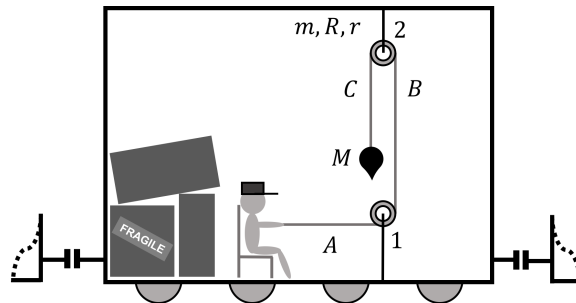


**Fisica Generale I**  
**A.A. 2016-2017, 11 gennaio 2017**

*Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso*

**Esercizio I.1**

Nel deposito merci di una stazione ferroviaria, all'interno di un vagone, un operaio sta mantenendo appesa una massa  $M=15$  kg per mezzo di un sistema di due carrucole identiche, come rappresentato in figura. Le carrucole hanno massa  $m=3$  kg, e sono formate da un cilindro cavo omogeneo di raggio esterno  $R = 10$  cm e raggio interno  $r = 6$  cm. La corda, di massa trascurabile, è arrotolata attorno ad esse più volte, in modo da non poter strisciare. I tre tratti di corda indicati da  $A$ ,  $B$  e  $C$  misurano rispettivamente  $l_A = 1.5$  m,  $l_B = 2$  m e  $l_C = 1$  m.



- a) A vagone fermo, si calcoli la forza che l'operaio deve imprimere alla corda per mantenere la massa  $M$  stazionaria. Si supponga invece che il treno fosse in accelerazione con accelerazione costante  $\vec{a}_t$  verso destra.
- b) Si descriva la nuova situazione di equilibrio e si calcoli nuovamente la forza che l'operaio deve imprimere alla corda per mantenere la massa  $M$  nella sua posizione.
- c) Supponendo che i binari non siano perfettamente regolari e che il sistema subisca una lieve perturbazione, nell'approssimazione in cui  $R$  sia molto minore della lunghezza di  $C$ , si calcoli il periodo di oscillazione per piccoli angoli  $\theta$  attorno alla posizione di equilibrio, e se ne disegni un grafico in funzione di  $a_t/g$ .  
 In un dato istante, a partire dalla configurazione di equilibrio, per un difetto di fabbricazione, la corda si spezza nell'estremo inferiore del tratto  $B$ .
- d) Si ricavi il momento d'inerzia  $I$  della carrucola rispetto al proprio asse di simmetria. Si calcoli l'accelerazione a cui è sottoposta la massa  $M$  nell'istante in cui la corda si spezza, nel caso specifico in cui  $a_t = \frac{3}{4}g$ .
- e) Se ne descriva la traiettoria rispetto ad un sistema di riferimento solidale al macchinista.

### Esercizio I.2

Un cilindro omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$  è inizialmente fermo su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Sia  $O$  il punto di contatto tra cilindro e piano ( $x = 0$ ). Lasciato libero di muoversi inizia a rotolare senza strisciare grazie all'attrito presente tra il piano inclinato e il cilindro. Il tratto con attrito ha una lunghezza  $L$ . Dopo tale tratto il piano inclinato è liscio per un altro tratto lungo  $L$ , terminato il quale torna ad essere scabro come nella prima parte.

- a) Determinare la velocità del centro di massa e l'energia cinetica del cilindro alla fine del primo tratto scabro ( $x = L$ ) e alla fine del tratto liscio ( $x = 2L$ ).
- b) Tracciare i grafici della velocità del centro di massa e della velocità angolare in funzione del tempo.
- c) Esprimere come varia nel tempo il momento angolare del cilindro rispetto al punto di contatto iniziale  $O$ .
- d) Che tipo di moto compie il cilindro dal momento in cui torna a contatto con il piano scabro? Si determini il coefficiente di attrito dinamico  $\mu_d$  tale per cui il centro di massa del cilindro si muova con la stessa accelerazione di quella che aveva nel primo tratto della discesa.
- e) Si supponga adesso che nel tratto liscio sia presente un cubo di massa  $3m$  tenuto in equilibrio da una molla compressa di costante elastica  $k$  disposta parallelamente al piano inclinato nella direzione  $x$ . Trascurando ogni forma di attrito tra cubo e piano inclinato, si determini la compressione massima della molla a seguito dell'urto tra cilindro e cubo in funzione della velocità  $v_{cil}$  con cui il cilindro urta sul cubo. Si consideri che in quest'urto anelastico l'energia cinetica di rotazione viene completamente dissipata, mentre quella di traslazione diventa  $7/12$  di quella iniziale.

