Fisica Generale I
A.A. 2018-2019, 11 luglio 2019

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Al centro di una saletta del Museo delle Scienze c'è una piattaforma circolare, posta orizzontalmente alla stessa altezza del pavimento, libera di ruotare senza attriti attorno al suo asse verticale passante per il centro O. La sua massa è $M = 200$ kg ed è distribuita uniformemente. Il suo raggio è $R = 2$ m. Una piccola maniglia sul bordo permette di metterla in rotazione o frenarla. Emma entra nella stanza, si avvicina alla piattaforma, inizialmente ferma, afferra la maniglia e inizia a spingere, applicando per un tempo $\Delta t = 20$ s una forza costante, tale da produrre una rotazione con velocità angolare finale $\omega_0 = 1$ rad/s.

a) Calcolare la forza media applicata, assumendo che sia esercitata tangenzialmente.

b) Emma sta guardando la piattaforma che ruota. Ad un certo istante spicca un salto in direzione radiale, balzando sulla piattaforma in prossimità del bordo e rimanendo lì in piedi. Calcolare la velocità angolare ω_1 della piattaforma dopo il salto sapendo che Emma pesa 25 kg.

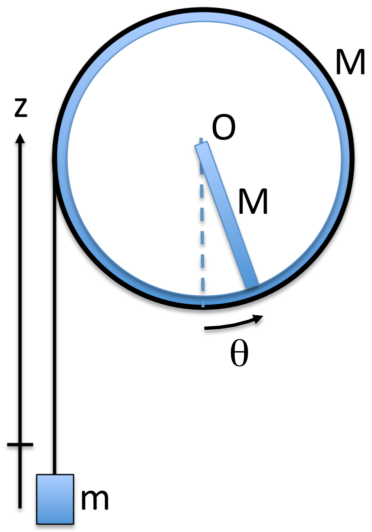
c) Calcolare la forza che la piattaforma esercita su Emma per mantenerla ferma rispetto ad essa. Se la forza orizzontale è puramente dovuta all'attrito statico tra la piattaforma e le scarpe, determinare il coefficiente di attrito minimo per garantire l'equilibrio.

d) Emma estrae dalla tasca una pallina legata ad un filo e la tiene in mano come un pendolo semplice, osservando l'inclinazione del filo rispetto alla verticale all'equilibrio. Determinare tale angolo.

e) Nella saletta del museo, a distanza $2R$ dal centro della piattaforma, è presente un cestino. Nell'istante in cui si trova tra l'asse di rotazione e il cestino, Emma lancia la pallina con un angolo di 45 gradi rispetto all'orizzontale, facendo canestro. Il bordo del cestino è alla stessa altezza delle mani di Emma al momento del lancio. Determinare con quale velocità v' Emma ha lanciato la pallina, relativamente a se stessa.

Esercizio I.2

Un anello metallico sottile di massa $M = 4$ kg e raggio $R = 50$ cm può ruotare liberamente in un piano verticale attorno al suo centro O essendo collegato ad O tramite un'asta metallica sottile e rigida, anch'essa di massa M e di lunghezza R, disposta radialmente.



a) Determinare il momento d'inerzia del sistema anello+asta rispetto al punto O.

b) Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

c) Attorno all'anello venga avvolta una corda inestensibile di massa trascurabile, con un corpo di massa $m = M/4$ appeso all'estremità libera. All'equilibrio, determinare l'angolo θ_0 di cui è ruotata l'asta a causa della presenza della massa m.

d) Riportare in grafico l'andamento dell'energia potenziale del sistema, inclusa la massa appesa, in funzione dell'angolo.

e) Scrivere l'equazione del moto del sistema anello+asta per piccole oscillazioni attorno all'angolo di equilibrio θ_0, e calcolare la frequenza di oscillazione; a questo scopo è utile ricordare la formula di prostaferesi $\sin\theta - \sin\theta_0 = 2\cos[(\theta+\theta_0)/2]\sin[(\theta-\theta_0)/2)]$.

f) Supponendo che la massa appesa parta da ferma quando l'asta è in posizione verticale, si descriva qualitativamente il moto successivo del sistema. Cosa succederebbe se la massa appesa fosse $m' = M/2$?

