

FRANCO DALFOVO

2006-07

APPUNTI DEL CORSO DI

FISICA GENERALE 4 e 5

Indice

1. Le basi formali e concettuali dell'elettrostatica
carica, campo \vec{E} , potenziale φ , ...
2. Conduttori e dielettrici
Capacità, Polarizzazione, \vec{D} , ...
3. Cariche in moto
Corrente, legge di Ohm, effetto Joule, ...
4. Magnetostatica
Oersted, Biot-Savart, Ampère, \vec{A} , ...
5. Correnti indotte ed equazioni di Maxwell
Faraday, Lenz, Ampère-Maxwell, ...
Onde elettromagnetiche
6. Induzione e circuiti elettrici
Induttanza, circuiti RL, RC, RLC, ...
7. Magnetismo nella materia
Magnetizzazione, \vec{H} , ...

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the middle section of the page.

Handwritten text in the lower middle section of the page.

Handwritten text in the lower section of the page.

Handwritten text at the bottom of the page.

1 Forze, campi e potenziali

Ricordiamo lo scopo: indagare la natura seguendo la ricetta di Galileo. Domande ben poste, procedure sperimentali, linguaggio quantitativo e intersoggettivo (matematica).

In questa direzione si colloca la dinamica newtoniana: meccanica, leggi del moto, azione-reazione, ecc.

Programma (newtoniano) per la meccanica:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}; t)$$

note $\vec{F} \Rightarrow$ risolto il pbm del moto!

Il problema si sposta verso la ricerca delle forze \vec{F} necessarie e sufficienti a descrivere i fenomeni osservati (forze fondamentali).

Un esempio (principio di tutti gli esempi): gravitazione

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{r}_{12}$$

\hookrightarrow forza esercitata da ① su ② $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

Per più corpi: principio di sovrapposizione. La forza su una delle masse è la somma delle forze dovute alle altre masse, presa una ad una, per ciascuna ignorando le altre.

Basta saper sommare vettori!

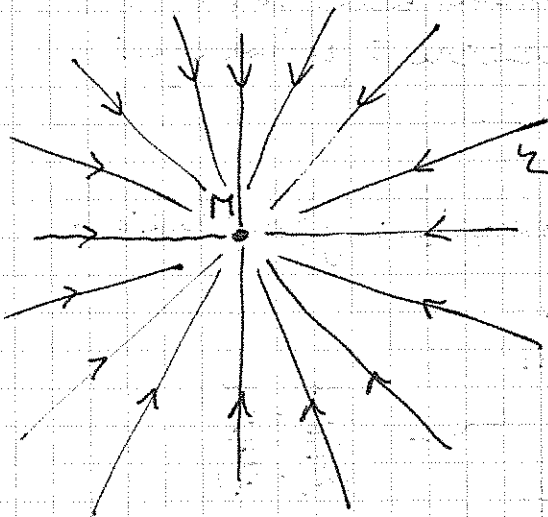
Due concetti utili, inizialmente assenti nella formulazione newtoniana: campo e potenziale.

Campo gravitazionale: data una massa di prova, m_p , interagente gravitazionalmente con altre masse e poste in un punto \vec{r} dello spazio, il campo gravitazionale in \vec{r} , $\vec{g}(\vec{r})$, può essere definito operativamente come la forza gravitazionale che agisce su m_p , divisa per m_p (forza per unità di massa), nel limite in cui m_p è piccola

$$\vec{g}(\vec{r}) = \lim_{m_p \rightarrow 0} \frac{1}{m_p} \vec{F}(\vec{r})$$

Esempio: campo generato da una sola massa M posta in $\vec{r} = 0$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M}{r^2} \hat{r}$$



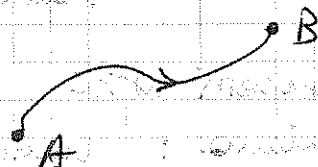
↳ linee di forza del campo
(\vec{g} è tangente ovunque alle linee di forza)

Potenziale gravitazionale

Si parte dal fatto che il campo \vec{g} è conservativo (il lavoro fatto dalle forze del campo nello spostamento di una massa da un punto A e un punto B non dipende dal percorso):

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↳ indipendente dal percorso!



Allora si può introdurre una funzione di \vec{r} , $V(\vec{r})$, tale che la sua variazione tra A e B, ΔV , sia proprio il lavoro L_{AB} , a parte un segno meno che si introduce convenzionalmente.

$$\Delta V = V_B - V_A = -L_{AB} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↳ questa è la variazione di energia potenziale per la massa m soggetta alla forza \vec{F}

Se la massa è quella di prova, si può definire l'energia potenziale per unità di massa

$$\Delta \varphi = \varphi_B - \varphi_A = - \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

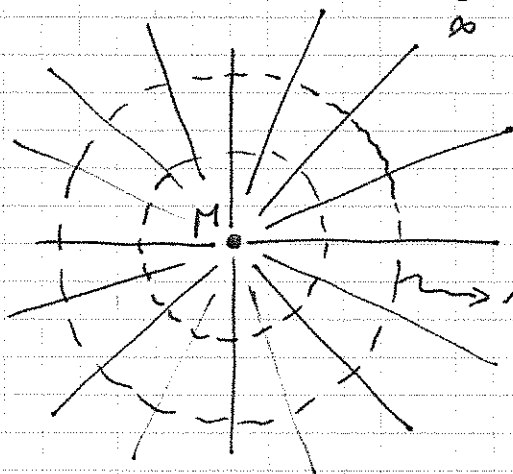
↳ campo gravitazionale

La funzione $\varphi(\vec{r})$ è definita a meno di una costante, che può essere scelta arbitrariamente fissando il valore di φ in un punto di riferimento.

Esempio: campo \vec{g} generato da una sola massa M posta in $\vec{r} = 0$

Conviene scegliere $\varphi = 0$ per $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, in modo che

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r \frac{\gamma M}{r^2} dr = - \frac{\gamma M}{r}$$



$r \rightarrow$ superfici equipotenziali (perpendicolari alle linee di forza)

Campo e potenziale sono concetti utili per la soluzione del problema del moto.

Note: campo \rightarrow vettore
potenziale \rightarrow scalare

L'interazione gravitazionale è una delle interazioni fondamentali.

Altra interazione fondamentale: elettromagnetica

Un po' di storia (in estrema sintesi):

- fenomeni elettrici noti dall'antichità
Ambra (elektron)
strofinamento di diversi materiali
Elettricità vitrea e resinosa.
- Prime esperienze quantitative nel '700
- Generatori elettrostatici, scariche
elettricità animale (Galvani)
pile (Volta)
correnti...

Qui però non ripercorriamo le storie.

