Fisica Generale I
A.A. 2015-2016, 15 gennaio 2016

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Consideriamo il sistema descritto in Fig.1. Una particella di massa $m = 100$ g viene lanciata lungo un piano orizzontale da una molla di costante elastica $k = 2.5 \times 10^3$ N/m, inizialmente compressa di una lunghezza $\Delta x = 1.2$ cm rispetto alla sua lunghezza a riposo. La particella scivola sul piano per una distanza $d = 40$ cm soggetta ad attrito radente con coefficiente d'attrito dinamico $\mu = 0.2$. Dove il piano termina la particella colpisce una paletta rigida di massa $M = 800$ g, vincolata nel punto O attorno a cui può ruotare liberamente. La distanza del centro di massa della paletta dal punto O è $D = 16$ cm e il momento d'inerzia per rotazioni della paletta rispetto ad O vale $I = 0.022$ kg m^2. L'urto avviene sotto il CM della paletta, a distanza $a = 2$ cm da quest'ultimo, quando la paletta è ferma in posizione verticale.

a) Calcolare l'energia meccanica E_0 e la velocità v_0 della particella immediatamente prima dell'urto.
b) L'urto sia elastico, e sia $b = D + a$. Calcolare la velocità della particella v e la velocità angolare della paletta ω immediatamente dopo l'urto.
c) La particella riesce a tornare indietro fino alla molla?
d) Calcolando l'energia cinetica della paletta E_{pal} dopo l'urto e confrontandola con l'energia E_{max} che sarebbe necessaria a fargli fare un giro completo attorno ad O, si verifichi che vale l'approssimazione di piccoli angoli. Si calcoli il tempo Δt che passa tra l'urto e l'istante in cui la paletta ritorna in posizione verticale.
e) Se l'urto fosse perfettamente anelastico, con la particella che rimane attaccata alla paletta, quale sarebbe la velocità angolare ω' dopo l'urto?
f) Nell'ipotesi in cui la paletta sia costituita da un disco omogeneo di raggio R sospeso al punto O tramite un manico, complanare al disco, sottile e di massa trascurabile, quanto vale R? [si ricordi che il momento d'inerzia di un disco per rotazioni attorno ad un suo diametro vale $(1/4)MR^2$]

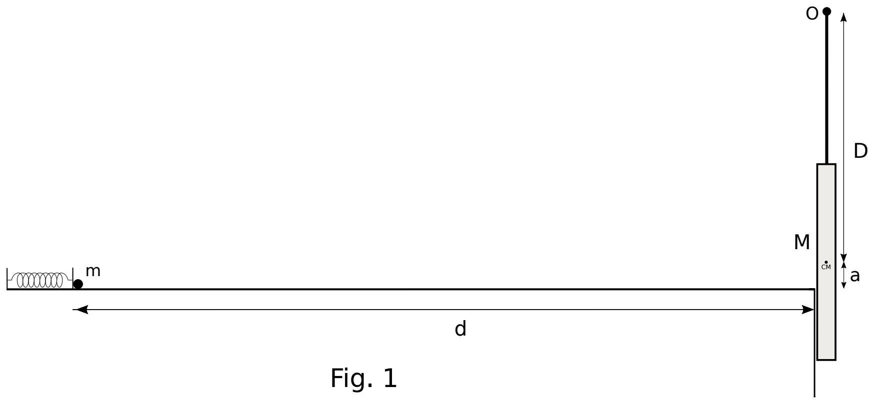


Fig. 1

Esercizio I.2

Un cannoncino è in grado di sparare un proiettile di massa $m = 30$ kg, ad un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzonte e con velocità $v_0 = 15$ m/s, relativa al cannoncino stesso. Il cannoncino è fissato ad un carrello, a sua volta appoggiato su un binario rettilineo orizzontale. La massa del carrello con il cannoncino è $M = 400$ kg. Inizialmente il carrello sia fermo.