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1

Al centro di una saletta del Museo delle Scienze c'è una piattaforma circolare di massa $M = 200$ kg, disposta orizzontalmente. Anziché poggiare sul pavimento, la piattaforma è tenuta sospesa tramite un perno rigido verticale fissato al suo centro, la cui estremità inferiore è un pistone di area $S = 100$ cm^2. Il pistone può muoversi verticalmente in un recipiente cilindrico, di cui costituisce la parete superiore. Il recipiente contiene al suo interno $n = 0.5$ moli di Argon. La massa del perno e del pistone è trascurabile rispetto alla massa della piattaforma. La pressione atmosferica nella saletta rimane costante al valore $P_{\text{atm}} = 1.013 \times 10^5$ Pa. La temperatura della stanza viene regolata da un sistema automatico in modo da essere $t_1 = 23°$C durante il giorno, dalle 7 di mattina alle 20 di sera, e $t_2 = 15°$C durante la

notte, dalle 20 di sera alle 7 di mattina. Il recipiente con l'Argon ha pareti diatermiche e i cambi di temperatura, che avvengono nell'arco di pochi minuti, possono essere considerati lenti ai fini degli scambi termici con il gas. Emma è rimasta chiusa nel museo. Non trovando il modo di uscire, alle 2 di notte, esausta, decide di salire sulla piattaforma per dormire. Prima dell'apertura, alle 9 del mattino, viene svegliata dal guardiano ed esce. Emma è abbastanza lenta nel salire e nel scendere da poter considerare questi movimenti come quasistatici dal punto di vista della termodinamica dell'Argon. La massa di Emma sia $m = 70$ kg.
a) Identificare i quattro stati di equilibrio del gas durante la giornata, A, B, C e D, a partire da mezzanotte, e calcolare il volume occupato dal gas in ciascuno di essi. Quant'è lo spostamento verticale massimo della piattaforma?
b) Identificare il tipo di trasformazioni che avvengono tra i quattro stati di equilibrio e tracciare il diagramma P-V.
c) Calcolare il calore scambiato dal gas e il lavoro compiuto nelle singole trasformazioni e nel ciclo.
d) Determinare il rendimento del ciclo visto come una macchina termica. Ha senso confrontarlo con il rendimento di una macchina di Carnot ideale che opera tra due termostati a temperatura t_1 e t_2?

Esercizio II.2
Si consideri una teglia larga contenente una miscela formata per il 90% da acqua e per il restante 10% da ghiaccio, in equilibrio termico. La massa complessiva della miscela è $m = 5$ kg. Su di essa vengono versati cinque litri d'olio con temperatura iniziale $t_{\text{olio}} = 50°\text{C}$. La densità dell'olio è 0.92 g/cm^3 e il suo calore specifico $c_{\text{olio}} = 2$ J/g°C. Il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda_f = 3.335 \times 10^5$ J/kg e il calore specifico dell'acqua è $c_a = 4.186$ J/g°C. Si trascuri lo scambio termico con l'atmosfera.
a) Determinare lo stato finale di equilibrio del sistema.
b) Qual è il calore scambiato tra la miscela e l'olio?
c) Di quanto variano l'entropia della miscela e quella dell'olio?
d) Una volta raggiunto l'equilibrio viene fornito lentamente calore con una sorgente di potenza costante $P = 2$ kW per un tempo $\Delta t = 2$ minuti. Determinare la variazione di temperatura del sistema.