Carica elettrica e forza di Coulomb

Partiamo dalla seguente affermazione:

|| I fatti sperimentali possono essere interpretati assumendo che esiste una proprietà dei corpi, che si chiama carica, tale che

- * la forza elettrica si esercita tra corpi carichi;
- * i corpi carichi hanno carica positiva o negativa;
- * corpi con carica di uguale segno si respingono, mentre corpi con carica di segno opposto si attraggono;
- * la forza tra due cariche q_1 e q_2 poste nel vuoto, puntiformi e a distanza $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, è data da

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \hat{r}_{12}$$

$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$

forza esercitata da 1 su 2 costante il cui valore dipende dalle unità di misura scelte.

- * per la forza esercitata da più cariche vale il principio di sovrapposizione
- * la carica totale (somma algebrica delle cariche) di un sistema isolato si conserva.

Commenti

i) La carica riveste per l'elettricità il ruolo che ha la massa per la gravitazione: ovvero, qual'è la caratteristica di un corpo che da sola rende conto del comportamento dello stesso corp. soggetto all'interazione? → massa
→ carica

Ci sono però alcune differenze importanti

- non esiste l'analogo del principio di equivalenza per le masse inerziale e gravitazionale (gravità e proprietà dello spazio-tempo sono legate in modo particolare: la fisica nelle "masse" è diversa dalla fisica nelle "cariche")
- la carica può essere negativa, la massa no.

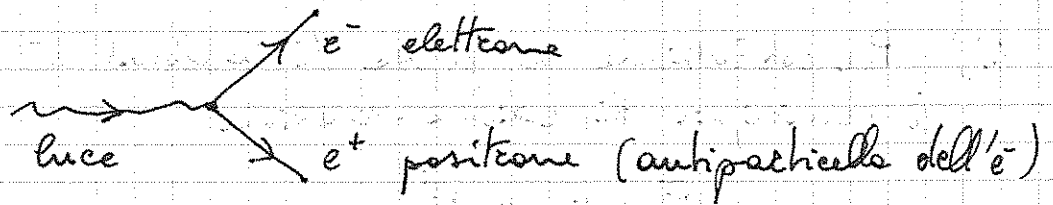
ii) Il fatto che si possano classificare tutti i corpi carichi in due sole classi (carica positiva e carica negativa) senza che esista una terza possibilità è un fatto empirico formulabile in termini di una proprietà transitiva

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ respinge } B \\ A \text{ attira } C \end{array} \right\} \text{ allora } B \text{ attira } C \text{ sempre!}$$

È un fatto sperimentale, non una predizione teorica. Entes nella teoria tramite la definizione di carica. A livello di fisica classica non si deduce da leggi più profonde. Nella fisica moderna esistono relazioni tra l'esistenza delle cariche $+/-$ e le simmetrie di parità (riflessione destra-sinistra) e time-reversal (inversione del segno del tempo).

iii) La scelta del $+$ o del $-$ per l'una o l'altra classe di ^{cariche} ~~particella~~ è arbitraria e convenzionale. Le forze dipendono dal prodotto delle cariche e la scelta convenzionale non influisce sul risultato. La storia ha portato ad assegnare carica negativa alla classe di corpi a cui appartengono gli elettroni. I protoni così sono positivi, ecc.

iv) È importante ricordare che la conservazione delle cariche va riferita alla somma algebrica delle cariche. ~~Le~~ Cariche possono essere create e distrutte, purché ciò avvenga conservando la carica totale. Ad esempio, sono ammessi processi di creazione di coppie del tipo



v) Particelle identiche hanno la stessa carica. Questo è un'affermazione banale, tautologica. Mettiamole in altro modo: in natura si osserva l'esistenza di particelle identiche, aventi la stessa carica, stesse masse, stesse proprietà in genere, e distinguibili solo per la loro diversa posizione nello spazio (ma la meccanica quantistica pone limiti anche a questo tipo di distinguibilità). Ad esempio: tutti gli elettroni sono identici e hanno la stessa carica; tutti i protoni sono identici tra loro e, per di più, hanno anche carica esattamente opposta a quella degli elettroni; ecc. ecc.

La materia può essere vista come un insieme di MOLTE cariche elettriche + e -, tipicamente bilanciate in modo da rendere il tutto mediamente neutro ($q_{TOT} \cong 0$). Un corpo macroscopico è carico se c'è uno sbilanciamento delle cariche + rispetto alle cariche -.

vi) Discretizzazione

Per quanto abbiamo appena detto, un corpo macroscopico è un insieme di MOLTE cariche elementari discrete. Tuttavia la discretizzazione delle cariche ha un ruolo

secondario nei fenomeni macroscopici descritti dall'elettromagnetismo classico e può essere trascurata. Quindi d'ora in poi considereremo la carica q come una quantità continua (numero reale con unità di misura associate).

vii) Per costanza la forza di Coulomb è compatibile con il principio di azione-reazione

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

dato che cambia solo il verso del vettore.

viii) La legge di Coulomb vale solo per cariche ferme. Cariche in moto interagiscono in modo più complicato a causa delle forze magnetiche che vedremo più avanti. Per il momento ci limiteremo al caso statico e la teoria che andiamo a presentare sarà l'elettrostatica.

ix) La legge di Coulomb può essere verificata sperimentalmente tramite un pendolo di torsione (bilancia di Cavendish). Verifiche indirette più precise saranno discusse più avanti.

x) Al fine di rendere operativa la legge di Coulomb necessita di un sistema di unità di misura.

SISTEMI DI UNITA' DI MISURA

1) SI (o MKSA razionalizzato)

Si attribuisce alla carica un'unità propria, il coulomb (C). Per ragioni legate all'efficacia e alla precisione delle misure il C è in realtà derivato dall'unità di misura della corrente elettrica, di cui parleremo più avanti, più facile da misurare. L'unità di corrente è l'ampère (A). Si definisce la carica di 1 C come la carica che fluisce in un conduttore in 1 sec quando la corrente è di 1 A.

Una carica di 1 C è MOLTO grande.

La carica di 1 elettrone o di un protone, in modulo, vale 1.6×10^{-19} C. Tipiche cariche di corpi macroscopici possono essere dell'ordine dei nC (nanocoulomb), equivalenti a $\sim 10^{10}$ elettroni. La discretizzazione della carica è ovviamente irrilevante per cariche ~~dei~~ di questo ordine.

Fissato il C, si misura la forza in N (newton) e le distanze in metri. La costante k nella legge di Coulomb a questo punto è misurabile e vale

$$k = 8.9875 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

nel vuoto. Convenzionalmente si scrive

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove ϵ_0 è detta costante dielettrica (o permittività) del vuoto. Vale $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

2) CGS elettostatico

Si misurano distanze in cm, masse in grammi e tempo in secondi. Poi si impone $k = 1$ nella legge di Coulomb. Allora

$$|\vec{F}| = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

e la carica unitaria è quella per cui la forza tra due cariche unitarie poste a 1 cm di distanza vale 1 dyne (1 gram/sec²). Una tale carica è detta u.e.s., unità elettostatica, oppure statcoulomb.