a) Determinare la gittata d_0 del proiettile nel caso in cui il carrello sia bloccato al binario e non possa muoversi.
b) Determinare la gittata d_1, rispetto al cannoncino, nel caso in cui il carrello sia libero di muoversi sul binario senza attrito; calcolare la velocità v_1 del carrello dopo lo sparo.
c) Supponiamo che un motore tenga il carrello in accelerazione a_{car} costante lungo il binario, in verso concorde allo sparo. Il cannoncino spara e un osservatore solidale al carrello misura una gittata $d' = 9.95$ m. Determinare il valore dell'accelerazione a_{car}.
d) Si disegnino qualitativamente le traiettorie del proiettile viste dal sistema di riferimento solidale al carrello, nei casi in cui il carrello sia accelerato con accelerazione $a = na_{\text{car}}$, dove a_{car} è l'accelerazione trovata al punto precedente e $n = 0, 1, 2$.
e) Il Re dell'asteroide 325 si compra il carrello con il cannoncino e il proiettile, lo porta sul suo asteroide, lo fissa al suolo e spara. Se il raggio dell'asteroide è 5 km e la sua densità media è 6 ton/m^3, dimostrare che il proiettile non ricade al suolo.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Un recipiente contiene n moli di un gas perfetto biatomico. Il gas si trova inizialmente all'equilibrio a temperatura $T_i = 20\ °\mathrm{C}$, pressione $P = 4{\times}10^5$ Pa e volume $V_i = 300$ litri. Tramite un pistone mobile, si compie una trasformazione isobara reversibile che aumenta il volume di 50 litri.

a) Calcolare il numero di moli n, la temperatura finale T_1, il lavoro compiuto dal gas W, la variazione di energia interna ΔU e il calore assorbito Q.
b) Al termine dell'espansione isobara, le pareti del contenitore vengono isolate termicamente dall'ambiente e gli unici scambi termici ammessi avvengono tra il gas e una massa = 500 g di ghiaccio posta sul fondo del recipiente. Il ghiaccio, che ha una temperatura iniziale $T_0 = -10\ °\mathrm{C}$, comincia lentamente a scaldarsi, mentre il gas è tenuto a pressione costante. Calcolare la temperatura T_2 del gas quando il ghiaccio è arrivato alla temperatura di fusione.
c) Il processo continua, sempre a pressione costante, fino a raggiungere l'equilibrio termico alla temperatura finale $T_f = 273.15$ K, con una parte Δm di ghiaccio sciolto e il resto ancora in fase solida. Calcolare Δm e il volume finale del gas V_f. [si usi il valore $c_{\mathrm{gh}} = 2090$ J/(kg K) per il calore specifico del ghiaccio e $\lambda = 333.5$ kJ/kg per il calore latente di fusione]
d) Calcolare la variazione di entropia del gas, del ghiaccio e dell'universo tra l'inizio e la fine dell'intero processo.

Esercizio II.2

Si considerino $n = 2$ moli di un gas ideale monoatomico, contenute in un recipiente di volume $V_A = 45$ l, alla pressione $P_A = 1$ atm. Il recipiente possiede un pistone che può muoversi liberamente e senza attrito lungo una guida, di modo che il gas si trovi sempre alla stessa pressione. Inizialmente il sistema è all'equilibrio.
A un certo punto il gas viene riscaldato in modo reversibile fino alla temperatura $T_B = 353.15$ K. Il pistone viene quindi bloccato e il gas è raffreddato in maniera quasistatica fino ad una temperatura T_C. A questo punto il pistone viene spostato in modo tale da riportare il gas nelle condizioni iniziali con una trasformazione isoterma reversibile.

a) Disegnare il ciclo nel diagramma PV, calcolando i valori delle coordinate termodinamiche dei punti di equilibrio A, B e C.
b) Calcolare il rendimento η del ciclo.
c) Cosa succederebbe, se la trasformazione isocora fosse effettuata mettendo improvvisamente il gas a contatto con un termostato a temperatura T_A? Quale sarebbe il nuovo rendimento η'?

d) Calcolare la variazione di entropia dell'universo ΔS_{univ} nel ciclo, se la trasformazione isocora è irreversibile come nel punto precedente.

e) Consideriamo un nuovo ciclo che abbia le stesse trasfomazioni AB e BC del precedente, ma che poi prosegua fino ad A con una compressione isobara CD e un riscaldamento isocoro DA; entrambe le trasformazioni siano reversibili. Calcolare il rendimento η''.