Soluzione esercizio I.1

a) Usiamo l'equazione del moto $I\alpha = \tau$ per la rotazione della piattaforma, con il momento d'inerzia $I = \frac{1}{2}MR^2$ e con il momento della forza $\tau = FR$. Sappiamo che l'accelerazione media è $\alpha_m = \Delta\omega/\Delta t = \omega_0/\Delta t$. Dunque la forza media applicata da Emma vale

$$\boxed{F_m = \frac{I\alpha_m}{R} = \frac{MR\omega_0}{2\Delta t} = 10 \text{ N}}. \tag{1}$$

b) Si tratta di un urto tra un corpo che trasla (di cui trascuriamo le dimensioni rispetto a quelle della piattaforma) e un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso. Dato che non ci sono momenti di forze esterne paralleli all'asse di rotazione, la componente verticale del momento angolare del sistema rispetto al vincolo in O deve conservarsi. Quindi le velocità angolari prima e dopo il salto sono legate dalla relazione

$$I\omega_0 = (I + mR^2)\omega_1 \tag{2}$$

dove m è la massa di Emma. Quindi

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 + mR^2/I} = \frac{\omega_0}{1 + 2m/M} = \frac{4}{5}\omega_0 = 0.8 \text{ rad/s}}. \tag{3}$$

c) La forza $\mathbf{F}_p$ esercitata dalla piattaforma su Emma per tenerla in quiete nel sistema in rotazione deve essere tale da equilibrare esattamente sia la forza peso verticale che la forza centrifuga radiale. Dunque, nella direzione radiale si avrà

$$\boxed{F_{p,r} = m\omega_1^2 R = 32 \text{ N}} \tag{4}$$

e nella direzione verticale

$$\boxed{F_{p,z} = mg = 245 \text{ N}}. \tag{5}$$

La componente orizzontale è limitata dalla condizione $F_{p,r} \leq \mu_s mg$, da cui si deduce la diseguaglianza

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{m\omega_1^2 R}{mg} = 0.13}. \tag{6}$$

d) Come su Emma, anche sul pendolino agiscono contemporaneamente la forza centrifuga e la forza peso, entrambe proporzionali alla massa del corpo appeso, e agenti in direzioni ortogonali. La loro somma è una forza che forma un angolo θ rispetto alla verticale tale che

$$\boxed{\theta = \mathrm{arctg}\frac{\omega_1^2 R}{g} = \mathrm{arctg}\frac{32}{245} = 0.13 \text{ rad} = 7.44^\circ}\,. \tag{7}$$

Anche Emma deve disporsi a quest'angolo se vuole stare in equilibrio in piedi (nota: se Emma cambia l'angolo anche ω cambia di un pochino, ma questo lo trascuriamo).

e) Si tratta di un problema di balistica. La traiettoria nel sistema di riferimento inerziale, dove agisce solo la forza peso (trascurando l'attrito con l'aria), è una parabola di cui conosciamo i punti di partenza e di arrivo. La parabola è contenuta nel piano verticale passante per O e per il punto in cui è presente il cestino. La gittata è R. Questo permette di determinare la velocità nel sistema inerziale, dato che la gittata è legata alle componenti orizzontali e verticali dalla relazione $R = 2v_x v_z/g$ e nel nostro caso, con il lancio a 45 gradi, le due componenti sono pure uguali: $v_x = v_z = \sqrt{gR/2}$. Il problema però chiede la velocità v' rispetto ad Emma, cioè nel sistema di riferimento in rotazione. Per trovarla basta considerare il fatto che Emma sta ruotando con velocità tangenziale $\omega_1 R$ rispetto al Museo e, dunque, se vuole che la pallina si muova radialmente nel Museo, deve aggiungere alle componenti $v'_x = v_x$ e $v'_z = v_z$ precedenti anche una componente tangenziale che annulli l'effetto del suo stesso moto: $v'_y = -\omega_1 R$. In modulo la velocità di lancio, vista da Emma, sarà dunque

$$\boxed{v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v_z)^2} = \sqrt{gR + \omega_1^2 R^2} = 4.71 \text{ m/s}}\,. \tag{8}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Il momento d'inerzia dell'oggetto appeso rispetto al punto O è dato dalla somma del momento d'inerzia dell'anello rispetto al centro e da quello di un'asta sottile rispetto al suo estremo

$$\boxed{I = MR^2 + \frac{1}{3}MR^2 = \frac{4}{3}MR^2 = 1.33 \text{ kg m}^2}\,. \tag{9}$$

