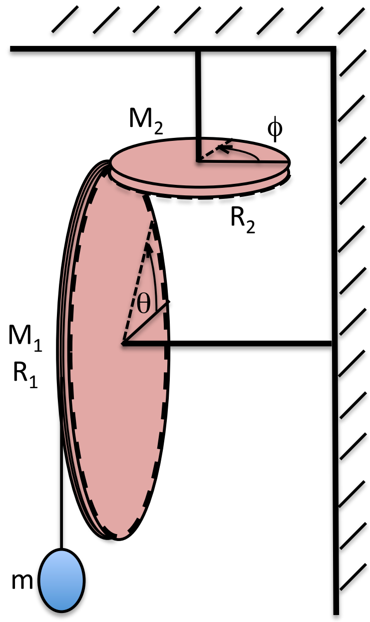
Fisica Generale I
A.A. 2018-2019, 12 giugno 2019

Esercizi di meccanica relativi al primo modulo del corso

Esercizio I.1

Un dispositivo meccanico è costituito da due ruote dentate (approssimabili a cilindri omogenei) disposte su piani perpendicolari; la ruota 1 ha raggio R_1 e massa $M_1 = 100$ kg e può ruotare attorno ad un asse orizzontale fisso, mentre la ruota 2, di raggio $R_2 = 80$ cm e massa $M_2 = 30$ kg, può ruotare attorno ad un asse verticale fisso. Attorno alla ruota 1 è avvolta una corda inestensibile di massa trascurabile che sorregge un corpo di massa $m = 15$ kg. Le due ruote sono in contatto, tramite le rispettive dentature, in un punto sul bordo di ciascuna, come illustrato in figura.



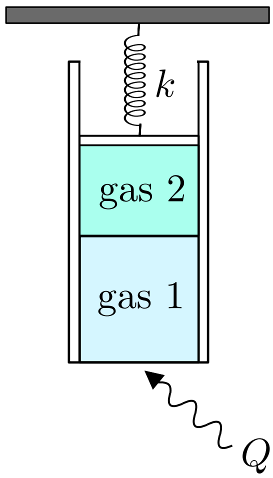
a) Determinare il momento delle forze che si deve applicare dall'esterno alla ruota 2 per mantenere il sistema bloccato in quiete.
b) Quando il momento bloccante sulla ruota 2 viene eliminato, il sistema inizia a muoversi. Scrivere l'espressione dell'angolo di rotazione della ruota 2 in funzione del tempo, $\phi(t)$, e della quota $z(t)$ del corpo appeso.
c) Scrivere l'espressione dell'energia cinetica complessiva che il sistema ha dopo un generico tempo t dall'inizio del moto e confrontarla con l'energia potenziale della massa m. Calcolarne i valori per $t = 1$ s e per $t = 2$ s.
d) Si supponga di voler far scendere la massa con velocità costante mediante un freno che preme radialmente sulla ruota 2 con un'intensità costante F. Considerando un coefficiente di attrito dinamico μ, determinare F in funzione di μ e riportare l'andamento qualitativo in un grafico.

Esercizio I.2
Una particella di massa m si muove lungo una guida rettilinea orizzontale liscia di lunghezza L con estremi nei punti fissi A e B, rispettivamente a sinistra e a destra. La particella è collegata all'estremo A da una molla di costante elastica k_A e lunghezza a riposo $l_A = \frac{3}{4}L$ e all'estremo B da una molla di costante elastica $k_B = \frac{3}{2}k_A$ e lunghezza a riposo $l_B = \frac{1}{2}L$.
a) Qual è la posizione di equilibrio della particella?
b) La particella nella guida viene urtata da un'altra particella identica, che arriva con velocità v_0 da sinistra a destra con inclinazione $\theta = 30$ gradi rispetto all'asse della guida e ne esce con un'inclinazione $\theta' = 60$ gradi, sempre da sinistra verso destra. Determinare la velocità con cui la particella nella guida inizia a muoversi a causa dell'urto, se questo è elastico. Qual è l'impulso trasferito dalla guida dutante l'urto?
c) Scrivere l'equazione del moto e determinare il periodo e l'ampiezza di oscillazione.
d) Tornando alla situazione di equilibrio iniziale, con la particella e la guida ferme nel sistema di riferimento inerziale, si supponga che improvvisamente, per effetto di una forza esterna, la guida inizi a muoversi verso sinistra con accelerazione costante a_t. Ricalcolare la posizione di equilibrio della particella nel sistema di riferimento solidale con la guida; calcolare il periodo e l'ampiezza delle oscillazioni indotte.