La relazione tra le unità di carica nei due sistemi di misura è

$$1 C = 2.998 \times 10^9 \text{ u.e.s.}$$

Si può vedere facilmente così:

due cariche di 1 C a 1 cm di distanza danno luogo ad una forza

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = 8.9875 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \times \frac{1 \text{ C}^2}{10^{-4} \text{ m}^2} \\ &= 8.9875 \times 10^{13} \text{ N} \quad (\text{enorme!!}) \\ &= 8.9875 \times 10^{18} \text{ dyne} \end{aligned}$$

Quante u.e.s. sono necessarie per ottenere la stessa forza?

$$\begin{array}{l} \text{in dyne} \quad |\vec{F}| = \frac{q^2}{r^2} \\ \text{in (ues)}^2 \quad \text{in cm}^2 \end{array}$$

Allora se $r = 1 \text{ cm}$, si ha $q \text{ (in ues)} = \sqrt{F \text{ (in dyne)}}$

$$\text{cioè } q = \sqrt{8.9875 \times 10^{18}} \text{ ues} = 2.9979 \times 10^9 \text{ u.e.s.}$$

$$\text{ovvero } 1 C = 2.9979 \times 10^9 \text{ dyne e}$$

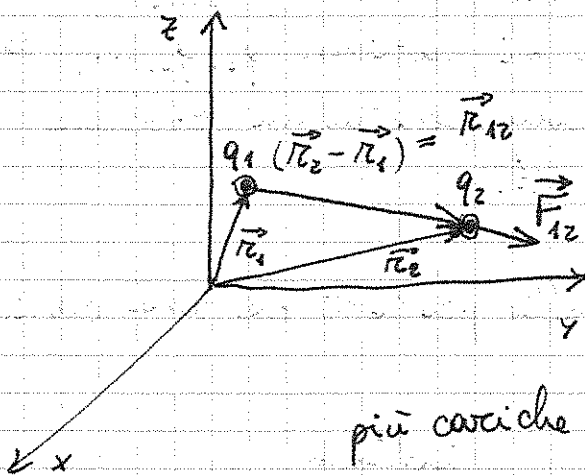
$$1 \text{ ues.} = 3.3356 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Esistono anche altri sistemi di unità di misura, ma qui non li trattiamo. È però importante riconoscerli nei testi dove sono usati.

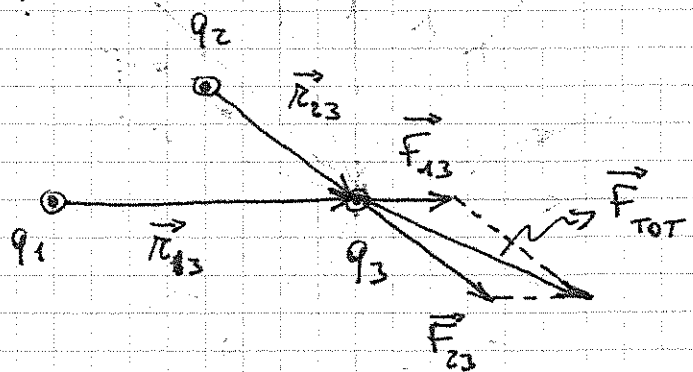
La scelta del sistema di unità di misura risolve la questione delle conversioni arbitrarie e la determinazione della costante k . Resta da sottolineare il contenuto fisico della legge di Coulomb:

- la direzione della forza secondo la congiungente
- la proporzionalità al prodotto $q_1 q_2$
- la proporzionalità inversa a r_{12}^2
- l'additività, nel senso del principio di sovrapposizione

due cariche:



più cariche:



CAMPO ELETTRICO

Assegnata una distribuzione di cariche q_1, q_2, \dots , poste in posizioni fisse nello spazio, si prende una carica di prova, q_p , in un punto \vec{r} . Il campo elettrico in \vec{r} è la forza prodotta dalla distribuzione di cariche q_1, q_2, \dots , sulla carica q_p , divisa per q_p .

Come per il campo gravitazionale, salvo che qui si hanno le cariche al posto delle masse.

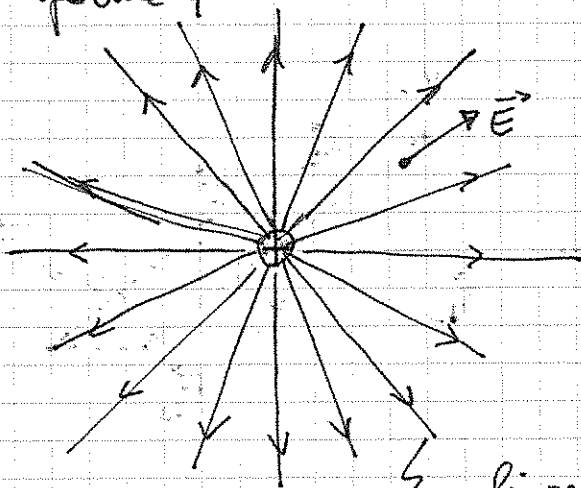
Il campo elettrico si indica con la lettera

\vec{E}

È un vettore, punto per punto \rightarrow campo vettoriale

Se si vuole che la definizione data sopra sia una definizione operativa, cioè indichi la procedura di misura di \vec{E} tramite l'uso di una carica di prova, allora è necessario che la carica di prova sia sufficientemente piccola da non perturbare la distribuzione di cariche q_1, q_2, \dots , con la sua presenza. Questo non pone però alcun problema concettuale nella definizione di \vec{E} .