b) Scriviamo l'equazione del moto per rotazioni attorno ad O. L'unica forza che esercita un momento non nullo rispetto a O è la forza peso dell'asta, applicata al punto medio. Dunque

$$I\ddot{\theta} = -Mg\frac{R}{2}\sin\theta \simeq -\frac{MgR}{2}\,\theta\,, \tag{10}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'approssimazione di piccole oscillazioni. Ne risulta

$$\ddot{\theta} = -\frac{MgR}{2I}\,\theta = -\frac{3g}{8R}\,\theta\,. \tag{11}$$

Si tratta di un'equazione armonica per un oscillatore avente pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{8R}} \tag{12}$$

e frequenza

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{8R}} = 0.43\ \mathrm{Hz}}\,. \tag{13}$$

c) Il sistema è in equilibrio quando la somma delle forze agenti sul corpo appeso e la somma dei momenti delle forze applicate al sistema anello+asta sono nulle. Se T è la tensione della corda, allora possiamo scrivere

$$0 = T - mg \tag{14}$$

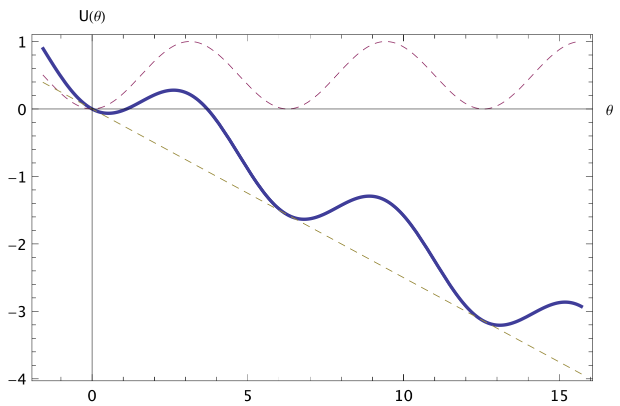
$$0 = TR - Mg\frac{R}{2}\sin\theta_0 \tag{15}$$

da cui $T = mg$ e

$$\sin\theta_0 = \frac{2m}{M} = \frac{1}{2}\,, \tag{16}$$

ovvero l'equilibrio si ha con un'inclinazione di

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}\,. \tag{17}$$



d) A meno di una costante additiva, l'energia potenziale del sistema complessivo è

$$U(\theta) = -mgR\theta + Mg\frac{R}{2}(1-\cos\theta)\,, \tag{18}$$

dato che la quota del corpo appeso è legata all'angolo di rotazione del disco dalla relazione geometrica $z = -R\theta$+costante. Conviene fare il grafico della funzione $u(\theta) = U(\theta)/(MgR)$, ricordando che $m = M/4$. La funzione è $u(\theta) = (1/2)(1 - \cos\theta) - \theta/4$. È una funzione che ha minimi locali in $\theta = \theta_0 \pm 2n\pi$ con $\theta_0 = \pi/6$, e massimi in $\theta = (5/6)\pi \pm 2n\pi$, con n intero, come in figura (nota: sull'asse orizzontale c'è l'angolo in radianti).

e) Ci sono due metodi per risolvere il quesito. Il primo consiste nell'approssimare l'energia potenziale $U(\theta)$ con una parabola attorno al minimo in θ_0. Dato che la derivata prima è nulla, possiamo scrivere

$$U(\theta) \simeq U(\theta_0) + \frac{1}{2}U''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 \tag{19}$$

con la derivata seconda calcolata esplicitamente dall'espressione (18):

$$U''(\theta_0) = \frac{MgR}{2}\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}MgR}{4}\,. \tag{20}$$

Dunque

$$U(\theta) \simeq U(\theta_0) + \frac{\sqrt{3}MgR}{8}(\theta - \theta_0)^2\,. \tag{21}$$