Esercizi di termodinamica relativi al secondo modulo del corso

Esercizio II.1
Si consideri un recipiente adiabatico di volume $V_B = 150$ litri, suddiviso in due settori da una parete sottile. Un settore di volume $V_A = V_B/3$ è occupato da due moli di ossigeno ad una temperatura $T_A = 300$ K, mentre l'altro settore è vuoto. L'apertura improvvisa di un foro permette al gas di espandersi liberamente fino ad occupare il volume totale V_B. Mediante un pistone, il gas viene riportato lentamente ad occupare il settore iniziale. Successivamente, rimuovendo l'isolamento termico, il sistema viene messo a contatto con un termostato a temperatura T_A.
a) Determinare le coordinate termodinamiche in ciascuno degli stati di equilibrio raggiunti al termine delle tre trasformazioni descritte.
b) Rappresentare il ciclo su un diagramma PV, distinguendo le trasformazioni reversibili da quelle irreversibili.
c) Calcolare il lavoro compuito sul gas durante la ricompressione e il calore scambiato con il termostato durante la terza trasformazione.
d) Quant'è il lavoro complessivo compiuto dal gas e il calore scambiato con l'ambiente sull'intero ciclo? Argomentare in relazione al secondo principio.
e) Stimare la variazione di entropia del gas e quella dell'universo associate a ciascuna trasformazione.

Esercizio II.2



Un recipiente cilindrico di sezione $S = 200$ cm^2 contiene due gas separati da una parete diatermica libera di muoversi lungo l'asse verticale. Nel settore inferiore sono presenti $n_1 = 0.1$ moli di un gas ideale monoatomico che occupano inizialmente un volume $V_{1,A} = 2.5$ l. Nel settore superiore sono presenti n_2 moli di un gas ideale biatomico che occupano inizialmente un volume $V_{2,A} = 2$ l. Il gas 2 è confinato superiormente da una parete mobile che lo separa dall'ambiente esterno, che ha una pressione costante $P_{\text{ext}} = 1$ atm. Una molla di costante elastica $k = 5000$ N/m connette la parete superiore ad un vincolo fisso. Si considerino le pareti mobili di massa trascurabile. Le pareti laterali del cilindro e la parete superiore siano adiabatiche.

a) Inizialmente la molla sia a riposo e i due gas siano all'equilibrio. Determinare il numero di moli n_2 del gas biatomico.

b) Ad un certo istante il gas 1 viene posto a contatto con una fonte di calore che lo scalda lentamente fino a raggiungere una nuova condizione di equilibrio B, in cui la molla è compressa. Sapendo che la compressione della molla è pari a $\Delta x = 10$ cm, si determini la nuova pressione dei gas, il volume totale occupato dai due gas e il volume occupato da ciascuno dei due.

c) Qual è la temperatura di equilibrio del sistema nello stato B?

d) Si determinino il lavoro compiuto dal sistema sull'ambiente esterno, la variazione di energia interna di ciascuno dei due gas e il calore fornito al sistema nel passaggio dallo stato A allo stato B.

e) Stimare la variazione di entropia del sistema nel passaggio dallo stato A allo stato B.

Soluzione esercizio I.1

a) L'intero sistema è inizialmente fermo in equilibrio. Possiamo scrivere separatamente le equazioni cardinali per la traslazione lungo z della massa m, per la rotazione attorno all'asse di simmetria orizzontale della ruota 1 e per la rotazione attorno alla verticale della ruota 2.