Soluzione esercizio I.1

a)
L'energia iniziale della particella è $E = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 0.18$ J. Prima di arrivare alla paletta, parte di questa energia viene dissipata dalla forza d'attrito, che è costante e compie un lavoro pari a $E_{\rm diss} = F_{\rm att}d = \mu mgd = 0.0784$ J. Dunque, la particella arriva all'urto con energia cinetica

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 - \mu mgd = 0.1016 \text{ J}} \tag{1}$$

e con velocità

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = 1.425 \text{ m/s}}\,. \tag{2}$$

b)
Per determinare le velocità della particella e della paletta dopo l'urto basta imporre la conservazione dell'energia cinetica (l'urto è elastico) e del momento angolare rispetto al polo O (l'unica forza esterna impulsiva agisce in O). Dunque, chiamate v e ω le due velocità da determinare, le equazioni da risolvere sono

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{3}$$
$$mv_0b = mvb + I\omega\,. \tag{4}$$

Dopo alcuni semplici passaggi algebrici si trovano le soluzioni

$$\boxed{v = v_0\frac{1-\frac{I}{mb^2}}{1+\frac{I}{mb^2}} = -1.059 \text{ m/s}} \tag{5}$$

e

$$\boxed{\omega = \frac{2v_0/b}{1+\frac{I}{mb^2}} = 2.03 \text{ rad/s}}\,. \tag{6}$$

c)
Dopo l'urto la particella torna indietro con velocità di 1.059 m/s, a cui corrisponde un'energia cinetica $E_{\rm part} = (1/2)mv^2 = 0.056$ J. Questa energia è minore di quella che verrebbe dissipata dalla forza di attrito radente per tornare fino alla molla che, come abbiamo visto al punto a), è dell'ordine di 0.08 J. Dunque la particella si arresta prima. In particolare, il percorso fatto all'indietro può essere calcolato imponendo che tutta l'energia $E_{\rm part}$ sia dissipata in un tratto x. Si ottiene $x = E_{\rm part}/(\mu mg) = 28.6$ cm.

d)

Dopo l'urto la paletta comincia a muoversi, con velocità angolare iniziale pari a 2.03 rad/s, a cui corrisponde un'energia $E_{\text{pal}} = (1/2)I\omega^2 = 0.0453$ J. L'energia che occorre fornire alla paletta per fare un giro completo è pari alla differenza di energia potenziale gravitazionale tra la posizione iniziale e quella in cui la paletta è in cima, dopo mezzo giro. La variazione di quota del CM tra le due posizioni è $2D$ a cui corrisponde l'energia potenziale massima del pendolo: $E_{\text{max}} = 2DMg = 2.51$ J. Si vede così che l'energia meccanica posseduta dal pendolo a causa dell'urto è molto minore di E_{max},

$$\boxed{\frac{E_{\text{pal}}}{E_{\text{max}}} = 0.018 \ll 1}, \tag{7}$$

in modo da garantire l'applicabilità dell'approssimazione di piccoli angoli. Il moto della paletta sarà dunque armonico, dal momento dell'urto fino al ritorno alla posizione verticale, per un tempo pari a metà periodo di oscillazione della paletta. Per un pendolo fisico che oscilla attorno ad un punto O a distanza D dal centro di massa, la pulsazione è $\Omega = \sqrt{MgD/I}$ e il periodo $T = 2\pi/\Omega$. Dunque si ottiene

$$\boxed{\Delta t = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 I}{MgD}} = 0.416 \text{ s}}. \tag{8}$$

e)

