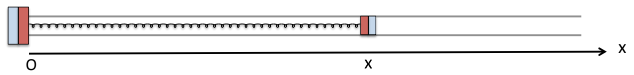
Fisica Generale I
A.A. 2017-2018, 8 febbraio 2018

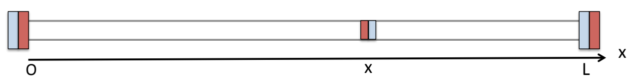
Esercizio I.1

Un piccolo magnete di massa $m = 50$ g è vincolato a muoversi lungo una guida unidimensionale orizzontale liscia, senza poter ruotare su sé stesso. All'estremo sinistro della guida è fissato un altro magnete. I due magneti hanno le loro polarità orientate in modo tale da respingersi con una forza $F_{\rm m} = A/x^4$, con $A = 10^{-5}{\rm Nm}^4$, essendo x la distanza tra l'estremo della guida e il magnete libero, preso come puntiforme. I due magneti sono collegati tramite una molla di costante elastica $k = 77$ N/m e lunghezza a riposo trascurabile.

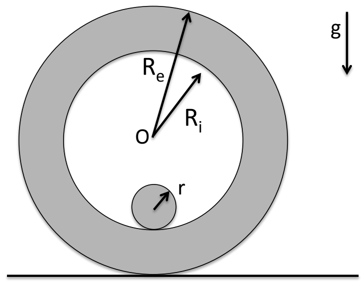


a) Determinare la posizione di equilibrio x_0 del magnete nella guida.
b) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale del magnete in funzione di x e calcolarne il valore $U(x_0)$. Rappresentare la funzione $U(x)$ in un grafico e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni del magnete attorno a x_0.
c) Determinare la quantità di moto massima raggiunta dal magnete nel caso parta da fermo in $x_1 = x_0 - \Delta x$, con $\Delta x = 10$ mm. Come cambia la quantità di moto massima nel caso in cui il magnete parta da fermo in $x_2 = x_0 + \Delta x$?
d) Supponendo che tra il magnete mobile e la superficie inferiore della guida ci sia attrito, quale dev'essere il minimo coefficiente d'attrito statico μ_s per poter mantenere il magnete in equilibrio in x_1?
e) Si rimuova la molla e si aggiunga invece, all'estremo destro della guida, un altro magnete fisso, identico a quello già presente all'estremo sinistro, con orientazione tale da respingere anch'esso il magnete centrale libero. La lunghezza della guida sia $L = 10$ cm. Disegnare il profilo dell'energia potenziale del magnete mobile in funzione di x; dimostrare che il nuovo punto di equilibrio x_0 coincide con il centro della guida.
f) Supponiamo che la guida ruoti con velocità angolare Ω attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Determinare il valore critico di Ω oltre il quale la posizione di equilibrio stabile del magnete non è più il centro della guida, e disegnare qualitativamente la funzione $U(x)$ per valori di Ω maggiori del valore critico.

Può essere utile ricordare che lo sviluppo in serie al secondo ordine di una funzione $f(x)$ attorno ad un punto stazionario x_0 è:
$f(x) \simeq f(x_0) + (1/2)(d^2f/dx^2)_{x_0}(x - x_0)^2$.



Esercizio I.2



Si consideri un cilindro di massa m e raggio r e un tubo circolare di massa M con raggio esterno R_e e raggio interno R_i, entrambi omogenei. Il tubo poggia su un piano orizzontale e il cilindro è collocato all'interno del tubo, come in figura. Tra tubo e piano, così come tra cilindro e tubo, è presente attrito che garantisce moti di rotolamento puro in entrambi i casi. Il tubo sta rotolando con velocità angolare Ω sul piano orizzontale e con velocità di traslazione v_0, mentre il cilindro ruota con velocità angolare ω (maggiore di Ω) attorno al proprio asse, rimanendo sulla verticale sotto il punto O.

a) Applicando con attenzione le condizioni di rotolamento puro di entrambi i corpi, determinare Ω e ω in funzione di v_0.

b) Determinare, sempre in funzione di v_0, l'energia cinetica complessiva rispetto ad un sistema di riferimento inerziale solidale al piano.

c) Come si muove il cilindro se osservato rispetto ad un sistema di riferimento, con origine in O e che ruota solidale al tubo? Determinare il momento angolare del cilindro rispetto al punto O nel sistema di riferimento in rotazione.