### **Esercizio II.1**

Un recipiente a pareti adiabatiche dotato di un pistone mobile di massa trascurabile contiene 10 moli di gas ideale biatomico. Il pistone è soggetto dall'alto alla pressione esterna, mentre il gas è in equilibrio termico con una lastra di 200 grammi di ghiaccio posta sul fondo del recipiente e separata dal gas mediante una membrana fissa. La temperatura iniziale del ghiaccio è  $T_A = -5^\circ \text{C}$ .

Dal tempo  $t=0$  e sino al tempo  $t=t_B = 60 \text{ min}$ , al ghiaccio viene trasferito del calore a potenza  $\dot{Q} = X = 21 \text{ W}$ , costante nel tempo. Si supponga che il processo sia abbastanza lento da garantire l'equilibrio termico tra gas e ghiaccio.

- a) Determinare la temperatura del gas  $T(t)$  nel tempo e rappresentarla graficamente. Quale temperatura  $T_B$  raggiunge il gas al tempo  $t_B$ ?
- b) Calcolare il lavoro compiuto dal gas da  $t=0$  a  $t=t_B$ .
- c) Calcolare la variazione di entropia del gas e del blocco di ghiaccio.
- d) Ricalcolare  $T(t)$  nel caso in cui al blocco di ghiaccio venga fornito calore con potenza  $\dot{Q} = Yt$ , dove  $Y = 0.02 \text{ W/s}$ .

Costanti utili

-calore latente ghiaccio:  $\lambda = 3.335 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

-calore specifico acqua:  $c_a = 4186 \text{ J/kg/K}$

-calore specifico ghiaccio:  $c_g = c_a/2$

### **Esercizio II.2**

$n$  moli di gas monoatomico si trovano inizialmente a pressione  $P_0$  e volume  $V_0$ . Il gas viene lentamente scaldato in due fasi, prima mantenendo il volume costante e, quando la sua pressione è raddoppiata, tenendo quest'ultima costante. Successivamente il gas viene riportato nella condizione iniziale tramite una trasformazione isocora reversibile ed una isobara, anch'essa reversibile.

- a) Calcolare il lavoro compiuto e il calore assorbito dal gas in funzione del volume finale  $V$ , raggiunto alla fine della fase di riscaldamento.
- b) Determinare il rendimento della macchina termica realizzata in funzione di  $V$ . Qual è il massimo rendimento ottenibile con questa macchina?
- c) Come varierebbero le grandezze richieste nei punti precedenti se il gas fosse biatomico? Converrebbe quindi utilizzare un gas mono o biatomico ai fini energetici?
- d) Determinare di quanto varia l'entropia del gas durante la fase di riscaldamento nel caso in cui  $P_0 = 1.3 \text{ atm}$ ,  $V_0 = 0.011 \text{ m}^3$ ,  $n = 1 \text{ mol}$  e il volume finale sia  $V = 0.013 \text{ m}^3$ .

**Facoltativo:** e) Si disegni il diagramma T-S del ciclo.

**Soluzione esercizio I.1**

a) La condizione di equilibrio per il problema prevede che su entrambe le carrucole la risultante dei momenti sia nulla, e che sulla massa la forza risultante sia nulla (Figura 1).

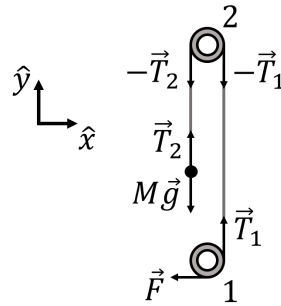


Figura 1

$$\text{momenti su 1: } -RF + RT_1 = 0 \Rightarrow F = T_1;$$

$$\text{momenti su 2: } -RT_2 + RT_1 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2;$$

$$\text{forze su } M: -Mg + T_2 = 0 \Rightarrow Mg = T_2.$$

Si avrà dunque che  $F = Mg = 147 \text{ N}$ .

b) Il vagone è in questo caso un sistema di riferimento non inerziale, e la massa  $M$  subisce una forza apparente  $-M\vec{a}_t$ . Il tratto di corda  $C$  nella sua posizione di equilibrio è dunque inclinato di un angolo  $\theta_{eq}$  rispetto alla verticale (Figura 2).

