text{ J}} \, .$$

Il lavoro compiuto è uguale a Q_{gas} e la variazione di entropia dell'universo è la stessa del ciclo precedente.

Soluzione esercizio II.2

a) Calcoliamo innanzitutto il numero di moli del gas usando l'equazione di stato nel punto di equilibrio iniziale:

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 14.4 \text{ mol} \, .$$

In questo problema il gas scambia calore soltanto con l'acqua, quindi scriviamo l'equazione dello scambio di calore nella trasformazione A–B:

$$m c_s^l (T_B - T_0) + n c_V (T_B - T_A) = 0 \, ,$$

in cui abbiamo considerato la trasformazione isocora del gas con

$$\boxed{V_B = V_A = 0.3 \text{ m}^3} \, .$$

Calcoliamo la temperatura di equilibrio in B, esplicitandola dall'equazione precedente

$$\boxed{T_B = \frac{m c_s^l T_0 + n c_V T_A}{m c_s^l + n c_V} = 285 \text{ K}}$$

avendo usato i calori specifici $c_s^l = 1$ cal/(g C)=4.18 kJ/(kg K) per l'acqua e $c_V = (3/2)R$ per il gas. Infine, possiamo calcolare la pressione dall'equazione di stato:

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 1.14 \times 10^5 \text{ Pa}} \, .$$

b) Il gas compie una trasformazione isocora A–B, per cui calcoliamo la sua variazione di entropia come:

$$\boxed{\Delta S_{\text{AB}}^{\text{gas}} = n c_V \ln \frac{T_B}{T_A} = 23.6 \text{ J/K}} \, .$$

Per la variazione di entropia dell'acqua otteniamo invece:

$$\Delta S_{\rm AB}^{\rm H_2O} = mc_s^l \ln\frac{T_B}{T_0} = -21.5 \text{ J/K} .$$

La variazione di entropia dell'universo è quindi:

$$\boxed{\Delta S_{\rm AB}^{\rm U} = \Delta S_{\rm AB}^{\rm gas} + \Delta S_{\rm AB}^{\rm H_2O} = 2.1 \text{ J/K}}$$

ed è positiva. Infatti la trasformazione avviene con uno scambio di calore tra due sistemi con una differenza di temperatura finita, e quindi è irreversibile.

c) Si può rispondere a questo quesito in almeno due modi equivalenti, ricorrendo al primo principio applicato al sistema isolato gas+acqua, oppure alla variazione di entropia in trasformazioni reversibili.
Cominciamo dal primo. Osserviamo che il sistema gas+acqua è un sistema isolato, quindi il calore ceduto dall'acqua sarà uguale al calore assorbito dal gas. Osserviamo anche che la trasformazione complessiva è costituita da due fasi successive: il raffreddamento dell'acqua fino al punto di congelamento e la successiva formazione del ghiaccio. Introduciamo per comodità un punto di equilibrio intermedio X, che corrisponde all'istante in cui l'acqua inizia a congelare a $T_X = 273.15$ K. Durante la trasformazione reversibile B–X possiamo esprimere l'eguaglianza tra il calore ceduto dall'acqua al gas e quello assorbito dal gas in forma differenziale in questo modo:

$$nc_V dT + PdV = -mc_s^l dT,$$

ovvero

$$nc_V dT + \frac{nRT}{V} dV = -mc_s^l dT,$$

dove dT è la variazione infinitesima di temperatura del gas e dell'acqua, all'equilibrio termico tra loro. Segue che:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{mc_s^l + nc_V}{nR}\frac{dT}{T} = -\beta\frac{dT}{T} \ ,$$

avendo chiamato

$$\beta = \frac{mc_s^l + nc_V}{nR} = \frac{mc_s^l}{nR} + \frac{3}{2} \simeq 5 \ .$$

Se integriamo lungo la trasformazione B–X abbiamo

$$\ln\frac{V_X}{V_B} = -\beta \ \ln\frac{T_X}{T_B}.$$

ovvero

$$V_X = V_B \left(\frac{T_B}{T_X}\right)^\beta = 0.37 \text{ m}^3 \ .$$

Consideriamo ora la trasformazione X–C in cui l'acqua sta solidificando a temperatura costante. Il gas compie una trasformazione isoterma, essendo a contatto con l'acqua in coesistenza di fase alla temperatura T_X. L'equazione dello scambio termico ora risulta:

$$\frac{m}{2}\lambda_f = nRT_X \ln\frac{V_C}{V_X},$$

dove al primo membro abbiamo considerato che metà della massa d'acqua deve solidificare. Esponenziando questa relazione e usando la precedente per V_X, otteniamo

$$\boxed{V_C = V_X \exp\left(\frac{m\lambda_f}{2nRT_X}\right) = V_B \left(\frac{T_B}{T_X}\right)^\beta \exp\left(\frac{m\lambda_f}{2nRT_X}\right) = 0.61 \text{ m}^3} \,. \quad (4)$$

Infine, tenendo conto che

$$\boxed{T_C = T_X = 273.15 \text{ K}} \,,$$

possiamo calcolare anche la pressione:

$$\boxed{P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 5.3 \times 10^4 \text{ Pa}} \,.$$

In alternativa possiamo sfruttare il fatto che la trasformazione avviene in modo reversibile, ovvero senza variazioni dell'entropia dell'universo. Scriviamo quindi la variazione dell'entropia dell'universo come la somma dei contributi del gas e dell'acqua:

$$0 = \Delta S_{\text{BC}}^{\text{univ}} = \Delta S_{\text{BC}}^{\text{gas}} + \Delta S_{\text{BC}}^{\text{H}_2\text{O}} \,,$$

dove abbiamo

$$\Delta S_{\text{BC}}^{\text{gas}} = nc_V \ln\frac{T_C}{T_B} + nR \ln\frac{V_C}{V_B}$$

e

$$\Delta S_{\text{BC}}^{\text{H}_2\text{O}} = mc_s^l \ln\frac{T_C}{T_B} - \frac{m\lambda_f}{2T_C} \,.$$

Sostituendo queste due espressioni nella prima, e ricordando che $T_X = T_C$, dopo qualche passaggio si ottiene la stessa espressione riportata in (4).

d)

Il calore scambiato dal gas in B–C è uguale ed opposto a quello scambiato dall'acqua, quindi:

$$\boxed{Q_{\text{BC}}^{\text{gas}} = -Q_{\text{BC}}^{\text{H}_2\text{O}} = mc_s^l(T_B - T_C) + \frac{m}{2}\lambda_f = 21.5 \text{ kJ}} \,.$$

Per il lavoro compiuto dal gas sfruttiamo il primo principio:

$$\boxed{W_{\text{BC}}^{\text{gas}} = Q_{\text{BC}}^{\text{gas}} - \Delta U_{\text{BC}}^{\text{gas}} = Q_{\text{BC}}^{\text{gas}} + nc_V(T_B - T_C) = 23.6 \text{ kJ}} \,.$$