d) Nello stesso sistema di riferimento in rotazione, scrivere l'equazione del moto del centro di massa del cilindro, esplicitando anche le forze apparenti utilizzate.

e) Si torni nel sistema di riferimento del laboratorio, solidale al piano. Ad un certo istante, a causa di un ostacolo, il tubo viene improvvisamente fermato. La breve fase di arresto avviene in modo tale da mantenere valida la condizione di rotolamento puro tra cilindro e tubo. Che succede al cilindro? Quali grandezze si conservano? Qual è la velocità di traslazione del cilindro v' subito dopo l'arresto del tubo?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Un recipiente dotato di pistone mobile contiene una mole di un gas ideale. Il pistone viene spostato lentamente e senza scambi di calore, facendo espandere il gas da un volume iniziale $V_A = 10$ litri ad uno finale $V_B = \beta V_A$ con $\beta = 1.16$. Si osserva una variazione della temperatura da $T_A = 320$ K a $T_B = 289.9$ K.
a) Determinare le pressioni del gas negli stati iniziale e finale (P_A e P_B).
b) Determinare se il gas è monoatomico o biatomico.
c) Il gas viene poi riscaldato lentamente a pressione costante P_B fino a riportarlo alla temperatura che aveva nello stato A. Infine viene compresso lentamente con una trasformazione isoterma facendolo tornare nello stato iniziale A. Determinare il volume nello stato C e disegnare l'intero ciclo nel diagramma P-V.
d) Calcolare il lavoro compiuto dal gas nell'intero ciclo.
e) Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'universo lungo ciascuna delle tre trasformazioni AB, BC e CA.

Esercizio II.2

Un cilindro con pistone mobile e con pareti conduttrici di calore contiene tre moli di gas ideale biatomico. Il gas si trova inizialmente all'equilibrio alla temperatura $T_A = 375$ K e alla pressione $P_A = 10^5$ Pa. Il pistone è bloccato e il sistema viene messo in contatto termico con una miscela di acqua e ghiaccio (si usi la temperatura approssimata $T_B = 273$ K). Il gas raggiunge l'equilibrio termico con la miscela alla temperatura T_B mantenendo il volume costante. Successivamente il cilindro viene isolato termicamente e viene compiuta una compressione adiabatica reversibile fino ad uno stato di equilibrio C con pressione $P_C = P_A$. Il cilindro viene infine posto a contatto con una sorgente termica alla temperatura T_A che riporta il gas allo stato iniziale A con una trasformazione a pressione costante.
a) Calcolare le coordinate termodinamiche degli stati A, B e C del sistema.
b) Tracciare il diagramma P-V, indicando la reversibilità o meno delle singole trasformazioni.
c) Calcolare la massa di ghiaccio sciolta in un ciclo (si usi il calore latente di fusione del ghiaccio, $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg).
d) Calcolare il calore scambiato con la sorgente termica nell'espansione CA.
e) Determinare il rendimento del ciclo di tale macchina termica.
f) Calcolare la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

Soluzione esercizio I.1

a) Lungo l'asse orizzontale il magnete mobile è soggetto alla forza di richiamo elastica e alla forza repulsiva magnetica. La posizione di equilibrio si ha quando tali forze sono uguali ed opposte

$$F_{\text{mag}} + F_{\text{elast}} = \frac{A}{x^4} - kx = 0 \tag{1}$$

da cui

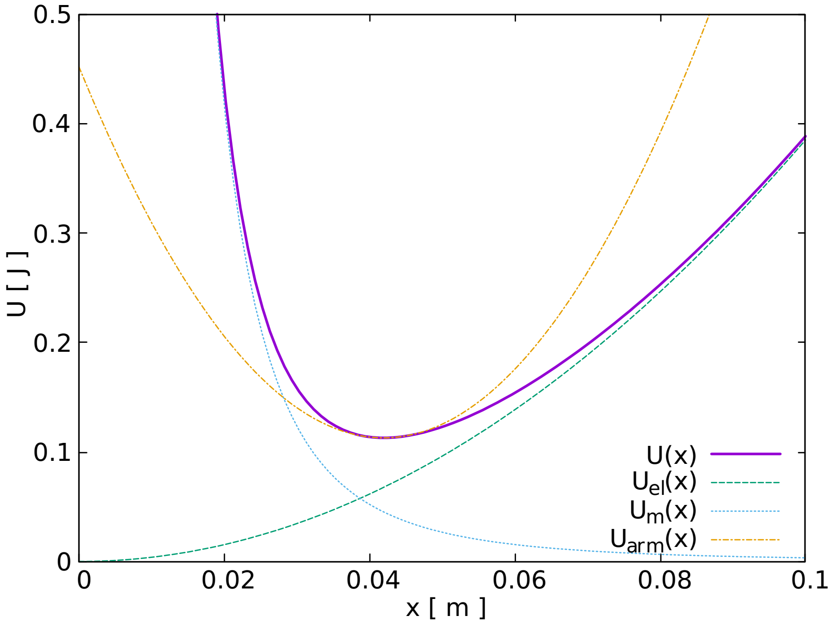
$$\boxed{x_0 = \left(\frac{A}{k}\right)^{\frac{1}{5}} = 42 \text{ mm}}. \tag{2}$$