A questa possiamo aggiungere l'energia cinetica del sistema, tenendo conto che la velocità del corpo appeso la possiamo scrivere come $R\dot{\theta}$. L'energia meccanica, a meno di una costante additiva, diventa

$$E = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{3}MgR}{8}(\theta - \theta_0)^2 \tag{22}$$

e può essere riscritta così

$$E = \frac{1}{2}m'v^2 + \frac{1}{2}ks^2 \tag{23}$$

dove $s = R(\theta - \theta_0)$ è lo spostamento e $v = R\dot{\theta}$ la corrispondente velocità, con $m' = m[1 + I/(mR^2)]$ e $k = \sqrt{3}Mg/(4R)$. L'espressione trovata è formalmente analoga all'energia di una massa m' soggetta ad una forza elastica con costante k. La frequenza sarà dunque

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} \tag{24}$$

ovvero

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}Mg}{4Rm[1 + I/(mR^2)]}} \tag{25}$$

e, ricordando che $m = M/4$ e $I = (4/3)MR^2$, si ottiene infine

$$\boxed{f' = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{19R}} = f\sqrt{\frac{8\sqrt{3}}{19}} = 0.37\ \text{Hz}} \tag{26}$$

dove f è la frequenza già calcolata al punto b.

Il secondo metodo consiste nell'usare esplicitamente le equazioni del moto. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio di una piccola quantità, si osserverà un'oscillazione (di traslazione lungo la verticale per la massa m e di rotazione per anello+asta). Le equazioni che descrivono i due moti sono

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= T - mg && (27) \\ I\ddot{\theta} &= TR - Mg\frac{R}{2}\sin\theta && (28) \end{aligned}$$

con la condizione di rotolamento puro $\ddot{z} = -R\ddot{\theta}$. Dunque

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\theta} &= -TR + mgR && (29) \\ I\ddot{\theta} &= TR - Mg\frac{R}{2}\sin\theta && (30) \end{aligned}$$

da cui

$$\ddot{\theta} = -\frac{MgR}{2(I+mR^2)}\left(\sin\theta - \frac{2m}{M}\right) = -\frac{MgR}{2(I+mR^2)}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right). \quad (31)$$

Usando la formula di prostaferesi si ottiene la seguente espressione

$$\ddot{\theta} = -\frac{MgR}{I+mR^2}\cos[(\theta+\theta_0)/2]\sin[(\theta-\theta_0)/2], \quad (32)$$

che può essere approssimata, nel caso di piccole oscillazioni ($\theta \simeq \theta_0$), a

$$\ddot{\theta} = -\frac{MgR\cos\theta_0}{2(I+mR^2)}(\theta-\theta_0) = -\frac{\sqrt{3}MgR}{4(I+mR^2)}(\theta-\theta_0) \quad (33)$$

o anche

$$\ddot{\delta\theta} = -\frac{\sqrt{3}MgR}{4(I+mR^2)}\ \delta\theta \quad (34)$$

con $\delta\theta = \theta - \theta_0$. Si tratta di un'equazione armonica a cui corrisponde la frequenza

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}MgR}{4(I+mR^2)}} \quad (35)$$

che è la stessa trovata con il metodo precedente.

f) Nell'istante iniziale l'energia meccanica è nulla. L'anello inizia a ruotare e la massa scende. Osserviamo che il primo massimo di $U(\theta)$ a partire dalla posizione $\theta = 0$ nel verso positivo si trova in $\theta = (5/6)\pi$ dove $u = -(5/24)\pi + (1/2)(1+\sqrt{3}/2)$. Dato che questo valore è positivo, quel punto non potrà mai essere raggiunto partendo da un'energia meccanica nulla. Dunque la conservazione dell'energia impedisce di raggiungere questo angolo e il moto rimarrà confinato in un intervallo di angoli e di quote limitato. La massa oscilla su e giù in modo periodico ma non armonico.