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= T - mg = 0 && (1)\\ I_1\ddot{\theta} &= TR_1 - F_d R_1 = 0 && (2)\\ I_2\ddot{\phi} &= F_d R_2 - \tau = 0 && (3) \end{aligned}$$

dove indichiamo con T la tensione della corda inestensibile, con F_d la forza che ciascuna delle due ruote esercita sull'altra tramite i denti che si toccano nel punto di contatto e con τ il momento applicato alla ruota piccola per mantenere l'intero sistema in equilibrio.
Vediamo facilmente che in questo caso che $T = F_d = mg$ e quindi

$$\boxed{\tau = mgR_2 = 117.7\ \text{Nm}}\,. \tag{4}$$

b) Una volta tolto il momento τ, il sistema inizia a muoversi. Le equazioni del moto in questo caso sono

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= T' - mg && (5)\\ I_1\ddot{\theta} &= T'R_1 - F'_d R_1 && (6)\\ I_2\ddot{\phi} &= F'_d R_2\,. && (7) \end{aligned}$$

Notiamo che i moti della massa e delle due ruote sono vincolati dalla condizione di inestensibilità del filo e dalla condizione di rotolamento puro di una ruota sull'altra, per effetto della dentatura. Prendendo come positivo l'asse z verso l'alto e gli angoli crescenti come in figura, le condizioni che descrivono questi vincoli sono date da $dz = -R_1 d\theta = -R_2 d\phi$.
Con questa accortezza, e ricordando che il momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria di un cilindro omogeneo è $I = \frac{1}{2}MR^2$, è possibile risolvere il sistema a tre equazioni con incognite T', F'_d e l'angolo $\phi(t)$:

$$\begin{aligned} T' &= mg - mR_2\ddot{\phi} && (8)\\ F'_d &= mg - \left(mR_2 + I_1\frac{R_2}{R_1}\right)\ddot{\phi} && (9)\\ \ddot{\phi} &= \frac{mgR_2}{I_2 + mR_2^2 + I_1\frac{R_2^2}{R_1^2}} = \frac{2mg}{R_2\,(M_1 + M_2 + 2m)}\,. && (10) \end{aligned}$$

Si tratta di un moto accelerato con accelerazione costante. Quindi l'angolo descritto dalla ruota 2 nel tempo è

$$\boxed{\phi(t) = \frac{mgt^2}{R_2\left(M_1 + M_2 + 2m\right)}} \tag{11}$$

e la quota del corpo appeso è

$$\boxed{z(t) = -R_2\phi(t) = -\frac{mgt^2}{M_1 + M_2 + 2m}} \tag{12}$$

avendo posto $z = 0$ alla quota al tempo $t = 0$.

c) L'energia cinetica complessiva è data dalla somma delle energie cinetiche dei tre corpi in movimento.

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2}mR_2^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}M_1R_2^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}M_2R_2^2\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{(mgt)^2}{M_1 + M_2 + 2m}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Possiamo scrivere anche l'energia potenziale associata alla forza di gravità per la massa m nel tempo:

$$U(t) = mgz(t) = mg\left(-\frac{mgt^2}{M_1 + M_2 + 2m}\right) = -E_k(t)\,. \tag{14}$$

Vediamo quindi che la riduzione di energia potenziale della massa che cade porta direttamente ad un aumento dell'energia cinetica del sistema complessivo, come ci si poteva attendere dal teorema delle forze vive, o dalla conservazione dell'energia meccanica.
Negli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 2$ s abbiamo

$$\boxed{E_k(t_1) = -U(t_1) = 149.3 \text{ J} \quad , \quad E_k(t_2) = -U(t_2) = 597.3 \text{ J}}\,. \tag{15}$$

d) La presenza del freno modifica l'equazione del moto per la ruota orizzontale aggiungendo un momento della forza di attrito dato da $\tau_a = -\mu F R_2$. Se la forza F è tale da mantenere la massa in caduta a velocità costante avremo anche $\ddot{z} = \ddot{\phi} = \ddot{\theta} = 0$, come nel caso statico, e il nuovo set di equazioni del moto sarà

$$m\ddot{z} = T - mg = 0 \tag{16}$$

$$I_1\ddot{\theta} = TR_1 - F_dR_1 = 0 \tag{17}$$

$$I_2\ddot{\phi} = F_dR_2 - \mu F R_2 = 0 \tag{18}$$

da cui si ottiene l'intensità cercata della forza frenante

$$\boxed{F = \frac{mg}{\mu}} \tag{19}$$

che corrisponde ad un ramo d'iperbole se riportata in grafico come $F(\mu)$.