Se l'urto è perfettamente anelastico, si conserva solo il momento angolare e l'unica incognita è la velocità angolare ω' di rotazione del sistema paletta+particella dopo l'urto. L'equazione da risolvere è

$$mv_0 b = I'\omega' \tag{9}$$

dove $I' = mb^2 + I$ è il momento d'inerzia complessivo. Dunque si ha

$$\boxed{\omega' = \frac{mv_0 b}{mb^2 + I} = \frac{v_0/b}{1 + \frac{I}{mb^2}} = \frac{\omega}{2} = 1.015 \text{ rad/s}}, \tag{10}$$

cioè la metà di quella ottenuta nel caso di urto elastico.

f)

Dato che tutta la massa è concentrata nel disco, e che il disco compie oscillazioni attorno ad una asse parallelo a quello diametrale passante per il CM, il momento d'inerzia può essere calcolato usando il teorema di Steiner:

$$I = MD^2 + (1/4)MR^2 \tag{11}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{R = \sqrt{4\left(\frac{I}{M} - D^2\right)} = 0.0872 \text{ m} = 8.72 \text{ cm}}\,. \tag{12}$$

Soluzione esercizio I.2

a)
Se il carrello è vincolato al binario il moto del proiettile dopo lo sparo è l'usuale moto balistico descritto dalle equazioni

$$x = v_0 \cos(\alpha)\, t \tag{13}$$

$$y = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2\,. \tag{14}$$

Dalla seconda si ricava il tempo di volo $t_v = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ a cui il proiettile torna alla quota del vagone ($y = 0$). Inserendo il tempo di volo nella prima equazione si ottiene la gittata

$$\boxed{d_0 = x(t_v) = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = 19.9 \text{ m}} \tag{15}$$

b)
Nel caso in cui il vagone non sia vincolato al binario, ma libero di muoversi, dobbiamo considerarne il rinculo. Contrariamente al caso precedente, adesso non ci sono forze impulsive esterne lungo la direzione orizzontale durante lo sparo, e dunque si conserva la componente orizzontale della quantità di moto. Nel sistema di riferimento solidale con il binario, la conservazione della quantità di moto implica $mv'_{x0} + Mv_1 = 0$ dove v'_{x0} è la componente orizzontale della velocità del proiettile dopo lo sparo. Sappiamo inoltre che la velocità del proiettile relativa al cannoncino ha componente orizzontale $v_0 \cos\alpha$ e quindi $v'_{x0} - v_1 = v_0 \cos\alpha$. Queste due relazioni ci permettono di ricavare le velocità dei due corpi

$$v'_{x0} = \frac{M}{M+m} v_0 \cos\alpha = 12.08 \text{ m/s} \tag{16}$$

e

$$\boxed{v_1 = -\frac{m}{M+m} v_0 \cos\alpha = 0.906 \text{ m/s}}\,. \tag{17}$$

Si noti che nel limite di $M \longrightarrow \infty$, che corrisponde a vincolare il vagone al binario, si ottiene la soluzione del punto precedente, come ci si aspetta.

Dopo lo sparo il carrello si muove con velocità costante e il sistema di riferimento solidale con esso è inerziale. In questo sistema di riferimento il moto è balistico con velocità iniziale v_0, uguale al caso precedente, dato che, per definizione, v_0 è proprio la velocità relativa al carrello. Dunque la gittata, misurata rispetto al carrello, rimane la stessa di prima:

$$\boxed{d_1 = d_0 = 19.9 \text{ m}}, \tag{18}$$

mentre varierà invece la distanza orizzontale percorsa nel sistema di riferimento solidale col suolo, che sarà $v'_{x0} t_v = d_1 M/(M+m) = 18.5$ m. La differenza tra i due valori è lo spazio percorso dal carrello nel tempo di volo.

c)