Se $m = M/2$, anziché $M/4$, il primo termine dell'energia potenziale (18) è più grande in modulo. Questo comporta un abbassamento della posizione di equilibrio stabile verso angoli più grandi e quote z più basse. La curva di $u(\theta)$ scende con pendenza media doppia, essendo $u(\theta) = (1/2)(1 - \cos\theta - \theta)$. Facendo un semplice grafico delle funzioni $\cos\theta$ e $1 - \theta$ si vede facilmente che non si intersecano mai per θ positivi. Dunque la funzione $u(\theta)$ rimane negativa sempre, mano a mano che la massa scende. Essendo partita con energia meccanica nulla, la massa continuerà a scendere indefinitamente, srotolando la corda con un andamento non uniformemente accelerato, bensì con una modulazione periodica dell'accelerazione.

Soluzione esercizio II.1

a) Conviene tracciare il tempo nel corso della giornata, da 0 a 24 ore, lungo una retta orizzontale e individuare, sulla stessa retta, gli intervalli che corrispondono alle seguenti situazioni:
A) temperatura notturna, piattaforma libera, dalle ore 0 alle ore 2;
B) temperatura notturna, Emma sulla piattaforma, dalle 2 alle 7;
C) temperatura diurna, Emma sulla piattaforma, dalle 7 alle 9;
D) temperatura diurna, piattaforma libera, dalle 9 alle 20;
Alle ore 20 si torna allo stato A chiudendo il ciclo. Le trasformazioni avvengono nel passaggio da una situazione all'altra e, per ipotesi, possiamo considerarle quasistatiche per il gas nel recipiente con il pistone, che trattiamo come un gas ideale monoatomico. Le quattro situazioni sopra descritte corrispondono a stati di equilibrio termodinamico. In questi stati il pistone è fermo e le pressioni sopra e sotto sono uguali. Per calcolare la pressione sopra basta aggiungere alla pressione atmosferica la pressione dovuta alla forza peso della piattaforma, con o senza Emma. Con Emma la pressione è

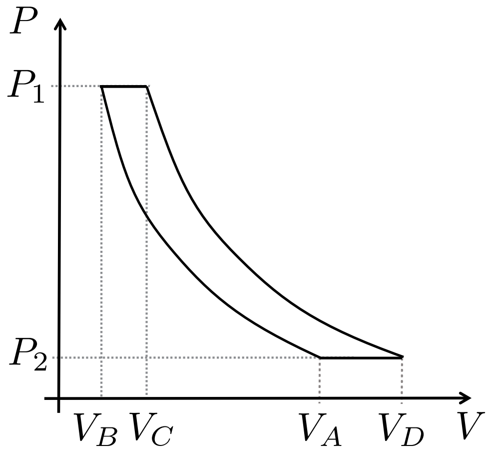
$$\boxed{P_1 = P_{\text{atm}} + \frac{(m+M)g}{S} = 3.659 \times 10^5 \text{ Pa}}, \tag{36}$$

mentre senza è

$$\boxed{P_2 = P_{\text{atm}} + \frac{Mg}{S} = 2.973 \times 10^5 \text{ Pa}}. \tag{37}$$

Per le temperature si hanno i due valori $T_1 = 296.15$ K (diurna) e $T_2 = 288.15$ K (notturna). Con questi valori possiamo utilizzare l'equazione di stato per ricavarci i volumi, nei quattro stati elencati sopra. Si ottiene

$$\boxed{V_A = \frac{nRT_2}{P_2} = 0.004029 \text{ m}^3 = 4.029 \text{ l}}, \tag{38}$$



$$\boxed{V_B = \frac{nRT_2}{P_1} = 0.003274 \text{ m}^3 = 3.274 \text{ l}}, \tag{39}$$

$$\boxed{V_C = \frac{nRT_1}{P_1} = 0.003365 \text{ m}^3 = 3.365 \text{ l}}, \tag{40}$$

$$\boxed{V_D = \frac{nRT_1}{P_2} = 0.004141 \text{ m}^3 = 4.141 \text{ l}}. \tag{41}$$