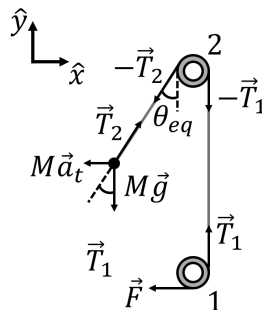


Figura 2

Le condizioni per l'equilibrio per le carrucole rimangono invariate, e quindi  $F = T_1 = T_2$ . La presenza di  $a_t$  impone però che, per l'equilibrio della massa  $M$ :

$$\begin{cases} \hat{x} : T_2 \sin(\theta_{eq}) + Ma = 0 \Rightarrow T_2 = -Ma / \sin(\theta_{eq}); \\ \hat{y} : T_2 \cos(\theta_{eq}) + Mg = 0 \Rightarrow T_2 = Mg / \cos(\theta_{eq}); \end{cases} \quad (1)$$

da cui:  $\theta_{eq} = \arctan(-a/g)$ .

Inoltre, per il teorema di Pitagora,  $T_2 = M\sqrt{a^2 + g^2}$  e quindi  $F = M\sqrt{a^2 + g^2}$ .

c) La situazione di equilibrio descritta al punto b) è equivalente a quella di un pendolo semplice sottoposto ad un'accelerazione di gravità efficace  $g' = g\sqrt{1 + a^2/g^2}$ . Se  $R \ll l_C$  è possibile supporre che il vincolo sia in un punto fisso, e che la lunghezza del pendolo sia costante e corrisponda a  $l_C$ .

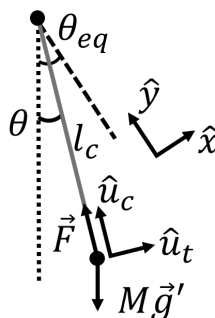


Figura 3

In questa situazione il periodo è dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_C}{g'}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_C}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/g^2}}. \quad (2)$$

Il periodo sarà quindi una funzione del tipo  $f(x) = (1 + x^2)^{-1/4}$ . Allora:

- $f(0) = 1$ ;
- $f'(0) = -\frac{1}{4} \frac{2x}{(1 + x^2)^{5/4}} \Big|_0 = 0$ ;
- $f''(0) = -\frac{1}{2} \frac{1 - 3/2x^2}{(1 + x^2)^{9/4}} \Big|_0 = -\frac{1}{2}$  concavità negativa;
- $f(\infty) \approx 1/\sqrt{x}$ .

È dunque possibile tracciare un grafico qualitativo del periodo in funzione di  $a/g$ :

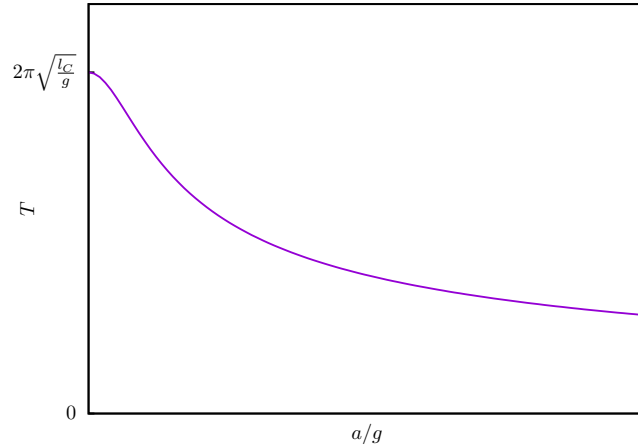


Figura 4

d) La corda si rompe nel tratto B, e quindi è coinvolta solamente la carrucola 2. Se ne calcola il momento di inerzia  $I$  rispetto al suo asse di simmetria. Supponendo che la carrucola sia un cilindro cavo di altezza  $h$  e densità uniforme  $\rho$ :

$$I = h \int_r^R dr r^2 \rho 2\pi r = h\rho 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_r^R \quad (3)$$

$$= h\rho \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4). \quad (4)$$

Poiché:

$$\rho = \frac{m}{V_{\text{cil}}} \quad \text{e} \quad V_{\text{cil}} = h\pi R^2 - h\pi r^2, \quad (5)$$

si ha che

$$I = \frac{m}{2} \frac{(R^4 - r^4)}{R^2 - r^2} = \frac{m}{2} \frac{(R^2 + r^2)(R^2 - r^2)}{(R^2 - r^2)}, \quad (6)$$

e cioè:

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = 0.02 \text{ kg m}^2}. \quad (7)$$

Si noti che lo stesso risultato può essere ottenuto sottraendo al momento di inerzia di un cilindro con densità  $\rho = m/h\pi(R^2 - r^2)$  e raggio  $R$ , quello di un cilindro con la stessa densità  $\rho$  e con raggio  $r$ :

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 h R^2 - \frac{1}{2} \rho \pi r^2 h r^2 = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2). \quad (8)$$

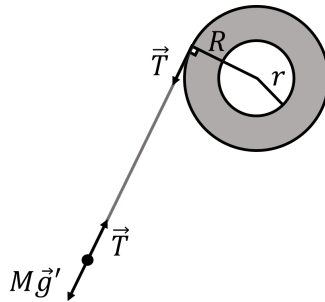


Figura 5

L'accelerazione subita dalla massa al tempo iniziate  $t_1$  sarà  $Ma_1 = Mg' - T$ , dove  $T$  è la tensione dovuta alla presenza della carrucola. Al fine di calcolarla si può usare l'equazione del moto per la rotazione della carrucola:

$$TR = I\alpha, \quad (9)$$

L'accelerazione angolare  $\alpha$  dipende a sua volta da  $a_1$  secondo la relazione  $R\alpha = a_1$ . Dunque:

$$a_1 = T \frac{R^2}{I} \Rightarrow T = I \frac{a_1}{R^2}. \quad (10)$$

Si avrà quindi che:

$$a_1 = \frac{g'}{1 + I/MR^2}. \quad (11)$$

E cioè:

$$a_1 = \frac{g'}{1 + \frac{1}{2} \frac{m}{M} (R^2 + r^2)} = 10.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (12)$$

Si noti che in generale  $a_1 < g' = 5/4g = 12.26 \text{ m/s}^2$ .

e) Nel sistema di riferimento non inerziale del macchinista, la massa proseguirà di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione costante data da  $a_1$ . Essa colpirà il povero macchinista nel caso in cui, trascurando le dimensioni delle carrucole, sia rispettata la condizione:

$$\frac{l_A}{l_B} = |\tan(\theta_{eq})| = |-a/g| \quad (13)$$

e dunque se

$$a_{\text{hit}} = g \frac{l_A}{l_B} = \frac{3}{4}g, \text{ che è proprio il caso preso in considerazione.}$$

### Soluzione esercizio I.2

a) Il cilindro parte da fermo e inizia a muoversi lungo il tratto inclinato con pendenza  $\alpha$ . Nel primo tratto di lunghezza  $L$  l'attrito statico fa sì che venga mantenuto un moto di rotolamento puro per cui  $R\ddot{\phi} = \ddot{x}$ , dove indichiamo con  $x$  la coordinata parallela al piano e rivolta verso il basso e con  $\phi$  l'angolo che identifica la rotazione del cilindro rispetto al proprio asse, crescente in senso orario.

La dinamica del cilindro, rispetto al proprio centro di massa, è descritta da

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{att} = mg(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) \quad (14)$$

$$I\ddot{\phi} = RF_{att} = R\mu_s mg \cos \alpha \quad (15)$$

quindi otteniamo l'accelerazione costante del centro di massa

$$a = \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2} = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (16)$$

da cui, grazie a (14) discende peraltro che  $\mu_s = \frac{1}{3} \tan \alpha$ .

Nel tempo velocità del centro di massa e velocità angolare aumentano linearmente

$$v(t) = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2} t = \frac{2}{3} g \sin \alpha t \quad (17)$$

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{g \sin \alpha}{R(1 + I/mR^2)} t = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{R} t \quad (18)$$

Il cilindro percorre il primo tratto scabro in un tempo  $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L(1+I/mR^2)}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{3L}{g \sin \alpha}}$  quindi, poiché  $I = mR^2/2$ , la velocità del centro di massa in  $L$  è

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Lg \sin \alpha}{1 + I/mR^2}} = \sqrt{\frac{4}{3} Lg \sin \alpha} \quad (19)$$