b) L'energia potenziale del magnete associata alla forza elastica è $\frac{1}{2}kx^2$ mentre quella associata alla forza magnetica è $-\int_\infty^x \frac{A}{x'^4}dx' = \frac{A}{3x^3}$. L'energia potenziale totale è la somma delle due, dunque

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{A}{3x^3}} \tag{3}$$

Il minimo dell'energia potenziale si trova in x_0 e vale

$$\boxed{U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2\left(1 + \frac{2A}{3kx_0^5}\right) = \frac{5}{6}kx_0^2 = 0.113 \text{ J}} \tag{4}$$



Attorno a x_0 l'energia potenziale può essere approssimata a quella di un oscillatore armonico $U(x) \simeq \frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2$, con $\frac{d^2U}{dx^2}|_{x_0} = m\omega^2$. Quindi possiamo ottenere la frequenza per piccole oscillazioni attorno a x_0 come

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2U}{dx^2}\bigg|_{x_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{m}\left(k + \frac{4A}{x_0^5}\right)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5k}{m}} = 14 \text{ Hz}} \tag{5}$$

c) Avendo a che fare con sole forze conservative, l'energia meccanica si conserva. In x_1 abbiamo

$$E(x_1) = U(x_1) = \frac{1}{2}k(x_0 - \Delta x)^2 + \frac{A}{3(x_0 - \Delta x)^3} = 0.142 \text{ J} \tag{6}$$

mentre in x_0, dove il magnete raggiungerà il minimo di potenziale e il massimo di energia cinetica, abbiamo

$$E(x_0) = U(x_0) + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{A}{3x_0^3} + \frac{p^2}{2m} = U(x_0) + \frac{p^2}{2m} \tag{7}$$

da cui, imponendo $E(x_0) = E(x_1)$, si ottiene

$$\boxed{p = \sqrt{2m(U(x_1) - U(x_0))} = 0.054 \text{ kg m/s}} \tag{8}$$

Se il magnete partisse invece dalla parte opposta rispetto a x_0, raggiungerebbe una quantità di moto massima inferiore a causa dell'asimmetria del potenziale a cui è soggetto. In particolare avremo

$$E(x_2) = U(x_2) = \frac{1}{2}k(x_0 + \Delta x)^2 + \frac{A}{3(x_0 + \Delta x)^3} = 0.128 \text{ J} \tag{9}$$

e, analogamente,

$$\boxed{p' = \sqrt{2m(U(x_2) - U(x_0))} = 0.039 \text{ kg m/s}} \tag{10}$$

d) In presenza di attrito statico tra la guida e il magnete la condizione di equilibrio delle forze in x_1 risulta

$$F_{\text{mag}} + F_{\text{elast}} + F_{\text{attrito}} = \frac{A}{x_1^4} - kx_1 + F_{\text{attrito}} = 0 \tag{11}$$

da cui

$$F_{\text{attrito}} = -\left(\frac{A}{x_1^4} - kx_1\right). \tag{12}$$

Il modulo dell'attrito statico non può superare il valore $\mu_s mg$. Dunque

$$\mu_s mg \geq \left(\frac{A}{x_1^4} - kx_1\right). \tag{13}$$

e il coefficiente di attrito statico minimo per garantire l'equilibrio è

$$\boxed{\mu_s = \frac{1}{mg}\left(\frac{A}{x_1^4} - kx_1\right) = 14.4}\,. \tag{14}$$

Si tratta di un valore molto grande rispetto ai tipici valori di μ_s per superfici metalliche, o su vetro, o simili; è dunque improbabile che, in situazioni realistiche, il magnete possa rimanere fermo in x_1 per effetto del solo attrito.