Il sistema di riferimento solidale con il carrello non è più inerziale, ma è accelerato con accelerazione a_{car} in direzione orizzontale. In questo sistema di riferimento il moto del proiettile è soggetto anche alla forza apparente, che si aggiunge alla forza peso, e le leggi orarie diventano

$$x' = v_0 \cos\alpha t - \frac{1}{2} a_{\text{car}} t^2 \tag{19}$$

$$y' = y = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \,. \tag{20}$$

Il tempo di volo rimarrà lo stesso t_v dei punti precedenti, mentre la nuova gittata sarà

$$d' = x'(t_v) = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{a_{\text{car}}}{g}\tan\alpha\right) = d_0\left(1 - \frac{a_{\text{car}}}{g}\tan\alpha\right) \tag{21}$$

da cui si può ricavare l'accelerazione del vagone

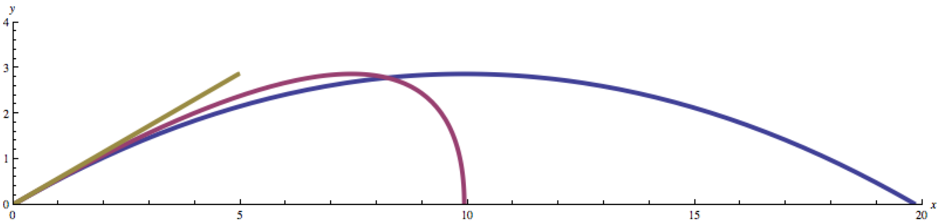
$$\boxed{a_{\text{car}} = \frac{g}{\tan\alpha}\left(1 - \frac{d'}{d_0}\right) = 8.5 \text{ m/s}^2}. \tag{22}$$

d)

Fissiamo l'origine degli assi sul cannoncino. Assumiamo come verso positivo dell'asse orizzontale quello per cui la componente orizzontale di $\mathbf{v}_0$ sia positiva. La coordinata verticale del proiettile segue la legge oraria $y = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$ indipendendemente dall'accelerazione di trascinamento a, dato che l'accelerazione di trascinamento è orizzontale e non entra nell'equazione del moto lungo y. Dunque il tempo di volo è lo stesso in tutti casi, così come la quota massima raggiunta $y_{\text{max}} = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g) = 2.87$ m.

Per il principio di equivalenza, data un'accelerazione a del carrello, tutto va come se il proiettile fosse soggetto ad una gravità efficace orientata ad un angolo β rispetto all'orizzonte, tale che $\tan\beta = g/a$, e con $g_{\text{eff}} = \sqrt{g^2 + a^2}$. In particolare, nei tre casi considerati dal problema abbiamo:

i) Se l'accelerazione del carrello è nulla, si ha $\beta = 90°$ e la traiettoria è una parabola con asse verticale e gittata $d_0 = 19.9$ m (linea blu).



ii) Se l'accelerazione è a_{car}, la traiettoria è una parabola ruotata in senso orario in modo che il suo asse di simmetria forma un angolo $\beta = \arctan(9.8/8.5) \simeq 49°$ rispetto all'orizzonte, avente le intersezioni con l'asse orizzontale nell'origine (dove la pendenza è sempre $\alpha = 30°$) e nel punto a distanza $d' = 9.95$ m dall'origine (linea rossa).

iii) Se l'accelerazione è $2a_{\mathrm{car}}$, si ha $\beta = \arctan(9.8/17) = 30°$ e dunque la direzione di lancio è parallela alla direzione di g_{eff}. Si tratta quindi di uno sparo "verticale" nel nuovo campo di gravità efficace. La traiettoria è un segmento rettilineo; il proiettile si allontana e poi torna nel cannoncino al tempo di volo. La quota massima raggiunta è sempre la stessa. La gittata è nulla, come si vede anche dall'equazione (21) (linea gialla).

e)

Osserviamo per prima cosa che il pianeta, per quanto piccolo, ha comunque una massa molto più grande del proiettile, dato che ha un diametro di diversi chilometri e una densità di diverse tonnellate al metro cubo. Dunque, è del tutto legittimo trascurare il moto del pianeta a seguito dello sparo e considerare il sistema di riferimento centrato nel CM del pianeta come un sistema inerziale.