Soluzione esercizio I.2

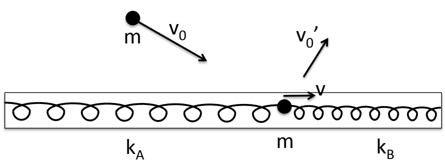
a) Prendiamo come riferimento l'asse della guida, che indichiamo con x, con origine nel punto A. Scriviamo quindi l'equazione del moto per la massa m soggetta alle due forze elastiche

$$m\ddot{x} = -k_A(x - l_A) - k_B[x - (L - l_B)]\,. \tag{20}$$

Nella posizione di equilibrio x_0, l'accelerazione è nulla quindi poniamo $\ddot{x} = 0$ ed otteniamo

$$\boxed{x_0 = \frac{k_A l_A + k_B L - k_B l_B}{k_A + k_B} = \frac{3}{5}L} \tag{21}$$

Si noti che nel caso specifico, vista la simmetria del sistema, la molla B agisce come se fosse una molla di costante elastica k_B applicata nel punto A.



b) L'urto è elastico quindi si conserva l'energia cinetica del sistema. Inoltre sappiamo che la guida orizzontale è rigida e vincolata e permette alla massa al suo interno di muoversi unicamente lungo l'asse x. Questo implica la conservazione della quantità di moto esclusivamente lungo l'asse x. Eliminando direttamente anche le masse dalle equazioni, visto che sono uguali per le due particelle, le due leggi di conservazione diventano

$$
\begin{aligned}
v_0^2 &= v_0'^2 + v^2 && (22)\\
\frac{\sqrt{3}}{2} v_0 &= \frac{1}{2} v_0' + v && (23)
\end{aligned}
$$

dove indichiamo con v e v_0' rispettivamente i moduli delle velocità della particella nella guida e dell'altra. Il sistema porta a due coppie di soluzioni analitiche di cui una con $v_0' < 0$, che andiamo a scartare. Le soluzioni cercate sono

$$
v_0' = \frac{v_0}{5} \left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \right) \tag{24}
$$

$$
\boxed{v = \frac{v_0}{5} \left(2\sqrt{3} - \sqrt{2} \right)}\,. \tag{25}
$$

La guida non può esercitare forze nella direzione x sulla particella, ma solo lungo y. Se $F(t)$ è la forza esercitata durante l'urto, allora l'impulso $\int F(t)dt$ deve essere uguale alla variazione di quantità di moto della particella nella stessa direzione. Confrontando la situazione prima e dopo l'urto si ottiene

$$
\boxed{\int F(t)dt = p_{y,f} - p_{y,i} = m v_0' \sin\theta' + m v_0 \sin\theta = m v_0 \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 5}{10}}\,. \tag{26}
$$

c) L'equazione del moto, già introdotta al punto a) può essere riscritta in maniera più chiara in funzione della posizione di equilibrio

$$
m\ddot{x} = -(k_A + k_B)(x - x_0)\,. \tag{27}
$$

In questo modo vediamo che la massa m oscilla di moto armonico, grazie all'effetto combinato delle due molle, come se fosse soggetta ad una sola molla di costante elastica $k = k_A + k_B$. Possiamo quindi dedurre la pulsazione e il periodo

$$
\omega = \frac{k}{m} \quad , \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,. \tag{28}
$$

La soluzione dell'equazione del moto è data da

$$
x(t) = x_0 + A \sin\omega t \quad , \quad \dot{x}(t) = A\omega\cos\omega t\,. \tag{29}
$$

Per determinare l'ampiezza di oscillazione A, possiamo confrontare la velocità al tempo iniziale dopo l'urto v, con $\dot{x}(0)$ ottenendo

$$
\boxed{A = \frac{v}{\omega} = \frac{v_0}{5k} \left(3\sqrt{3} + \sqrt{2} - 5 \right)}\,. \tag{30}
$$

d) L'equazione del moto della particella scritta nel sistema di riferimento accelerato risulta

$$m\ddot{x}' = -k(x' - x_0) - ma_t = -k\left(x' - x_0 + \frac{ma_t}{k}\right) \tag{31}$$

dove abbiamo semplicemente aggiunto la forza apparente. La nuova posizione di equilibrio diventa

$$\boxed{x_0' = x_0 - \frac{ma_t}{k}}\,. \tag{32}$$

La situazione è equivalente a quella di una massa appesa verticalmente ad una molla in un campo di gravità con accelerazione $g = a_t$. La pulsazione ed il periodo di oscillazione rimangono inalterati visto che non cambia la costante elastica della molla: $\boxed{T' = T}$.