e) In presenza di un magnete anche a destra, uguale a quello di sinistra, possiamo scrivere la forza complessiva a cui è soggetto il magnete mobile come

$$F_{\text{mag}} = \frac{A}{x^4} - \frac{A}{(x-L)^4} \tag{15}$$

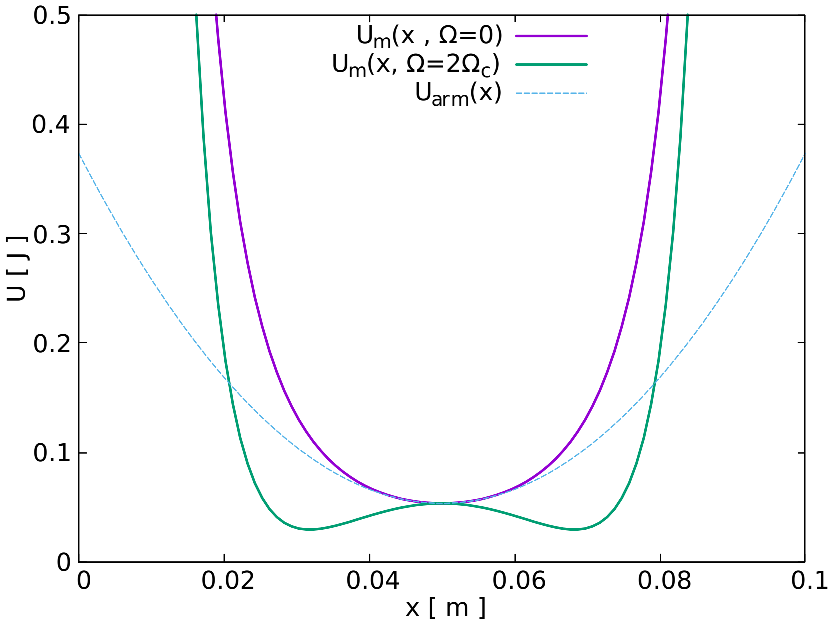
corrispondente all'energia potenziale

$$U(x) = \frac{A}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x-L)^3}\right)\,. \tag{16}$$

La posizione di equilibrio si ottiene annullando la forza. Si ottiene

$$\boxed{x_0 = \frac{L}{2}}\,. \tag{17}$$

L'energia potenziale è sempre positiva, diverge in corrispondenza dei magneti fissi ed è minima al centro della guida (vedi figura), dove appunto abbiamo la posizione di equilibrio stabile.



f) Se la guida ruota, allora va aggiunto alla funzione $U(x)$ precedente anche il termine di energia potenziale associata alla forza centrifuga, $U_c = -\frac{1}{2}m\Omega^2(x - L/2)^2$. Per rotazioni lente, questo produce una diminuzione della curvatura dell'energia potenziale intorno al minimo e, quindi, una diminuzione della frequenza delle piccole oscillazioni. Per rotazioni veloci il potenziale centrifugo, che tende ad allontanare il magnete dal punto centrale della guida, dominerà rispetto al termine magnetico, che invece lo trattiene al centro, e quindi si creeranno due minimi dell'energia potenziale simmetricamente a destra e a sinistra del centro della guida, rompendo la simmetria del sistema. Il valore critico Ω_c, in corrispondenza del quale si ha questa rottura di simmetria, si ottiene imponendo l'eguaglianza tra l'energia potenziale centrifuga e il termine quadratico nello sviluppo di $U(x)$ intorno a $x = L/2$. Ciò è equivalente ad eguagliare la velocità angolare della guida Ω alla pulsazione ω delle piccole oscillazioni attorno al minimo dell'energia potenziale magnetica. Come prima possiamo determinare la frequenza per piccole oscillazioni sviluppando in serie la funzione $U(x)$ al secondo ordine attorno a $x = 0$

$$U(x) \simeq \frac{16}{3}\frac{A}{L^3} + 128\frac{A}{L^5}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \tag{18}$$

e identificando il secondo termine come il termine $\frac{1}{2}m\omega^2(x - L/2)^2$ nell'energia di un oscillatore armonico, ricaviamo la frequenza

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{256A}{mL^5}} = 11.4 \text{ Hz}\,. \tag{19}$$

Dunque la velocità angolare critica oltre la quale la posizione stabile si sposta da $L/2$ è

$$\boxed{\Omega_c = \omega = 2\pi \times 11.4 \ \ \text{Hz} = 71.6 \text{ rad/s}} \tag{20}$$

Nel grafico è mostrato il profilo dell'energia potenziale nel caso di $\Omega = 2\Omega_c$.