Per sapere se il proiettile ricade sul pianeta basta confrontare la velocità iniziale con la velocità di fuga. Ricordiamo che la velocità di fuga concide con la velocità per cui l'energia meccanica del proiettile dopo lo sparo è nulla:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mm_p}{R} = 0 \tag{23}$$

ovvero

$$v_f = \sqrt{\frac{2Gm_p}{R}} \tag{24}$$

dove la massa del pianeta può essere scritta come $m_p = (4/3)\pi R^3 \rho$. Dunque

$$v_f = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho R^2} = 9.15 \text{ m/s} \tag{25}$$

dove abbiamo usato il valore $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2. Notiamo che la velocità di sparo $v_0 = 15$ m/s è maggiore della velocità di fuga e, dunque, il proiettile non tornerà più sul pianeta.

Soluzione esercizio II.1

a)
Prima di tutto ricordiamoci di convertire le temperature dalla scala Celsius alla scala Kelvin. Poi usiamo la legge dei gas perfetti nello stato iniziale per ottenere il numero di moli:

$$\boxed{n = \frac{PV_i}{RT_i} = 49.23} \tag{26}$$

Nella trasformazione isobara l'equazione di stato $PV = nRT$ implica che il rapporto T/V è costante. Dunque

$$\frac{T_1}{V_i + \Delta V} = \frac{T_i}{V_i} \tag{27}$$

da cui

$$\boxed{T_1 = T_i \frac{V_i + \Delta V}{V_i} = 342.01 \text{ K}}\,. \tag{28}$$

La variazione di temperatura è $\Delta T = 48.86$ K. Il lavoro eseguito dal gas è

$$\boxed{W = P\Delta V = 2 \times 10^4 \text{ J}}\,, \tag{29}$$

la variazione di energia interna è

$$\boxed{\Delta U = nc_v \Delta T = \frac{5}{2} nR\Delta T = \frac{5}{2} P\Delta V = \frac{5}{2} W = 5 \times 10^4 \text{ J}}\,, \tag{30}$$

e il calore assorbito dal gas

$$\boxed{Q = nc_p \Delta T = \frac{7}{2} nR\Delta T = \frac{7}{2} P\Delta V = \frac{7}{2} W = 7 \times 10^4 \text{ J}}\,, \tag{31}$$

e questi valori soddisfano il primo principio: $Q = \Delta U + W$.

b)
Per portarsi alla temperatura di fusione il ghiaccio deve scaldarsi di $\Delta T_{\text{gh}} = 10$ K e quindi gli serve una quantità di calore

$$Q = mc_{gh} \Delta T_{\text{gh}} = 1.045 \times 10^4 \text{ J}\,. \tag{32}$$

Tale calore è ceduto dal gas, che si comprime e si raffredda a pressione costante. Chiamata T_2 la temperatura del gas quando il ghiaccio è al punto di fusione (e supponendo che il processo sia sufficientemente lento da poter considerare uniforme la temperatura e la pressione locale del gas nel recipiente in ogni istante), la variazione di temperatura del gas è data dalla relazione

$$Q = nc_p |T_2 - T_1|\,, \tag{33}$$

da cui

$$\boxed{T_2 = T_1 - \frac{Q}{nc_p} = 334.7 \text{ K}}\,, \tag{34}$$

c)

Il raffreddamento del gas prosegue fino a che la sua temperatura raggiunge il valore $T_f = 273.15$ K, con la fusione di una quantità Δm di ghiaccio. Il calore scambiato tra il gas e il ghiaccio deve soddisfare la relazione

$$nc_p(T_2 - T_f) = \lambda \Delta m \tag{35}$$

da cui

$$\boxed{\Delta m = \frac{nc_p(T_2 - T_f)}{\lambda} = 0.264 \text{ kg}} \tag{36}$$

che è poco più di metà del ghiacco disponibile all'inizio.
Il volume finale del gas è determinabile dall'equazione di stato

$$\boxed{V_f = \frac{nRT_f}{P} = 279.5 \text{ l}} \tag{37}$$

d)