Al tempo $t = 0$ la particella si trova in x_0 con velocità nulla. Inserendo queste condizioni iniziali nell'equazione del moto della particella vista dal sistema di riferimento accelerato, la soluzione diventa

$$x'(t) = x_0' + (x_0 - x_0')\cos\omega t \tag{33}$$

con ampiezza del moto data proprio dalla distanza tra le due posizioni di equilibrio

$$\boxed{A' = x_0 - x_0' = \frac{ma_t}{k}} \tag{34}$$

Soluzione esercizio II.1

a) Inizialmente $n = 2$ mol di ossigeno si trovano ad una temperatura $T_A = 300$ K ed occupano un volume $V_A = 50$ l. Pertanto la pressione iniziale sarà data da

$$\boxed{P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 9.98 \times 10^4 \text{ Pa}}\,. \tag{35}$$

Dopo l'espansione libera e adiabatica, il gas occupa un volume $V_B = 3V_A = 150$ l. Comportandosi come un gas ideale, esso manterrà la stessa temperatura che aveva inizialmente, cioè $T_B = T_A = 300$ K (l'espansione avviene a lavoro nullo e con calore nullo e dunque l'energia interna non varia), e questo ci permette di utilizzare nuovamente l'equazione di stato per i gas ideali per calcolare la pressione del gas nello stato B che risulta essere:

$$\boxed{P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{nRT_A}{3V_A} = \frac{P_A}{3} = 3.33 \times 10^4 \text{ Pa}}\,. \tag{36}$$

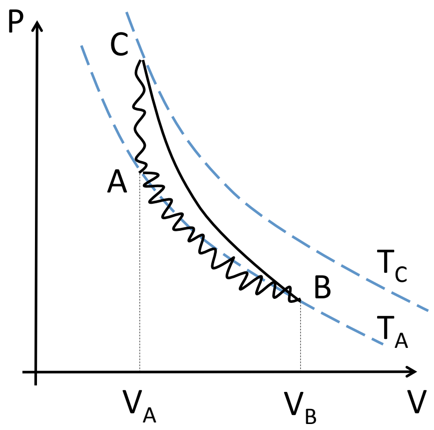
Infine, il gas subisce una trasformazione adiabatica reversibile che lo riporta al volume iniziale, quindi $V_C = V_A = 50$ l. Per le trasformazioni adiabatiche quasistatiche, $PV^\gamma =$ cost, da cui

$$\boxed{P_C = P_B \frac{V_B^\gamma}{V_C^\gamma} = P_B 3^\gamma = 1.550 \times 10^5 \text{ Pa}}\,, \tag{37}$$

dove abbiamo utilizzato il coefficiente di dilatazione adiabatica per i gas biatomici $\gamma = 1.4$. Questo ci permette di calcolare la temperature del gas nello stato C:

$$\boxed{T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 466.1 \text{ K}}\,. \tag{38}$$

b) Il ciclo del gas è rappresentato schematicamente nel diagramma PV in figura, dove distinguiamo le trasformazioni reversibili (BC) da quelle irreversibili (AB e CA).



c) Per calcolare il lavoro compiuto sul gas durante la ricompressione possiamo sfruttare il fatto che nelle trasformazioni adiabatiche il calore scambiato è nullo utilizzando il primo principio:

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B) = -6.90 \text{ kJ}\,. \tag{39}$$

Il lavoro fatto sul gas (e non dal gas) sarà quindi $\boxed{W = -W_{BC} = 6.90 \text{ kJ}}$.