Il campo \vec{E} più semplice è quello prodotto da una carica puntiforme q



isotropo

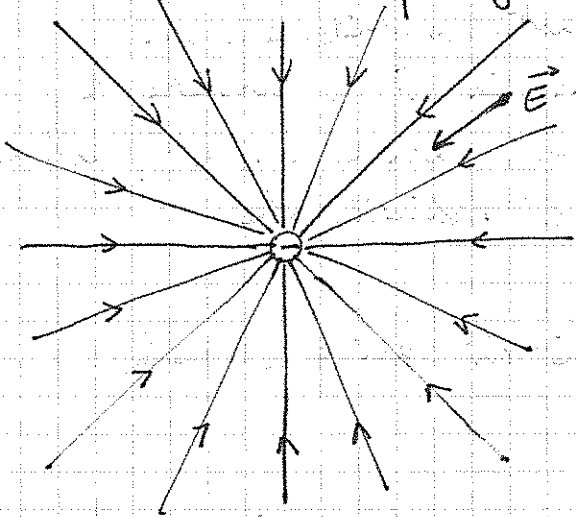
attrattivo per $q \leq 0$

repulsivo per $q > 0$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

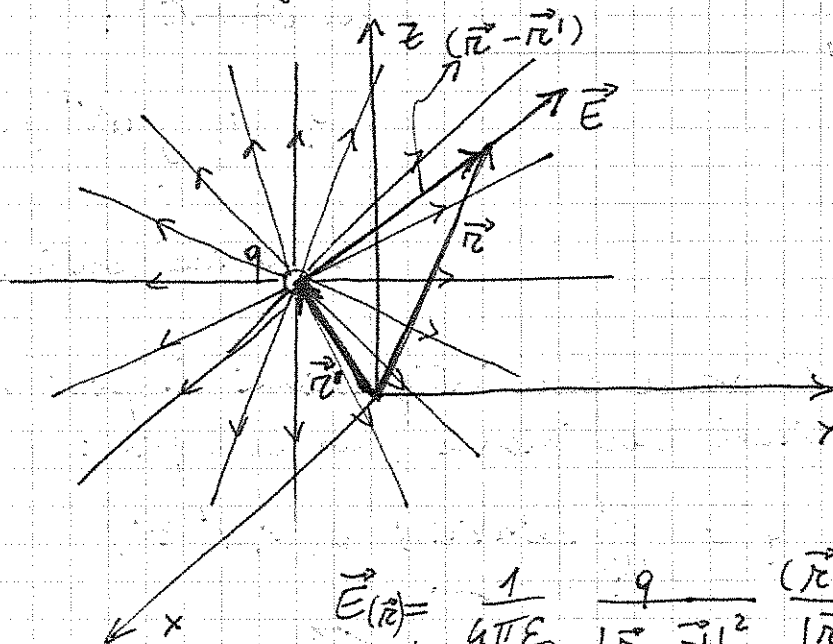
\rightarrow linee di forza

Per una carica q negativa:



Nel caso gravitazionale si
 avere solo attrazione, e
 il campo \vec{g} avere la
 stessa forma di questo
 e sinistra.

Se q non è nell'origine del sistema di coordinate:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Si può generalizzare al caso di più cariche q_1, q_2, \dots poste
 in $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$:

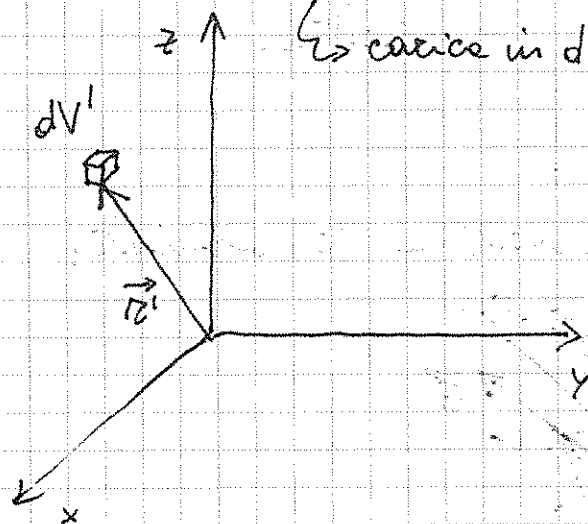
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Questa vale per cariche puntiformi discrete. Si può anche
 passare al limite di una distribuzione continua. Analis

giuntamente alla densità di particelle in un fluido si può introdurre una densità di carica locale. Basta considerare un volumetto infinitesimo dV' posto in \vec{r}' , e contare le cariche nel volumetto. Sia dq' la carica in dV' , allora la densità di carica $\rho(\vec{r}')$ è definita da

$$dq' = \rho(\vec{r}') dV'$$

↪ densità di carica (locale)
↪ carica in dV'



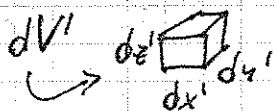
La carica totale in un volume finito V si trova integrando la densità:

$$q = \int_V dV' \rho(\vec{r}')$$

↪ carica contenuta in V

Si tenta di sapere fare integrazioni in più variabili. In coordinate cartesiane, ad esempio:

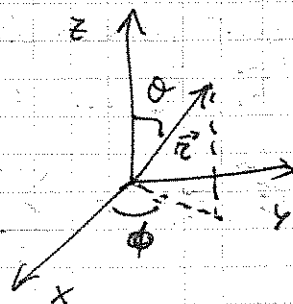
$$q = \iiint_V dx' dy' dz' \rho(x', y', z')$$



In coordinate polari invece:

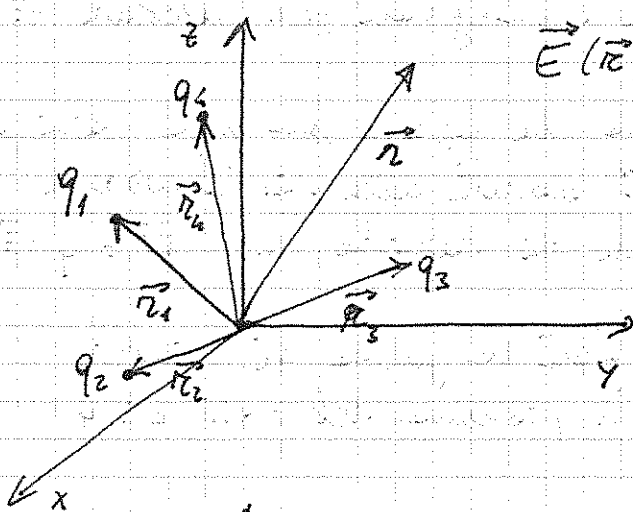
$$dV' = d\phi' d\theta' dr' \sin\theta' r'^2$$

$$\text{dove } \begin{cases} x' = r' \sin\theta' \cos\phi' \\ y' = r' \sin\theta' \sin\phi' \\ z' = r' \cos\theta' \end{cases}$$



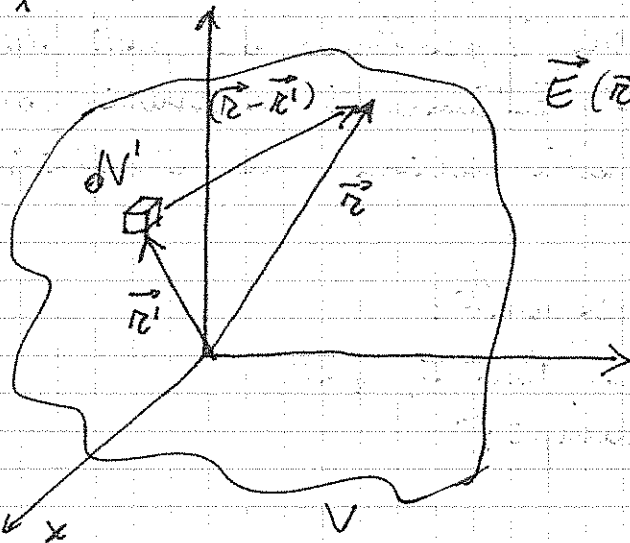
Vedremo esempi espliciti più avanti.

Per esprimere il campo elettrico associato ad una distribuzione continua di cariche basta generalizzare l'espressione precedente ottenuta per cariche discrete



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$\begin{array}{ccc} q_i & & \vec{r}_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho dV' & & \vec{r}' \end{array}$$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

l'indice discreto diventa una variabile continua e la somma diventa un integrale.

Attenzione che sia la somma che l'integrale si intendono calcolati per ciascuna componente di $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Si tratta quindi di 3 somme o di 3 integrali distinti.