Considerando gli stati iniziali e finali del gas a seguito delle trasformazioni isobare precedenti, è possibile calcolare direttamente la variazione di entropia sull'intero processo come

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{\delta Q_{rev}}{T} = nc_p \ln(\frac{T_f}{T_i}) = -101.2 \text{ J/K}} \tag{38}$$

Per il ghiaccio vanno considerati i contributi di variazione di entropia nella fase di riscaldamento del ghiaccio e nella fase di parziale scioglimento, e il risultato è

$$\boxed{\Delta S_{\text{gh}} = mc_{\text{gh}} \ln \frac{T_f}{T_0} + \frac{\lambda \Delta m}{T_f} = 361.3 \text{ J/K}}\,. \tag{39}$$

Per l'universo dobbiamo ricordarci che la prima espansione isobara, avvenuta senza il ghiaccio e senza isolamento termico con l'ambiente, ha richiesto serbatoi di calore esterni che hanno ceduto calore al gas. Dato che, per ipotesi, quella trasformazione era reversibile, la variazione di entropia dell'ambiente deve essere uguale e opposta a quella del gas in quella stessa trasformazione, e dunque:

$$\Delta S_{\text{amb}} = -nc_p \ln(\frac{T_1}{T_i}) = -220.8 \text{ J/K}\,. \tag{40}$$

e la variazione di entropia dell'universo complessiva è

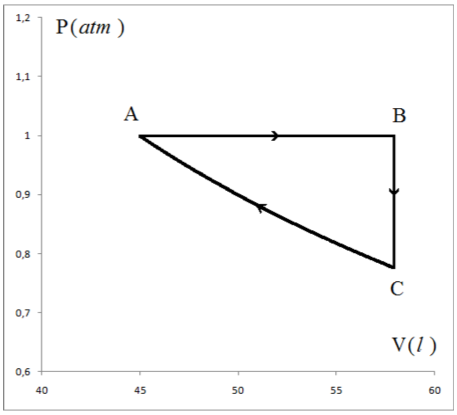
$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{gh}} + \Delta S_{\text{amb}} = 39.3 \text{ J/K}}\,, \tag{41}$$

ed è positiva, come era giusto attendersi. L'irreversibilità del processo sta tutta nella seconda fase, quando il gas e il ghiaccio sono a contatto a temperature diverse (irreversibilità termica) e quando il ghiaccio si fonde.

Soluzione esercizio II.2

a)

Il ciclo nel diagramma PV è rappresentato in figura:



Per calcolare P, V e T nei punti A, B e C usiamo la legge dei gas perfetti: $PV = nRT$. Calcoliamo per prime le condizioni iniziali. Poiché P_A e V_A sono noti (e ricordiamo che 1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa) resta da calcolare solo T_A:

$$\boxed{T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 274.15 \text{ K}}\,. \tag{42}$$

La temperatura T_B al termine della prima trasformazione è nota. La trasformazione è isobara e si ha dunque $P_B = P_A$; inoltre l'equazione di stato dice che V/T è costante e quindi

$$\boxed{V_B = \frac{T_B}{T_A} V_A = 58 \text{ l}}\,. \tag{43}$$

La seconda trasformazione avviene a volume costante, e quindi il rapporto P/T è costante. Ne segue che

$$\boxed{P_C = \frac{T_C}{T_B} P_B = \frac{T_A}{T_B} P_A = 0.776 \text{ atm}} \tag{44}$$

dove abbiamo usato il fatto che $T_C = T_A$, essendo A e C sulla stessa isoterma, e che $P_B = P_A$, essendo A e B sulla stessa isobara.