Soluzione esercizio I.2

a) Data la condizione di rotolamento puro tra tubo e piano sappiamo che $v_0 = R_e\Omega$ quindi

$$\boxed{\Omega = \frac{v_0}{R_e}}\,. \tag{21}$$

Inoltre il cilindro interno si muove di rotolamento puro rispetto al tubo in movimento. Questo significa che il punto del cilindro che tocca il tubo deve muoversi istantaneamente alla stessa velocità del punto del tubo con cui è a contatto. Dato che i due centri di massa, del cilindro e del tubo traslano alla stessa velocità v_0, la condizione di rotolamento coincide con l'eguaglianza delle due velocità tangenziali di rotazione, rispettivamente $R_i\Omega$ per il tubo e $r\omega$ per il cilindro, e dunque

$$\boxed{\omega = \frac{R_i}{r}\Omega = \frac{R_i}{rR_e}v_0}. \tag{22}$$

b) Per determinare l'energia cinetica complessiva rispetto ad un sistema di riferimento inerziale solidale al piano, vanno considerati i contributi di traslazione del centro di massa e quelli della rotazione di entrambi gli oggetti. Per i termini di rotazione ci servono i momenti d'inerzia dei due corpi rispetto al proprio asse di simmetria. Quello del cilindro è $I_{\text{cil}} = \frac{1}{2}mr^2$. Quello del tubo può essere calcolato come il momento d'inerzia di un cilindro pieno di densità ρ, raggio R_e e altezza H, che vale $(1/2)\pi\rho H R_e^4$, da cui sottrarre quello di un cilindro di uguale densità ma raggio R_i, che vale $(1/2)\pi\rho H R_i^4$, per poi tener conto che la massa del tubo è $M = \pi\rho H(R_e^2 - R_i^2)$. In questo modo di ottiene $I_{\text{tubo}} = \frac{1}{2}M(R_e^2 + R_i^2)$. Possiamo quindi scrivere l'energia cinetica nella forma

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{tubo}}\Omega^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cil}}\omega^2 \tag{23}$$

e inserire le espressioni dei momenti d'inerzia per ottenere

$$\boxed{E_k = \frac{1}{4}\left[M\left(3 + \frac{R_i^2}{R_e^2}\right) + m\left(2 + \frac{R_i^2}{R_e^2}\right)\right]v_0^2}. \tag{24}$$

c) Un osservatore S' che si trova in O e ruota solidalmente al tubo, vedrà il centro di massa del cilindro descrivere una traiettoria circolare di raggio $(R_i - r)$ con velocità angolare costante Ω in senso antiorario. Inoltre vedrà che il cilindro ruota in senso orario attorno al proprio asse di simmetria. Per determinare la velocità angolare di rotazione ω' possiamo imporre che il punto di contatto sia istantaneamente fermo. La velocità di tale punto in S' è data dalla somma algebrica della velocità del CM del cilindro, $(R_i - r)\Omega$, e dalla velocità tangenziale, di segno opposto, di rotazione attorno al CM, $r\omega'$. Dunque

$$r\omega' - (R_i - r)\Omega = 0 \tag{25}$$

da cui

$$\omega' = \left(\frac{R_i}{r} - 1\right)\Omega = \omega - \Omega. \tag{26}$$

Il momento angolare del cilindro rispetto a questo sistema di riferimento è la somma del momento angolare orbitale associato al moto del CM attorno ad O e del momento angolare intrinseco di rotazione attorno al proprio asse (in verso opposto):

$$L = L_{\rm orb} + L_{\rm spin} = m(R_i - r)^2\Omega - I_{\rm cil}\omega' = m(R_i - r)^2\Omega - \frac{1}{2}mr^2\omega' \quad (27)$$

ovvero

$$\boxed{L = m(R_i - r)^2\Omega - \frac{1}{2}mr(R_i - r)\Omega = m(R_i - r)\left(R_i - \frac{3}{2}r\right)\Omega} \quad (28)$$