Anche il calore ceduto dal gas al termostato a temperatura T_A nella trasformazione CA può essere calcolato utilizzando il primo principio. Nella trasformazione CA infatti il gas non compie alcun lavoro ($V_C = V_A$) e pertanto

$$\boxed{Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = -6.90 \text{ kJ}}\,. \tag{40}$$

d) Il gas compie lavoro solo nella compressione adiabatica BC, pertanto il lavoro compiuto dal gas durante l'intero ciclo sarà

$$\boxed{W_{TOT} = W_{BC} = -6.90 \text{ kJ}}\,. \tag{41}$$

Per quanto riguarda il calore scambiato, il gas scambia calore solamente con il termostato a temperatura T_A, quindi

$$\boxed{Q_{TOT} = Q_{CA} = -6.90 \text{ kJ}}\,. \tag{42}$$

Alla luce di quanto appena detto, possiamo immaginare il nostro sistema come una macchina che lavora con un solo termostato a temperatura T_A. Tale macchina trasforma in calore tutto il lavoro che facciamo su di essa, in maniera irreversibile. Si noti che questo non viola il secondo principio. La formulazione di Kelvin-Planck del secondo principio afferma infatti che non è possibile avere una trasformazione ciclica che realizzi il processo contrario, cioè che trasformi in lavoro tutto il calore assorbito.

e) Nell'espansione libera il gas è isolato dall'ambiente, pertanto $\Delta S_{AB}^{\text{amb}} = 0$ e si ha

$$\boxed{\Delta S_{AB}^{\text{univ}} = \Delta S_{AB}^{\text{gas}} = nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 18.27 \text{ J/K} > 0} \tag{43}$$

Durante la compressione adiabatica reversibile, $\delta Q = 0$ quindi è nulla la variazione di entropia

$$\boxed{\Delta S_{BC}^{\text{univ}} = \Delta S_{BC}^{\text{gas}} = 0 \text{ J/K}} \tag{44}$$

Infine, per la trasformazione CA, in cui il volume rimane invariato, abbiamo:

$$\boxed{\Delta S_{CA}^{\text{gas}} = nc_V\ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) = -18.32 \text{ J/K}}\,, \tag{45}$$

e

$$\Delta S_{CA}^{\text{amb}} = \frac{-Q_{CA}}{T_A} = 23.27 \text{ J/K}. \tag{46}$$

Pertanto la variazione d'entropia dell'universo in seguito a questa trasformazione sarà

$$\boxed{\Delta S_{CA}^{\text{univ}} = \Delta S_{CA}^{\text{gas}} + \Delta S_{CA}^{\text{amb}} = 4.95 \text{ J/K} > 0}\,. \tag{47}$$

Soluzione esercizio II.2

a) Poiché i due gas si trovano all'equilibrio, e la parete che li divide è una parete mobile, essi avranno la stessa pressione. Inoltre, essendo la molla a riposo, la condizione di equilibrio meccanico ($\sum_i \vec{F}_i = 0$) per la parete superiore ci permette di ottenere la pressione dei due gas, che non sarà altro che la pressione esterna. Quindi $P_{1,A} = P_{2,A} = P_{\text{atm}} = 1.013 \times 10^5$ Pa. Ora, sapendo la pressione, il numero di moli e il volume del gas nel settore superiore, possiamo calcolarne la temperature grazie all'equazione di stato per i gas perfetti:

$$T_{1,A} = \frac{P_{1,A}V_{1,A}}{n_1 R} = 304.6 \text{ K}, \tag{48}$$

che sarà la stessa del gas nel settore inferiore, essendo i due gas a contatto termico ($T_{1,A} = T_{2,A} = T_A$). A questo punto possiamo utilizzare nuovamente l'equazione di stato per calcolare il numero di moli contenute nella parte inferiore del recipiente, cioè

$$\boxed{n_2 = \frac{P_{2,A}V_{2,A}}{RT_{2,A}} = 0.08 \text{ mol}}\,. \tag{49}$$

Questo era comunque attendibile visto che, con la stessa pressione e la stessa temperatura, il rapporto tra le moli è uguale al rapporto tra i volumi

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{50}$$

b) Il volume totale occupato dai due gas nello stato B sarà dato da

$$\boxed{V_{tot,B} = V_{tot,A} + S\Delta x = V_{1,A} + V_{2,A} + S\Delta x = 6.5 \text{ l}}\,. \tag{51}$$

Per calcolarne la pressione possiamo imporre nuovamente la condizione di equilibrio meccanico per le due pareti mobili

$$\boxed{P_{1,B} = P_{2,B} = P_{atm} + \frac{k\Delta x}{S} = 1.263 \times 10^5 \text{ Pa}}\,. \tag{52}$$