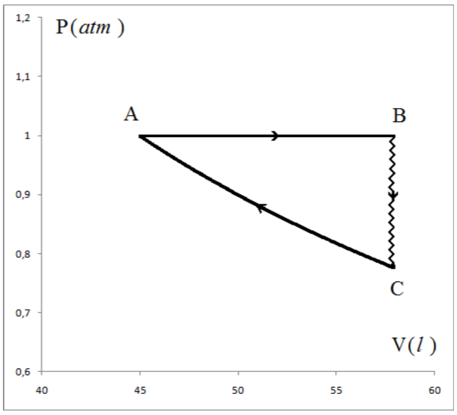
b)
Il rendimento del ciclo è definito come $\eta = W/Q_{ass} = 1 - |Q_{ced}|/Q_{ass}$. Nel nostro caso il gas assorbe calore nella prima trasformazione e ne cede nelle altre due. In particolare il calore scambiato nelle tre trasformazioni è

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nc_p(T_B - T_A) = 3284 \text{ J} && (45) \\ Q_{BC} &= nc_v(T_A - T_B) = -1970 \text{ J} && (46) \\ Q_{CA} &= nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = -1157 \text{ J} && (47) \\ & && (48) \end{aligned}$$

Quindi il rendimento risulta

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_{BC} + Q_{CA}|}{Q_{AB}} = 0.0478}. \tag{49}$$

c)



Nel caso in cui la trasformazione isocora avvenisse mettendo il gas a contatto termico con un solo termostato a temperatura T_A, tale trasformazione sarebbe irreversibile ma il calore assorbito dal gas sarebbe lo stesso di quello nel caso reversibile. Il lavoro compiuto infatti è nullo (trasformazione a volume costante) quindi dal primo principio, $Q = \Delta U$, e ΔU è lo stesso, dato che U è una funzione di stato. Dunque

$$\boxed{\eta' = \eta}. \tag{50}$$

d)
L'entropia dell'universo nel ciclo può essere calcolata come la somma delle

variazioni su ciascuna trasformazione che compone il ciclo stesso. D'altra parte, le due trasformazioni AB e CA sono reversibili e, dunque, la variazione di entropia dell'universo è nulla. Rimane dunque solo il contributo che viene dalla trasformazione isocora irreversibile BC. Si può dunque scrivere

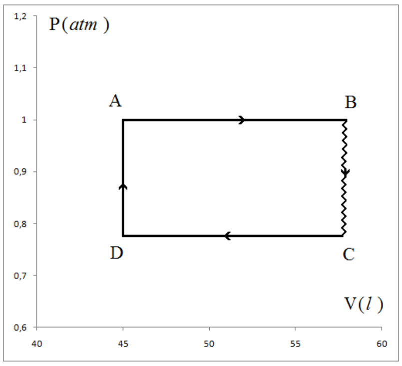
$$\Delta S_{\text{univ}} = (\Delta S_{\text{univ}})_{BC} = (\Delta S_{\text{gas}})_{BC} + (\Delta S_{\text{serb}})_{BC}\,, \tag{51}$$

da cui

$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}} = nc_v \ln \frac{T_A}{T_B} + \frac{|Q_{BC}|}{T_A} = (-6.316 + 7.186)\ \text{J/K} = 0.870\ \text{J/K}}\,. \tag{52}$$

e)

Sostituendo la trasformazione isoterma CA con una isobara CD e una isocora DA otteniamo il diagramma PV mostrato in figura.



Per determinare il rendimento η'' conviene stimare il lavoro totale compiuto dal sistema sul ciclo, essendo dato dall'area del rettangolo:

$$W = (P_A - P_C)(V_B - V_A) = 289.7\ \text{J} \tag{53}$$

Il calore assorbito dal gas nel ciclo, questa volta è $Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA}$ con $Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) = 1506$ J, dove abbiamo usato il valore di T_D che si ottiene dall'equazione di stato: $T_D = \frac{P_C V_A}{nR} = 213.8$ K. Infine Si ottiene il rendimento

$$\boxed{\eta'' = \frac{W}{Q_{ass}} = 0.06} \tag{54}$$