Si noti che per $r = R_i$ il momento angolare si annulla, come ci si può attendere visto che il cilindro dentro rimane incastrato nel tubo, senza potersi muovere, ma si annulla anche per $r = (2/3)R_i$ per compensazione dei momenti angolari nei due versi opposti.

d) Le forze reali che agiscono sul cilindro sono la forza peso, in modulo mg, e la reazione vincolare del tubo, in modulo N. Nel sistema di riferimento in rotazione con il tubo queste due forze ruoteranno assieme al cilindro rimanendo sempre dirette lungo l'asse passante per O e per il centro di massa del cilindro. Saranno inoltre uguali ed opposte, come si può dedurre dalla condizione di equilibrio nel sistema di riferimento inerziale, $N = mg$, che rimane tale anche nel sistema di riferimento in rotazione (le forze reali sono invarianti). In quest'ultimo però non dobbiamo dimenticare di aggiungere le forze apparenti, che sono la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Se consideriamo tutta la massa m del cilindro concentrata nel suo CM, che ruota a velocità $(R_i - r)\Omega$, l'equazione del moto per la traslazione del CM diventa

$$ma_{\rm CM} = F_{\rm centr} + F_{\rm cor} = m\Omega^2(R_i - r) - 2m\Omega^2(R_i - r) = -m\Omega^2(R_i - r) \quad (29)$$

dove abbiamo usato il fatto che, in questo caso, entrambe le forze sono radiali rispetto ad O, l'una repulsiva e l'altra (quella di Coriolis) attrattiva e di intensità doppia. Sommandole si ottiene una forza apparente che attrae il cilindro verso O producendo la giusta accelerazione centripeta che compete al moto circolare uniforme del CM. [Nota: dato che qui le forze apparenti non sono campi uniformi e dato che il cilindro è un corpo esteso, lo studente curioso potrebbe chiedersi se entrino in gioco forze mareali. Tuttavia, essendo il cilindro un corpo rigido, qualsiasi forza mareale agente sulle sue parti non avrebbe effetti concreti sul suo moto.]

e) Torniamo nel sistema di riferimento inerziale, solidale al piano. Osserviamo prima di tutto che, durante il moto a velocità di traslazione costante, rimangono costanti sia Ω che ω. Non c'è dunque alcuna accelerazione angolare nè sul tubo nè sul cilindro e, di conseguenza, non agisce nessuna forza nel punto di contatto nella direzione tangente. Se ve ne fosse, darebbe luogo ad accelerazioni. Invece, il cilindro interno si limita a ruotare per inerzia, almeno fino a che non venga modificato lo stato di moto del sistema. Questo è ciò che accade nell'istante in cui il tubo viene arrestato. Nelle ipotesi indicate nel testo del problema, la condizione di rotolamento puro continua a sussistere anche in presenza delle accelerazioni causate dall'ostacolo esterno. Ciò implica che nel punto di contatto tra cilindro e tubo deve agire una forza tangenziale intensa (impulsiva), ma non sufficientemente intensa da innescare lo scivolamento. La presenza di questa forza, che agisce sul cilindro, ha come diretta conseguenza la non conservazione della quantità di moto del cilindro stesso e anche la non conservazione del suo momento angolare. L'unica grandezza che si conserva è l'energia cinetica, dato che la forza agente nel punto di contatto non lavora (il punto di contatto è istantaneamente fermo). Quindi possiamo scrivere

$$E_{\text{prima}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cil}}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cil}}\omega_1^2 = E_{\text{dopo}}\,. \tag{30}$$

Imponendo la condizione di rotolamento puro per il moto dopo l'urto otteniamo $\omega_1 = v_1/r$ e quindi possiamo riscrivere la conservazione dell'energia meccanica nella forma

$$\frac{1}{2}mv_0^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_i^2}{R_e^2}\right) = \frac{3}{4}mv_1^2 \tag{31}$$

da cui ricaviamo la velocità del cilindro subito dopo l'urto:

$$\boxed{v_1 = v_0\sqrt{\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_i^2}{R_e^2}\right)} < v_0} \tag{32}$$

Soluzione esercizio II.1

a) Degli stati iniziali A e B sono dati esplicitamente le temperature e il volume V_A, mentre il volume V_B è uguale a $V_A\beta = 11.6$ l. Per entrambi gli stati, la pressione si ottiene direttamente tramite l'equazione di stato $PV = nRT$. I risultati sono

$$\boxed{P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.66 \times 10^5 \text{ Pa}}\,, \tag{33}$$