Esempio: la componente x del campo \vec{E} in \vec{r} può essere calcolata così:

$$E_x(\vec{r}) = \int_V \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\text{dove } |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

In sintesi:

dato una distribuzione di cariche

↳ si fanno somme o integrali per calcolare \vec{E}

↳ la forza che agisce su una carica q in \vec{r} dovuta alle distribuzioni iniziali di cariche è $\vec{F} = q\vec{E}$

↳ dato la forza si risolve il problema del moto di q

Si noti però che per risolvere il problema del moto della particella di carica q non è strettamente necessario conoscere la distribuzione delle altre cariche, ma è sufficiente conoscere il campo \vec{E} .

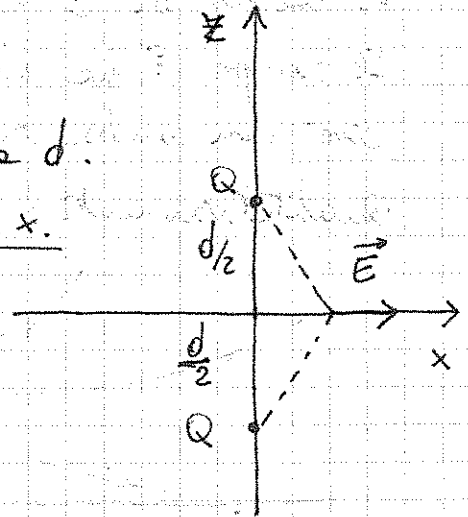
Letture suggerite in proposito:

Feynman, Vol II, Part I, 1-5

"Cos'è sono i campi?"

ESERCIZI

- 1) Due cariche uguali Q e distanza d .
Calcolare il campo \vec{E} lungo l'asse x .



Per simmetria deve essere

$$\vec{E} = \hat{x} E_x(x)$$

Inoltre

$$E_x(x) = \sum_{i=1,2} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$$

quindi

$$E_x(x) = \frac{Qx}{2\pi\epsilon_0 \left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$$

* Vale 0 in $x=0$ OK

* Nel limite $x \rightarrow \infty$ si ha

$$E_x(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{d^2}{x^2}\right)$$

correzione negativa
(le cariche sono più
distanti che se
fossero in $x=0$)
OK

termine dominante in $\frac{1}{x^2}$, come
se fosse una carica puntiforme
pari a $2Q$ in $x=0$. OK

* Il campo ha verso opposto in $x \rightarrow -x$ OK

Il calcolo del campo \vec{E} lungo l'asse z è altrettanto facile.

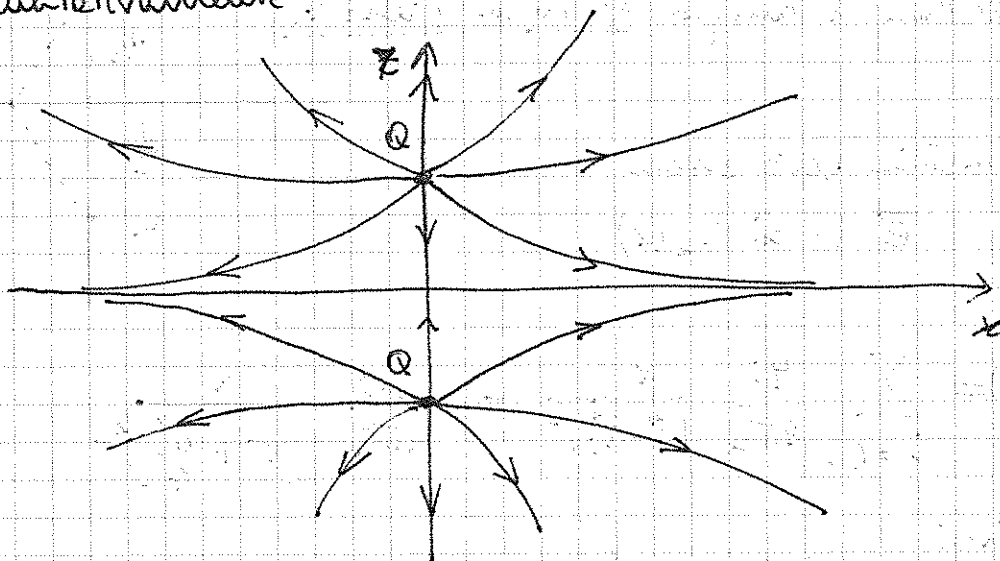
Per simmetria deve essere $\vec{E} = \hat{z} E_z(z)$

Si ha

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(z - d/2)}{|z - d/2|^3} + \frac{(z + d/2)}{|z + d/2|^3} \right]$$

Il calcolo di \vec{E} fuori dagli assi è un po' più complicato.
 Il campo \vec{E} ha simmetria assiale attorno all'asse z ,
 cioè non cambia ruotando attorno all'asse.

Qualitativamente:



2] Due cariche opposte $\pm Q$ e distanza d .

Calcoliamo il campo \vec{E} lungo l'asse x .

Per simmetria, le componenti x
 del campo \vec{E} dovute a $+Q$ e $-Q$
 si cancellano a vicenda, mentre
 le componenti z sono concordi.

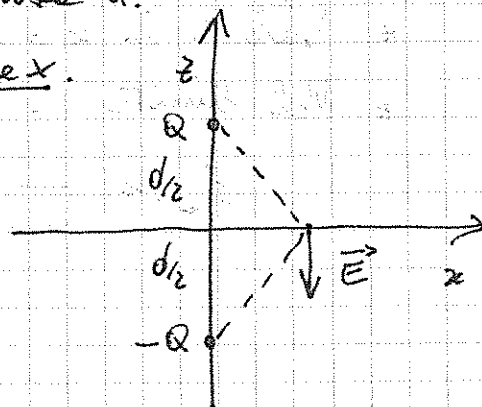
dunque

$$\vec{E} = \hat{z} E_z(x)$$

e il calcolo è semplice:

$$E_z(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-d/2)}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}} + \frac{(-Q)}{4\pi\epsilon_0} \frac{d/2}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$

$$= -\frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$



Stavolta il campo nell'origine non è nullo, è punto
 dalla carica $+$ alla carica $-$.

Inoltre, per $x \rightarrow \infty$ si ha

$$E_z(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} - \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{d^2}{x^2} \right)$$

Il termine dominante decresce come $1/x^3$, più rapidamente che nel caso delle due cariche di segno uguale. Infatti, la distribuzione con cariche opposte è neutra, ed è giusto che asintoticamente dia un campo che si annulla più velocemente di quello di una distribuzione carica.