L'energia cinetica totale, in ogni istante è la somma di un termine di traslazione del centro di massa e uno di rotazione attorno al centro di massa ed è uguale alla diminuzione di energia potenziale

$$E_K = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{I}{mR^2} \right) v_1^2 = mLg \sin \alpha \quad (20)$$

Nel tratto successivo, tra  $L$  e  $2L$ , il cilindro continuerà ad accelerare verso il basso, con accelerazione  $\ddot{x} = g \sin \alpha$ , ma l'assenza dell'attrito farà sì che non ci saranno più momenti esterni applicati, quindi si conserverà il momento angolare attorno al centro di massa del cilindro. Le nuove velocità e velocità angolare saranno quindi

$$v(t) = v_1 + g \sin \alpha (t - t_1) \quad (21)$$

$$\omega(t) = \omega_1 \quad (22)$$



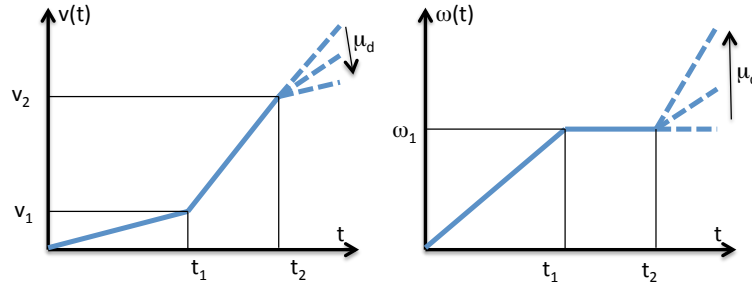
Per  $x = 2L$  la conservazione dell'energia meccanica ci dà

$$E_K = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 2mLg \sin \alpha \quad (23)$$

da cui possiamo ricavare facilmente

$$v_2 = \sqrt{4Lg \sin \alpha - \frac{I}{m}\omega_1^2} = \sqrt{2Lg \sin \alpha \left( \frac{2 + I/mR^2}{1 + I/mR^2} \right)} = \sqrt{\frac{10}{3}Lg \sin \alpha} \quad (24)$$

b)



c) Per il teorema di Steiner, il momento angolare del cilindro rispetto al punto di contatto iniziale col piano può essere scritto come somma di due termini, il momento angolare del centro di massa rispetto a tale punto e il momento angolare del cilindro rispetto al centro di massa. Nel primo tratto abbiamo

$$L(t) = mRv(t) + I\omega(t) = (1 + I/mR^2)mRv(t) = (mgR \sin \alpha)t \quad (25)$$

Nel secondo tratto abbiamo

$$L(t) = mR(v_1 + g \sin \alpha(t - t_1)) + Iv_1/R = (mgR \sin \alpha)t. \quad (26)$$

Vediamo che il momento angolare aumenta linearmente nel tempo, senza subire discontinuità in corrispondenza del cambio di attrito. Si noti che questo corrisponde ad avere un momento delle forze esterne costante rispetto al punto  $O$  (come si potrebbe facilmente dimostrare con un calcolo esplicito).

d) Quando il cilindro arriva in  $2L$  ha una velocità di traslazione che non è accordata con quella angolare per effettuare un moto di rotolamento puro.

Sta ruotando più lentamente di quanto dovrebbe a quella velocità di traslazione. Questo implica che il piano scabro applica una forza di attrito radente sul cilindro che genererà momento aumentando la velocità angolare. Il moto in questo tratto può essere descritto da

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_a \quad (27)$$

$$I\ddot{\phi} = F_a R \quad (28)$$

dove  $F_a = \mu_d mg \cos \alpha$ . L'accelerazione è quindi  $\ddot{x} = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$ . Per avere anche qui la stessa accelerazione che il cilindro aveva nel primo tratto scabro, occorre che

$$\frac{\sin \alpha}{1 + I/mR^2} = \sin \alpha - \mu_d \cos \alpha \quad (29)$$

che è soddisfatta se

$$\mu_d = \tan \alpha \left( \frac{I/mR^2}{1 + I/mR^2} \right) = \frac{1}{3} \tan \alpha. \quad (30)$$

e cioè il coefficiente di attrito dinamico nel terzo tratto deve essere uguale al coefficiente di attrito statico del primo tratto.