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 2.08 \times 10^5 \text{ Pa}}\,. \tag{34}$$

b) La trasformazione AB è adiabatica quasistatica, quindi

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma\,. \tag{35}$$

Riscrivendo V_B come βV_A, abbiamo

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_A^\gamma \beta^\gamma , \tag{36}$$

ovvero

$$\beta^\gamma = \frac{P_A}{P_B} = 1.28 \, , \tag{37}$$

in cui γ è ancora un'incognita. Conoscendo i valori di riferimento per i gas monoatomico e biatomico, $\gamma_{\text{mono}} = 5/3$ e $\gamma_{\text{bi}} = 7/5$, possiamo verificare quale dei due soddisfa l'equazione (37). Per un gas monoatomico avremmo

$$\beta^{\gamma_{\text{mono}}} = 1.28 \, , \tag{38}$$

mentre per un gas biatomico avremmo

$$\beta^{\gamma_{\text{bi}}} = 1.23 \, , \tag{39}$$

da cui si riconosce che $\underline{\text{il gas è monoatomico}}$.
Un metodo alternativo è quello di ricavare γ direttamente dall'equazione (37):

$$\gamma = \log_\beta \left(\frac{P_A}{P_B} \right) = 1.666 \, , \tag{40}$$

che corrisponde al valore di γ_{mono}.

c) La trasformazione BC è isobara, quindi $P_C = P_B$. La temperatura finale, raggiunta con tale trasformazione è quella che il gas aveva in A, quindi $T_C = T_A$. Il volume richiesto è dunque

$$\boxed{V_C = \frac{nRT_A}{P_B} = 12.8 \text{ litri}} \tag{41}$$

e il diagramma P-V dell'intero ciclo è riportato in figura.

d) Il lavoro compiuto dal gas sull'intero ciclo è dato da $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$.

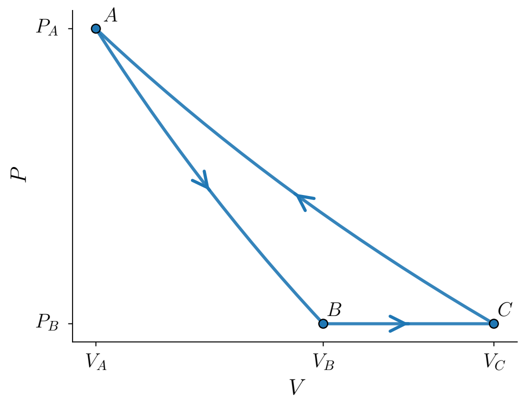
La trasformazione AB è adiabatica quindi $Q = 0$. Sfruttando il primo principio abbiamo

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v(T_B - T_A) = 375.4 \text{ J}. \tag{42}$$

Alternativamente lo si poteva determinare come

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} P dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{P_A V_A^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_A V_A^\gamma}{1-\gamma} \left(V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma} \right) \tag{43}$$

Notiamo che $W_{BC} = P_B(V_C - V_B) = 249.6$ J, essendo BC isobara.



Per la trasformazione CA il lavoro compiuto dal gas è

$$W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} PdV = -\int_{V_A}^{V_C} \frac{nRT_A}{V} dV = -nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A} = -656.8 \text{ J} \tag{44}$$

Sommando i tre contributi, troviamo

$$\boxed{W = nc_v(T_A - T_B) + P_B(V_C - V_B) - nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A} = -31.8 \text{ J}}. \tag{45}$$

e) La trasformazione AB è adiabatica reversibile, quindi la sua variazione di entropia è $\boxed{\Delta S_{AB} = 0}$.
Visto che l'entropia è una funzione di stato, su un ciclo la variazione è nulla, quindi la variazione di entropia che si ha nella trasformazione BC è uguale (e oppusta in segno) a quella che si ha lungo CA. Per la trasformazione isoterma CA, la variazione di entropia è

$$\boxed{\Delta S_{CA} = nR \ln \frac{V_A}{V_C} = -2.05 \text{ J/K}} \tag{46}$$

e quindi

$$\boxed{\Delta S_{BC} = 2.05 \text{ J/K}}. \tag{47}$$

La variazione di entropia dell'universo è zero per ciascuna delle tre trasformazioni, dato che sono tutte reversibili.