Il volume massimo e minimo differiscono di $\Delta V = V_D - V_B = 0.867$ l. Tenuto conto che la sezione del cilindro è $S = 10^{-2}$ m^2, possiamo calcolare lo spostamento verticale massimo della piattaforma come

$$\boxed{\Delta z = \frac{\Delta V}{S} = 0.0867 \text{ m} = 8.67 \text{ cm}}. \tag{42}$$

b) Le trasformazioni del gas avvengono nel passaggio tra gli stati di equilibrio. Osserviamo che i due passaggi che avvengono quando la temperatura dell'ambiente viene variata dal sistema di condizionamento della sala, avvengono a pressione costante: il riscaldamento BC, al mattino, alla pressione più alta, P_1; il raffreddamento DA, la sera, alla pressione più bassa, P_2. Si tratta quindi di trasformazioni isobare, che abbiamo pure assunto essere quasistatiche. Invece i passaggi che avvengono quando Emma sale e scende, avvengono a temperatura costante: sale in AB quando la temperatura è la più bassa, T_2, e scende in CD quando è la più alta, T_1. Si tratta quindi di un ciclo che segue la sequenza: AB isoterma, BC isobara, CD isoterma, DA isobara. Nel diagramma P-V si tratta di due isoterme vicine che connettono rispettivamente A con B e C con D, collegate tra loro da due brevi tratti di isobara orizzontale. Il ciclo viene percorso in senso orario.

c) Usando le usuali espressioni per i calori scambiati nelle isobare e nelle isoterme di un gas ideale si ha:

$$\boxed{Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = -248.6.8 \text{ J}}, \tag{43}$$

$$\boxed{Q_{BC} = nc_p(T_1 - T_2) = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_2) = 83.2 \text{ J}}, \tag{44}$$

$$\boxed{Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = 255.5 \text{ J}}, \tag{45}$$

$$\boxed{Q_{DA} = nc_p(T_2 - T_1) = -Q_{BC} = -83.2 \text{ J}}. \tag{46}$$

Il calore totale scambiato è la somma di questi valori

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = Q_{AB} + Q_{CD} = 6.9 \text{ J}}. \tag{47}$$

Per quanto riguarda il lavoro si ha

$$\boxed{W_{AB} = Q_{AB} = -248.6.8 \text{ J}}, \tag{48}$$

$$\boxed{W_{BC} = P_1(V_C - V_B) = 33.3 \text{ J}}, \tag{49}$$

$$\boxed{W_{CD} = Q_{CD} = 255.5 \text{ J}}, \tag{50}$$

$$\boxed{W_{DA} = P_2(V_A - V_D) = -33.3 \text{ J}}. \tag{51}$$

e il lavoro totale è la somma

$$\boxed{W_{\text{tot}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 6.9 \text{ J}}. \tag{52}$$

d) Il rendimento si calcola dalla definizione

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{assorb}}} = \frac{W_{\text{tot}}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = 0.02}. \tag{53}$$

Questo ciclo è composto da due isoterme reversibili e da due isobare reversibili. Per compiere le isobare in maniera reversibile occorre utilizzare un dispositivo che aumenta gradualmente la temperatura, equivalente ad un numero infinito di termostati compresi tra le due temperature estreme T_1 e T_2. Il ciclo di Carnot ideale opera invece tra due soli termostati. Assumendo di usare come termostati quelli alle due temperature estreme del nostro ciclo precedente, allora si avrebbe

$$\boxed{\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{288.15}{296.15} = 0.027}. \tag{54}$$

Il confronto tra i due rendimenti richiede tuttavia delle cautele. Il teorema di Carnot, infatti si applica al confronto tra i rendimenti di macchine che operano tra gli stessi due serbatoi. Nel nostro caso, i rendimenti che abbiamo appena calcolato si riferiscono a macchine che usano insiemi diversi di serbatoi.