e) Durante l'urto si conserva la quantità di moto, l'energia cinetica di rotazione svanisce mentre quella di traslazione diventa 7/12 di quella iniziale

$$mv'_{\text{cil}} + 3mv_{\text{cubo}} = mv_{\text{cil}} \quad (31)$$

$$\frac{1}{2}I\omega_{\text{cil}}'^2 = 0 \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{cil}}'^2 + \frac{3}{2}mv_{\text{cubo}}^2 = \frac{7}{12} \frac{1}{2}mv_{\text{cil}}^2 \quad (33)$$

Queste equazioni ci permettono di determinare le velocità dei due oggetti dopo l'urto

$$v'_{\text{cil}} = -\frac{1}{4}v_{\text{cil}}, \quad v_{\text{cubo}} = \frac{5}{12}v_{\text{cil}} \quad (34)$$

Subito dopo l'urto possiamo esprimere l'energia del cubo come

$$E_0 = \frac{3}{2}mv_{\text{cubo}}^2 - 3mg \sin \alpha x_0 + \frac{1}{2}kx_0^2. \quad (35)$$

Questo porta a scrivere l'energia nel punto di massima compressione come

$$E_f = -3mg \sin \alpha x_m + \frac{1}{2}kx_m^2. \quad (36)$$

La posizione di equilibrio in cui si trova il cubo a causa della molla è  $x_0 = \frac{3mg \sin \alpha}{k}$ . Sfruttando la conservazione dell'energia meccanica abbiamo che  $E_0 = E_f$ , e quindi

$$x_m = \frac{1}{k} \left( 3mg \sin \alpha + 5\sqrt{3km} \frac{v_{\text{cil}}}{12} \right) \quad (37)$$

### Soluzione esercizio II.1

a) Per ipotesi, è possibile considerare l'intero sistema (gas + ghiaccio) sempre all'equilibrio termico. Per determinare  $T(t)$  dividiamo il processo in tre fasi distinte:

I - il ghiaccio ed il gas si scaldano linearmente nel tempo da  $T_A$  a  $T_0 = 273.15$  K;

II - tutto il ghiaccio si scioglie e l'intero sistema rimane a temperatura costante  $T_0$ ;

III - il ghiaccio ed il gas si scaldano linearmente nel tempo da  $T_0$  a  $T_B$ .

Durante la fase I possiamo scrivere il calore assorbito dal sistema in un intervallo di tempo  $dt$  come

$$\delta Q_I = X dt = (nc_p + mc_g)dT \quad (38)$$

da cui, considerando le condizioni iniziali,

$$T(t) = T_A + \frac{X}{(nc_p + mc_g)}t. \quad (39)$$

Il tempo  $t_0$  impiegato per raggiungere l'inizio della fusione del ghiaccio risulta

$$\Delta t_I = t_0 = \frac{(T_0 - T_A)(nc_p + mc_g)}{X} = 169 \text{ s} \quad (40)$$

con un *rate* di riscaldamento  $\dot{T} = X/(nc_p + mc_g) = 30 \text{ mK/s}$ .

Nella fase II abbiamo una temperatura costante  $T = T_0$  e

$$\delta Q_{II} = X dt = \lambda dm. \quad (41)$$

Visto che il gas mantiene una temperatura costante, tutto il calore assorbito viene sfruttato per sciogliere il ghiaccio. Tale processo avrà una durata complessiva

$$\Delta t_{II} = (t_1 - t_0) = \frac{m\lambda}{X} = 3176 \text{ s}. \quad (42)$$

Terminata la fase II il sistema riprende ad aumentare la temperatura. Analogamente alla fase I avremo

$$\delta Q_{III} = X dt = (nc_p + mc_a)dT \quad (43)$$

da cui, considerando le condizioni iniziali,

$$T(t) = T_0 + \frac{X}{(nc_p + mc_a)}t. \quad (44)$$

Considerando la durata totale delle prime due fasi,  $t_1 = \Delta t_I + \Delta t_{II} = 3345 \text{ s}$ , la terza fase avrà una durata  $\Delta t_{III} = t_B - t_1 = 255 \text{ s}$ . Il rate di riscaldamento

nella fase III è  $\dot{T} = X/(nc_p + mc_a) = 19 \text{ mK/s}$  e la temperatura finale raggiunta dal sistema al tempo  $t_B$  è

$$\boxed{T_B = T_0 + \frac{X(t_B - t_1)}{(nc_p + mc_a)} = 277.85 \text{ K} = 4.7^\circ \text{ C.}} \quad (45)$$

b) La pressione del gas viene mantenuta costante grazie all'assenza di vincoli sul pistone superiore, quindi il lavoro compiuto dal gas dipende solo dalla variazione di volume, ovvero dalla variazione di temperatura

$$\boxed{W = P_{\text{atm}}(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) = 806.5 \text{ J}} \quad (46)$$

c) Calcoliamo separatamente la variazione di entropia del gas e del blocco di ghiaccio.