Soluzione esercizio II.2

a) Per lo stato A manca soltanto il volume, che calcoliamo con l'equazione di stato del gas ideale:

$$\boxed{V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 0.094 \text{ m}^3}. \tag{48}$$

Nella trasformazione AB il volume rimane costante: $V_B = V_A$. Quindi dobbiamo solo calcolare la pressione in B:

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 72800 \text{ Pa}}. \tag{49}$$

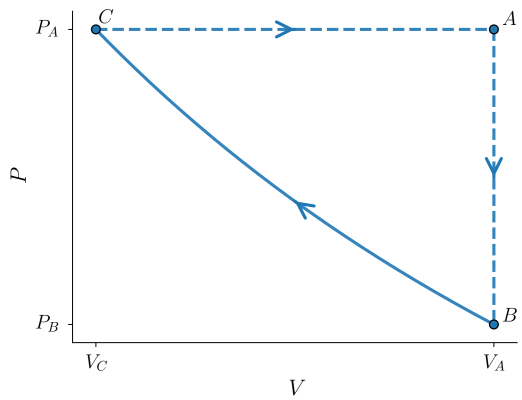
Lo stato C ha la stessa pressione di A ($P_C = P_A$), e per ottenere il volume usiamo il fatto che BC è adiabatica (con $\gamma = \frac{7}{5}$, per un gas biatomico):

$$\boxed{V_C = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{1/\gamma} V_A = 0.0746 \text{ m}^3}. \tag{50}$$

Noti P_C e V_C, la temperatura in C si ottiene tramite l'equazione di stato del gas ideale:

$$\boxed{T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 298.9 \text{ K}}. \tag{51}$$

b) Il diagramma P-V è mostrato in figura. La trasformazione isocora AB è irreversibile, perché il gas viene messo a contatto con una sorgente termica a temperatura significativamente diversa, e quindi compie una trasformazione non reversibile. Lo stesso vale per la trasformazione isobara CA. La trasformazione BC, invece, è adiabatica reversibile.



c) Il gas scambia calore con la miscela durante la trasformazione AB a volume costante, e il calore assorbito dal gas è $|Q_{AB}| = nc_v|T_B - T_A| = nc_v(T_A - T_B) = 6.36$ kJ (il calore specifico a volume costante vale $c_v = \frac{5}{2}R$ per un gas biatomico ideale). Quindi, conoscendo il calore latente di fusione del ghiaccio, la massa di ghiaccio che si scioglie è

$$\boxed{\Delta m_{\text{ghiaccio}} = \frac{|Q_{AB}|}{\lambda} = 19.3 \text{ g}} \tag{52}$$

d) La trasformazione CA è isobara, quindi abbiamo

$$\boxed{Q_{CA} = nc_p\,(T_A - T_C) = 6.64 \text{ kJ}} \tag{53}$$

in cui il calore specifico a volume costante vale $c_p = \frac{7}{2}R$ per un gas biatomico ideale.

e) Il rendimento di una macchina termica si può scrivere in due modi,

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}}, \qquad \eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{ass}}}, \tag{54}$$

dove la seconda espressione si ottiene applicando il primo principio all'intero ciclo ($W = Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}} = Q_{\text{ass}} - |Q_{\text{ced}}|$). Dai punti precedenti abbiamo già i dati i dati necessari al calcolo (calore assorbito e calore ceduto), ma per maggior completezza calcoliamo il rendimento tramite il lavoro, dalla prima espressione.

Nell'isocora AB il lavoro è nullo. Nell'adiabatica BC usiamo il primo principio:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_v\,(T_C - T_B) = -1.62 \text{ kJ}\,. \tag{55}$$

Per l'isobara CA, abbiamo che $W_{CA} = P_A\,(V_A - V_C) = 1.90$ kJ. Quindi il lavoro netto è $W = 281$ J. Il calore assorbito è stato calcolato al punto (d), quindi il rendimento è

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = 4\%}\,. \tag{56}$$

Il risultato è lo stesso che si ottiene con la formula dei calori $\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CA}}$.

f) Il gas compie un ciclo, dunque il suo stato finale corrisponde allo stato iniziale e l'entropia non varia. La variazione di entropia dell'universo è invece dovuta all'aumento di entropia delle sorgenti:

$$\boxed{\Delta S_{\text{univ}} = -\frac{Q_{AB}}{T_B} - \frac{Q_{\text{CA}}}{T_A} = 5.6 \text{ J/K}} \tag{57}$$

in cui abbiamo scritto il calore assorbito dalle sorgenti come il calore assorbito dal gas, cambiato di segno.