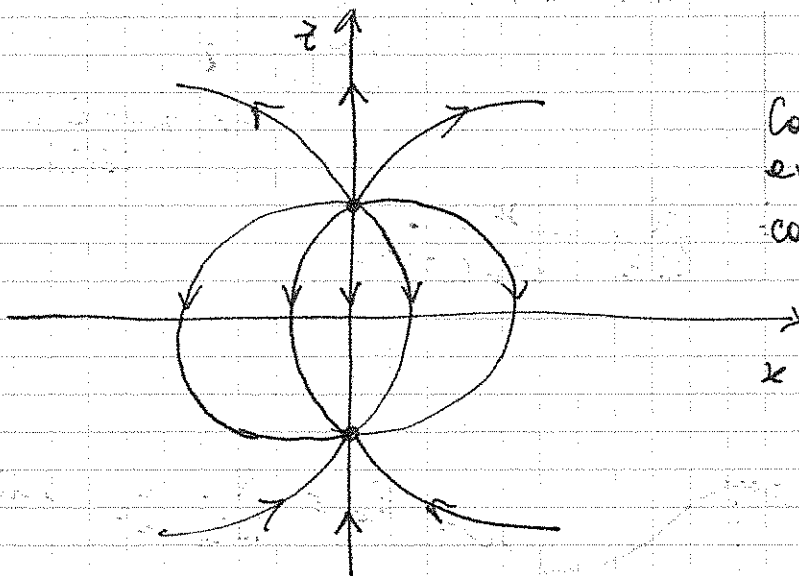
Discorso analogo vale per il campo \vec{E} lungo l'asse z :

$$\vec{E} = \hat{z} E_z(z)$$

con

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - d/2}{|z - d/2|^3} - \frac{z + d/2}{|z + d/2|^3} \right] \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{2Qd}{4\pi\epsilon_0 z^3}$$

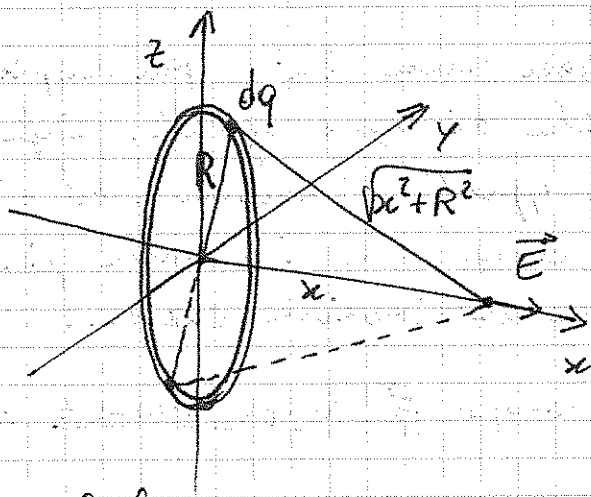
La forma qualitativa del campo è questa:



Come vedremo più avanti si tratta del campo di un dipolo elettrico.

3] Carica Q distribuita uniformemente su un anello di raggio R .

Calcolare \vec{E} sull'asse dell'anello.



Per simmetria \vec{E} è diretto lungo l'asse (contributi perpendicolari si compensano).

$$\vec{E} = \hat{x} E_x(x)$$

Si calcola così:

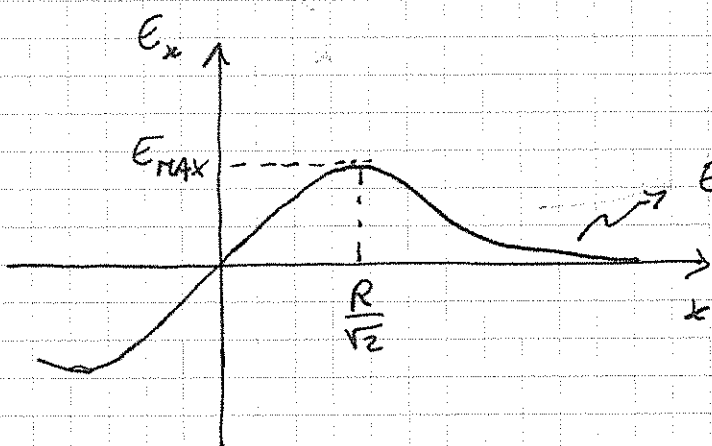
$$E_x(x) = \int_{\text{anello}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \int_{\text{anello}} dq$$

anello

→ questa è la carica totale Q

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



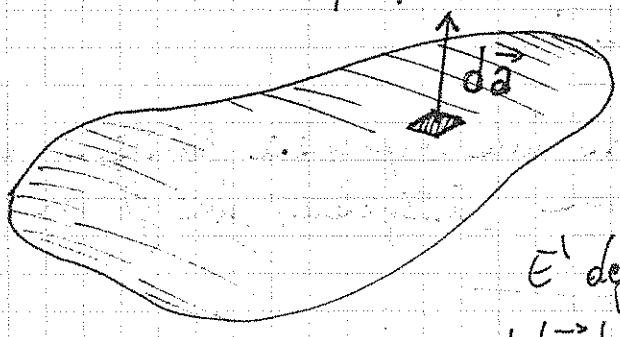
$$E_x \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \text{ asintoticamente}$$

Per $x \gg R$, l'anello è visto come una carica puntiforme Q

Strumenti matematici: CAMPI VETTORIALI

Per andare avanti con la teoria ci servono alcuni strumenti matematici che ci permettano di lavorare con i campi vettoriali in modo intelligente.

* Elemento di superficie



$d\vec{\sigma}$ è un vettore che rappresenta un elemento di superficie infinitesimo.

È definito in modo tale che

$$|d\vec{\sigma}| = \text{area della superficie infinitesima}$$

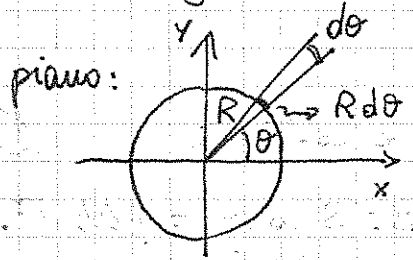
$$\frac{d\vec{\sigma}}{|d\vec{\sigma}|} = \hat{n} = \text{versore perpendicolare all'elemento di superficie}$$