Nel caso del gas abbiamo che

$$\boxed{\Delta S_{\text{gas}} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_p}{T} dT = nc_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 10.34 \text{ J/K}} \quad (47)$$

Nel caso del ghiaccio abbiamo che

$$\Delta S_{\text{gh}} = \int_{T_A}^{T_0} \frac{mc_g}{T} dT + \int_{T_0}^{T_B} \frac{mc_a}{T} dT + \int \frac{\lambda}{T_0} dm \quad (48)$$

$$\boxed{\Delta S_{\text{gh}} = m\left(c_g \ln \frac{T_0}{T_A} + c_a \ln \frac{T_B}{T_0} + \frac{\lambda}{T_0}\right) = 266 \text{ J/K}} \quad (49)$$

d) Se la sorgente di calore ha una potenza che aumenta linearmente nel tempo tale che  $\dot{Q} = Yt$  con  $Y = 0.02 \text{ W/s}$ , le grandezze calcolate nei punti precedenti cambiano nel seguente modo

$$\delta Q_I = Yt dt = (nc_p + mc_g) dT \quad (50)$$

$$\delta Q_{II} = Yt dt = \lambda dm \quad (51)$$

$$\delta Q_{III} = Yt dt = (nc_p + mc_a) dT \quad (52)$$

da cui

$$T(t) = T_A + \frac{Y}{2(nc_p + mc_g)} t^2 \quad \text{per } t < t'_0 \quad (53)$$

$$T(t) = T_0 \quad \text{per } t'_0 < t < t'_1 \quad (54)$$

$$T(t) = T_0 + \frac{Y}{2(nc_p + mc_a)} (t - t_1)^2 \quad \text{per } t'_1 < t < t_B \quad (55)$$

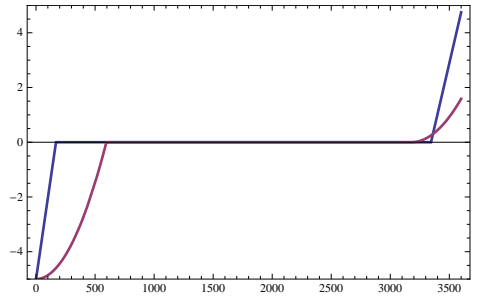


Figura 6: Andamento della temperatura del sistema nel tempo nel caso di potenza costante (blu) e in quello di potenza che aumenta linearmente nel tempo (viola).

Le singole fasi hanno una durata di

$$\Delta t'_I = \sqrt{\frac{(T_0 - T_A)2(nc_p + mc_g)}{Y}} = 595 \text{ s} \quad (56)$$

$$\Delta t'_{II} = \sqrt{\frac{2\lambda m}{Y}} = 2582 \text{ s} \quad (57)$$

$$\Delta t'_{III} = t_B - t_1 = 432 \text{ s} \quad (58)$$

La temperatura finale del sistema al tempo  $t_B$  risulta  $T'_B = 274.75 \text{ K} = 1.6^\circ \text{ C}$ .

### Soluzione esercizio II.2

a) Iniziamo calcolando il lavoro compiuto ed il calore assorbito del gas nella prima trasformazione isocora che indichiamo con  $AB$ . Per quanto riguarda il lavoro avremo che, essendo nulla la variazione di volume, il lavoro compiuto dal gas sarà anch'esso nullo:

$$\boxed{W_{AB} = 0} \quad (59)$$

Il calore assorbito risulta invece

$$\boxed{Q_{AB} = nc_v(T_B - T_A) = \frac{c_v}{R}(2P_0V_0 - P_0V_0) = \frac{c_v P_0 V_0}{R} = \frac{3}{2}P_0V_0} \quad (60)$$

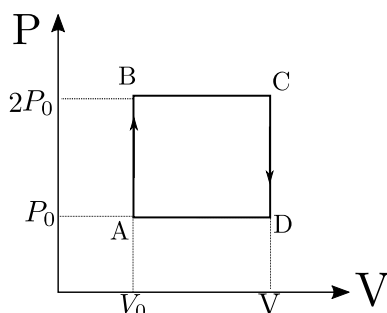
essendo la pressione finale il doppio di quella iniziale.