Soluzione esercizio II.2

a) La miscela di acqua e ghiaccio si trova inizialmente in equilibrio termico a $T_0 = 273.15$ K. Il contatto termico con l'olio, che si trova invece a $T = 323.15$ K, induce uno scambio di calore che porta al raggiungimento di un equilibrio termico complessivo.
Innanzitutto troviamo la massa d'olio coinvolta

$$m_{\text{olio}} = \rho V_{\text{olio}} = 4.6 \text{ kg}\,. \tag{55}$$

All'inizio si assisterà allo scioglimento del ghiaccio mentre l'olio si raffredda. Il calore che l'olio deve cedere alla miscela per sciogliere completamente il ghiaccio è

$$Q_1 = \lambda_{\text{f}} m_{\text{ghiaccio}} = 3.335 \times 10^5 \times 0.5 \text{ J} = 1.6675 \times 10^5 \text{ J} \tag{56}$$

che possiamo esprimere anche come

$$Q_1 = -m_{\text{olio}} c_{\text{olio}} (T_1 - T_{\text{olio}})\,, \tag{57}$$

da cui ricaviamo la temperatura dell'olio al termine di questa fase:

$$T_1 = T_{\text{olio}} - \frac{Q_1}{m_{\text{olio}} c_{\text{olio}}} = 305.05 \text{ K} = 31.9\ ^\circ\text{C}\,. \tag{58}$$

A questo punto abbiamo 5 kg di acqua a $T = 273.15$ K e 4.6 kg di olio a $T_1 = 305.05$ K, che continueranno a scambiare calore fino al raggiungimento della temperatura di equilibrio T_{f}. Il calore scambiato sarà

$$Q_2 = m_{\text{olio}} c_{\text{olio}} (T_1 - T_{\text{f}}) = m c_a (T_{\text{f}} - T_0)\,, \tag{59}$$

da cui si ricava la temperatura finale del sistema complessivo

$$\boxed{T_{\text{f}} = \frac{m c_a T_0 + m_{\text{olio}} c_{\text{olio}} T_1}{m c_a + m_{\text{olio}} c_{\text{olio}}} = 282.9 \text{ K} = 9.75\ ^\circ\text{C}}\,. \tag{60}$$

b) Il calore scambiato tra la miscela acqua-ghiaccio e l'olio è

$$\boxed{Q = Q_1 + Q_2 = (1.6675 + 2.0387) \times 10^5 \text{ J} = 3.7 \times 10^5 \text{ J}}\,. \tag{61}$$

c) Durante la fase di scioglimento del ghiaccio, l'entropia dell'olio e della miscela varierà delle seguenti quantità

$$\Delta S_{\text{olio},1} = m_{\text{olio}} c_{\text{olio}} \ln \frac{T_1}{T_{\text{olio}}} = -530.3 \text{ J/K}\,, \tag{62}$$

$$\Delta S_{\text{m},1} = \frac{\lambda_{\text{f}} m_{\text{ghiaccio}}}{T_0} = 610.5 \text{ J/K}\,. \tag{63}$$

Durante la seconda fase, l'entropia di olio e acqua varieranno di

$$\Delta S_{\text{olio},2} = m_{\text{olio}} c_{\text{olio}} \ln \frac{T_f}{T_1} = -693.5 \text{ J/K}\,, \tag{64}$$

$$\Delta S_{\text{a},2} = m c_a \ln \frac{T_f}{T_0} = 734.1 \text{ J/K}\,. \tag{65}$$

Si vede che la variazione di entropia complessiva (uguale a quella dell'universo visto che il sistema è isolato) è maggiore di zero in ciascuno dei processi.
In conclusione, la miscela varia la sua entropia di

$$\boxed{\Delta S_{\text{m}} = \Delta S_{\text{m},1} + \Delta S_{\text{a},2} = 1344.6 \text{ J/K}}\,, \tag{66}$$

mentre l'olio di

$$\boxed{\Delta S_{\text{olio}} = \Delta S_{\text{olio},1} + \Delta S_{\text{olio},2} = -1223.8 \text{ J/K}}\,. \tag{67}$$

d) Il calore fornito dalla sorgente a potenza costante è

$$Q_3 = P\Delta t = 240 \text{ kJ}. \tag{68}$$

Il sistema di acqua e olio aumenta quindi la sua temperatura di

$$\boxed{\Delta T = \frac{Q_3}{m_{\text{olio}} c_{\text{olio}} + m c_a} = 8^\circ \text{ C}}\,. \tag{69}$$