Si può trovare scritto anche così:

$$d\vec{\sigma} = \hat{n} dS$$

\hookrightarrow area
 \hookrightarrow versore

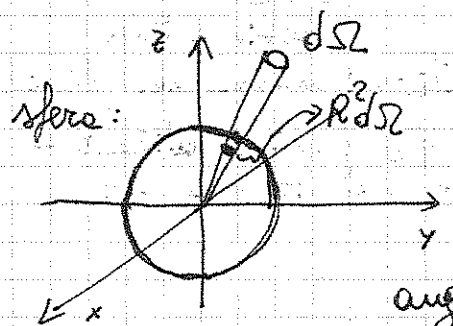
* Angolo solido



angolo piano θ (in radianti)

$$\theta = \frac{\text{lunghezza arco sottesa}}{\text{raggio}}$$

$$\text{angolo giro} = 2\pi$$



angolo solido Ω (in steradiani)

$$\Omega = \frac{\text{area superficie sottesa}}{\text{raggio al quadrato}}$$

$$\text{angolo totale} = 4\pi$$

* Flusso di un campo vettoriale

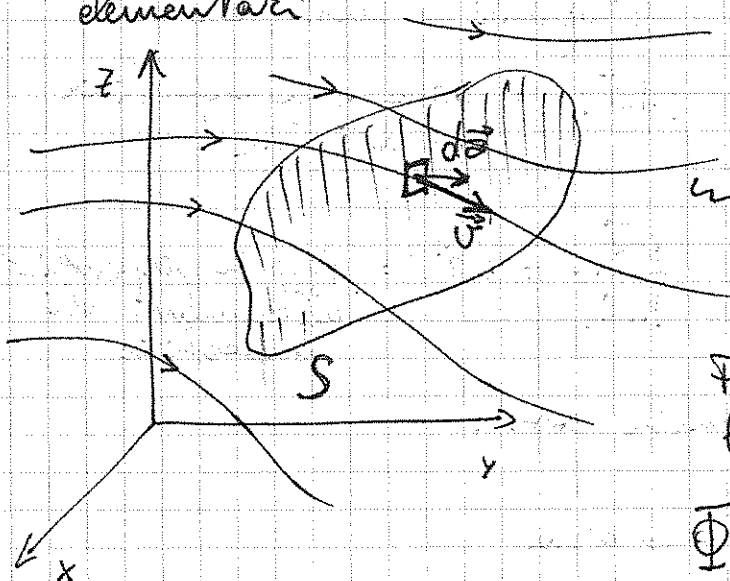
Sia $\vec{v}(\vec{r})$ un campo vettoriale generico

Sia $d\vec{\alpha}$ un elemento di superficie posto in \vec{r} .

Allora il flusso elementare del campo \vec{v} attraverso la superficie $d\vec{\alpha}$ è dato da

$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{\alpha}$$

Il flusso totale attraverso una superficie finita S è semplicemente la somma (integrale) dei flussi elementari

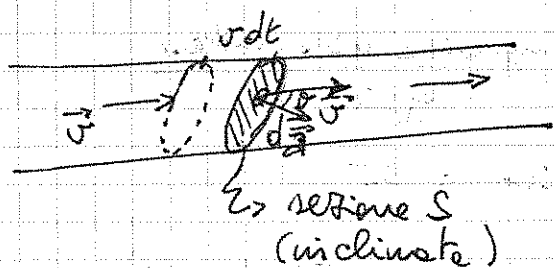


→ linee di forza del campo \vec{v}

Flusso del campo \vec{v} attraverso la superficie S :

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{\alpha}$$

Il flusso Φ può essere calcolato per un campo qualsiasi. Ha un'interpretazione semplice nel caso in cui \vec{v} sia il campo di velocità di un fluido



→ sezione S (inclinata)

\vec{v} uniforme e costante flusso

$$\Delta m = \rho \underbrace{\Delta t}_{\text{sezione tubo}} S \cos \theta = \rho \Delta t \vec{v} \cdot \vec{S}$$

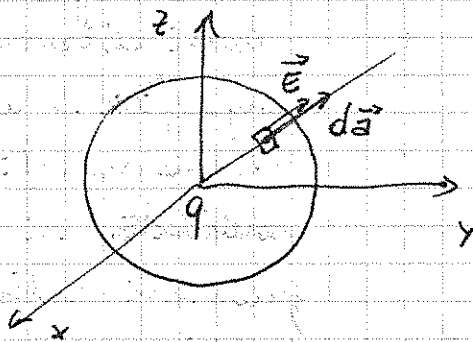
↓ densità di massa del fluido

→ massa che fluisce attraverso il tubo nel tempo Δt

FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO

Partiamo dal caso più semplice: campo di una carica puntiforme e flusso attraverso una superficie sferica con la carica al centro.

Assumiamo valide le leggi di Coulomb



flusso elementare

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

con $\vec{E} = E \hat{r}$
e $d\vec{a} = da \hat{r}$ } paralleli
e concordi
se q è
positiva

dunque $d\Phi = E da$

con $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

Il flusso totale sulla superficie sferica:

$$\Phi = \int_{\text{sfera}} E da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_{\text{sfera}} da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

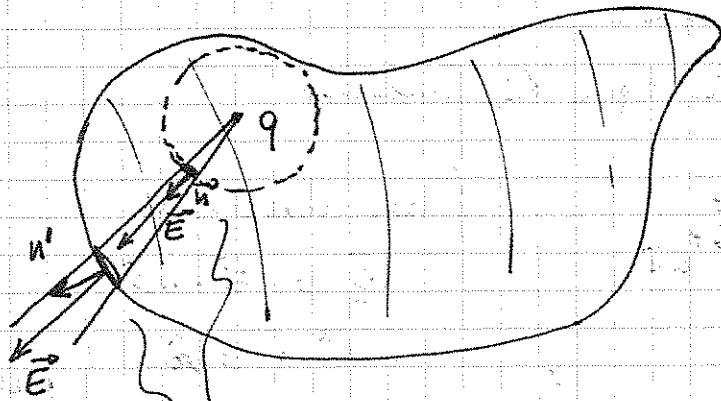
$\underbrace{\int_{\text{sfera}} da}_{4\pi r^2}$

dunque $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

note: non dipende da r dato che il campo diminuisce come $\frac{1}{r^2}$ e l'area aumenta come r^2

altre note: avendo scelto convenzionalmente come verso di $d\vec{a}$ quello uscente dal volume chiuso, il flusso è positivo per $q > 0$ ed è negativo se $q < 0$. Quindi la $\Phi = q/\epsilon_0$ vale in entrambi i casi, il segno essendo fissato dal segno di q .

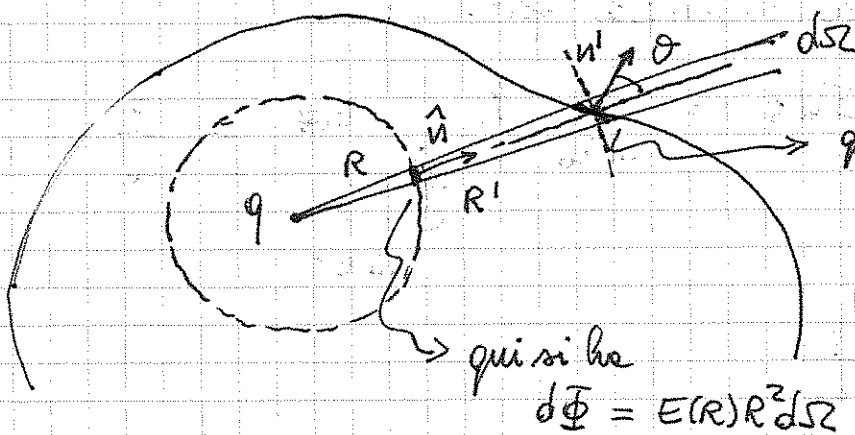
Caso apparentemente più complicato: carica puntiforme q racchiusa da una superficie qualsiasi



si può mostrare che i flussi sono uguali

Basta confrontare i flussi attraverso la superficie S assegnata ed una superficie sferica ~~centrata~~ di raggio qualsiasi centrata nella carica.