Come abbiamo visto al punto a), il rapporto tra i volumi è uguale al rapporto tra i numeri di moli dei due gas quindi

$$V_{1,B} n_2 = V_{2,B} n_1 \tag{53}$$

$$V_{1,B} + V_{2_B} = V_{tot,A} + S\Delta x. \tag{54}$$

Risolvendo il sistema troviamo i volumi parziali

$$\boxed{V_{1,B} = \frac{V_{tot,A} + S\Delta x}{1 + \frac{n_2}{n_1}} = 3.612 \text{ l} \quad , \quad V_{2,B} = \frac{V_{tot,A} + S\Delta x}{1 + \frac{n_1}{n_2}} = 2.888 \text{ l}}\,. \tag{55}$$

c) La temperatura, che sarà uguale per i due gas essendo in equilibrio termico, può essere determinata dall'equazione di stato

$$\boxed{T_B = \frac{P_B V_{1,B}}{n_1 R} = \frac{P_B V_{2,B}}{n_2 R} = 548\ \mathrm{K}}\,. \tag{56}$$

d) A causa del calore fornito al gas, quest'ultimo si espande facendo lavoro contro le forze esterne, che in questo caso sono costituite dalla forza di pressione atmosferica e dalla forza elastica della molla. Il lavoro delle forze esterne è

$$W_{\mathrm{Fext}} = -P_{\mathrm{atm}}\Delta V - \frac{1}{2}k\Delta x^2 = -P_{\mathrm{atm}}(V_{tot,B} - V_{tot,A}) - \frac{k}{2S^2}(V_{tot,B} - V_{tot,A})^2 \tag{57}$$

da cui ricaviamo il lavoro compiuto dal gas

$$\boxed{W_{AB} = -W_{\mathrm{Fext}} = 227.6\ \mathrm{J}} \tag{58}$$

In alternativa, potevamo arrivare allo stesso risultato considerando l'espressione della pressione del gas in funzione del volume

$$P(V) = P_{\mathrm{atm}} + \frac{k(V - V_{tot,A})}{S^2}, \tag{59}$$

dove abbiamo riscritto la compressione della molla come $\Delta x = (V - V_{tot,A})/S$. Il lavoro compiuto dal gas è

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B P(V)dV \\ &= \left(P_{\mathrm{atm}} - \frac{kV_{tot,A}}{S^2}\right)(V_{tot,B} - V_{tot,A}) + \frac{k}{2S^2}\left(V_{tot,B}^2 - V_{tot,A}^2\right) \end{aligned} \tag{60}$$

che porta allo stesso risultato di prima.

Le variazioni di energia interna per i due gas sono

$$\boxed{\Delta U_{1,AB} = n_1 c_{V,1}(T_B - T_A) = 304.4\ \mathrm{J}}\,, \tag{61}$$

e

$$\boxed{\Delta U_{2,AB} = n_2 c_{V,2}(T_B - T_A) = 405.9\ \mathrm{J}}\,, \tag{62}$$

Infine, possiamo calcolare il calore fornito al sistema per passare dallo stato A allo stato B applicando il primo principio:

$$\boxed{Q_{AB} = \Delta U_{1,AB} + \Delta U_{2,AB} + W_{AB} = 937.9\ \mathrm{J}}\,. \tag{63}$$

e) La variazione di entropia del sistema nel passare dallo stato A allo stato B può essere calcolata come la somma delle variazioni di entropia dei gas, cioè $\Delta S_{AB} = \Delta S_{1,AB} + \Delta S_{2,AB}$. La variazione d'entropia per il gas 1 è data da

$$\Delta S_{1,AB} = n_1 R \ln\left(\frac{V_{1,B}}{V_{1,A}}\right) + n_1 c_{V,1} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 1.04 \text{ J/K}, \tag{64}$$

mentre quella per il gas 2 risulta

$$\Delta S_{2,AB} = n_2 R \ln\left(\frac{V_{2,B}}{V_{2,A}}\right) + n_2 c_{V,2} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 1.22 \text{ J/K}. \tag{65}$$

Di conseguenza la variazione di entropia del sistema è

$$\boxed{\Delta S_{AB} = \Delta S_{1,AB} + \Delta S_{2,AB} = 2.26 \text{ J/K}}\,. \tag{66}$$