Durante la trasformazione isobara il gas compirà un lavoro pari a

$$\boxed{W_{BC} = 2P_0(V - V_0)} \quad (61)$$

mentre il calore assorbito durante la medesima trasformazione sarà dato da

$$\boxed{Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = \frac{c_p}{R}(2P_0V_0 - 2P_0V) = \frac{c_p 2P_0(V - V_0)}{R} = 5P_0(V - V_0)} \quad (62)$$



b) Il rendimento di un ciclo è  $\eta = W/Q_{\text{ass}}$ . Calcoliamo quindi il lavoro compiuto durante il ciclo che può essere facilmente calcolato considerando l'area racchiusa dall'intero ciclo in esame, ovvero:

$$\boxed{W_{\text{ciclo}} = P_0(V - V_0)} \quad (63)$$

A questo punto possiamo calcolare il rendimento come

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_{\text{ass}}} = \frac{W_{\text{ciclo}}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{R(\frac{V}{V_0} - 1)}{c_v - 2c_p + 2c_p \frac{V}{V_0}} = \frac{\frac{V}{V_0} - 1}{\frac{5V}{V_0} - \frac{7}{2}}} \quad (64)$$

Per calcolare il massimo rendimento possibile dobbiamo metterci nel limite di un volume finale che tende all'infinito:

$$\boxed{\eta_{\text{max}} = \lim_{V \rightarrow \infty} \eta = \frac{R}{2c_p} = \frac{1}{5}} \quad (65)$$

essendo  $c_p = \frac{5}{2}R$ .

c) Nel caso di un gas biatomico avremmo che i lavori rimangono invariati mentre i calori assorbiti durante la trasformazione isobara e quella isocora sarebbero maggiori in entrambi i casi, dovendo considerare i nuovi  $c_v$  e  $c_p$ . In particolare per la trasformazione isobara si avrebbe un aumento del 40%, mentre per quella isocora l'aumento sarebbe di circa il 66% e il rendimento massimo sarebbe  $\eta_{\text{max}}=1/7$ .

d) Per calcolare la variazione di entropia nella fase di riscaldamento dobbiamo conoscere le temperature raggiunte nelle prime fasi del ciclo che possono essere facilmente calcolate utilizzando la legge dei gas perfetti.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti ricaviamo

$$T_A = \frac{P_0 V_0}{nR} = 170 \text{ K}, \quad T_B = 340 \text{ K}, \quad T_C = 410 \text{ K}. \quad (66)$$

A questo punto siamo pronti per calcolare la variazione di entropia:

$$\Delta S = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_v}{T} dT + \int_{T_B}^{T_C} \frac{nc_p}{T} dT = nc_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nc_p \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = 12.5 \text{ J/K} \quad (67)$$

e) Per disegnare il diagramma T-S iniziamo trovando un'espressione che leghi direttamente la temperatura  $T$  alla variazione di entropia  $\Delta S$ . Nel caso della trasformazione isocora  $AB$  questa si può ottenere considerando che

$$nc_v \frac{dT}{T} = dS \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{nc_v} = \Delta S_{AB} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{nc_v} = e^{\Delta S_{AB}} \quad (68)$$

quindi

$$T_B = T_A e^{\Delta S_{AB}/nc_v} \quad (69)$$

e ricordando che in questo caso  $\Delta S_{AB}=8.6 \text{ J/K}$ . Per la trasformazione isobara avremo invece che

$$nc_p \frac{dT}{T} = dS \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{nc_p} = \Delta S_{BC} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{nc_p} = e^{\Delta S_{BC}} \quad (70)$$

da cui

$$T_C = T_B e^{\Delta S_{BC}/nc_p} \quad (71)$$

dove  $\Delta S_{BC}=3.9 \text{ J/K}$ .

Il ciclo si chiude con due esponenziali analoghi a quelli indicati sopra. L'area racchiusa nel ciclo  $T-S$  rappresentato corrisponde al calore assorbito nel ciclo.