Concentriamoci su un angolo solido generico $d\Omega$



qui si ha

$$d\Phi = E(R) R^2 d\Omega$$

qui si ha:

$$d\Phi' = E(R') R'^2 d\Omega$$

$$\left(\text{che viene da } \underbrace{\vec{E} \cdot \hat{n}' dS'}_{E \frac{dS' \cos \theta}{R'^2 d\Omega}} \right)$$

D'altra parte

$$\frac{E(R')}{E(R)} = \frac{R^2}{R'^2}$$

Quindi

$$d\Phi = E(R) R^2 d\Omega = E(R') R'^2 d\Omega = d\Phi'$$

Stesso flusso per ogni superficie sottesa da $d\Omega$

\Rightarrow Stesso flusso sulla superficie S e sulla sfera.

Abbiamo trovato che se la carica è dentro S allora

$$\Phi_S = \Phi_{\text{sfera}}$$

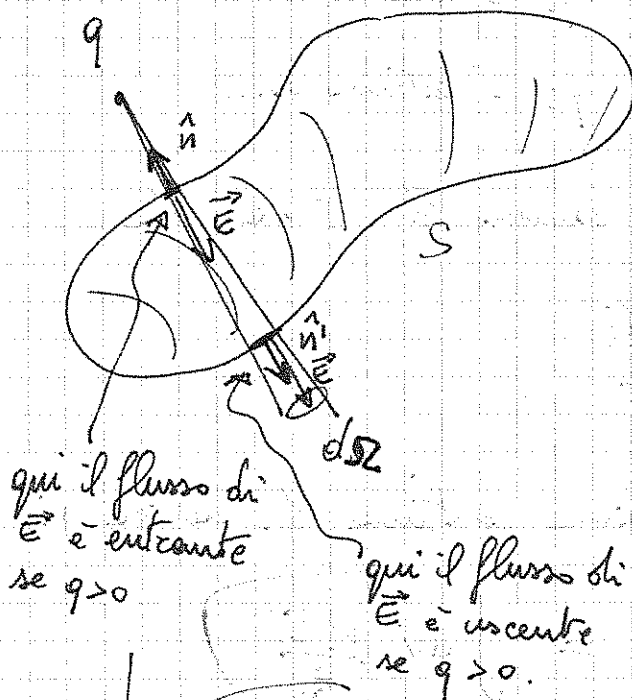
e sappiamo da prima che $\Phi_{\text{sfera}} = q/\epsilon_0$

Dunque

$$\Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

per qualsiasi superficie S che racchiuda q .

E se q è fuori da S ?



per ogni $d\Omega$ il flusso complessivo è nullo

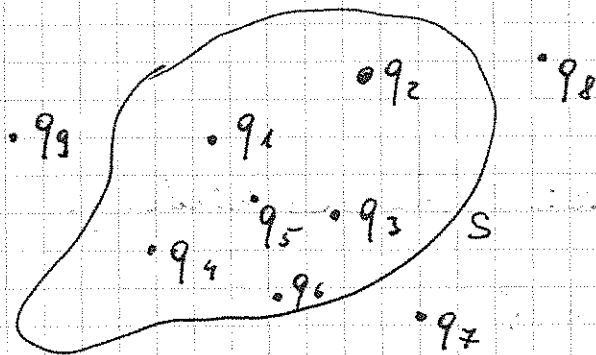
integrando sulla superficie S chiusa si trova un flusso totale nullo

Dunque $\Phi_S = 0$ se la carica è esterna.

Si applica lo stesso ragionamento di prima per un generico angolo solido infinitesimo $d\Omega$.

Stavolta però i due flussi, pur avendo ugual modulo, hanno segno opposto, perché i versori \hat{n} e \hat{n}' sono opposti.

Nel caso di più cariche basta applicare il principio di sovrapposizione. Il campo \vec{E} è la somma dei campi prodotti da ciascuna carica. Il flusso di ciascuno di essi attraverso una superficie chiusa S è pari a q/ϵ_0 se la carica è interna ed è pari a zero se q è esterna.



$$\Phi_i = \begin{cases} \frac{q_i}{\epsilon_0} & \text{se } q_i \text{ è dentro } S \\ 0 & \text{se } q_i \text{ è esterno ad } S \end{cases}$$

In sintesi, il flusso del campo \vec{E} è dato da

$$\Phi = \sum_{\text{cariche interne}} \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Nel caso di una distribuzione continua di carica si ha

$$\Phi = \int \frac{dq}{\epsilon_0} = \int_V dV \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

\int integrale sulla carica interna

Volume racchiuso dalla superf. S

Queste relazioni costituiscono la **LEGGE DI GAUSS**, rispettivamente per distribuzioni di cariche discrete e continue. Detti a parole:

Il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa S è pari alla somma algebrica delle cariche racchiuse da S divise per ϵ_0 .

Commenti sulla legge di Gauss:

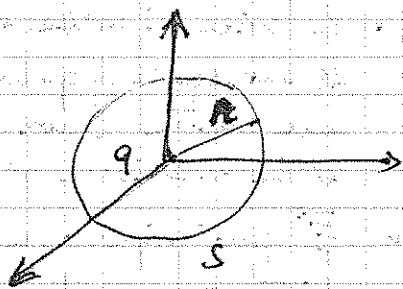
- * Può essere dedotta, come abbiamo fatto, dalla legge di Coulomb + il principio di sovrapposizione. Contiene più o meno le stesse informazioni fisiche

In meno rispetto a Coulomb: la legge di Coulomb dice esplicitamente che il campo prodotto da una singola carica è radiale e isotropo. Gauss non lo dice e, infatti, potrebbe valere anche per campi anisotropi.

In più rispetto a Coulomb: la legge di Coulomb vale per due cariche ferme (elettostatica) mentre Gauss, come si vedrà, vale anche in elettodinamica.

- * Si può ribaltare il ragionamento: assumere che valga la legge di Gauss + il principio di sovrapposizione + l'isotropia di un campo prodotto da una carica puntiforme, e dimostrare che allora vale la legge di Coulomb.

Basta mettere una carica q nell'origine di un sistema di riferimento e disegnare una "superficie di Gauss" sferica di raggio r , con q al centro.



Il campo può dipendere solo da r . Dunque è costante in modulo sulla superficie S .

Il campo deve essere radiale ($\vec{E} = \hat{r} E(r)$ (sulla sfera non esistono direzioni privilegiate ~~per~~ per eventuali componenti tangenziali))

Dunque il flusso può essere scritto così:

$$\Phi = \underbrace{E(r)}_{\text{costante in modulo sulla superficie}} \underbrace{4\pi r^2}_{\text{area della superficie}}$$

La legge di Gauss impone che $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$

Combinando le due informazioni si ha

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ovvero

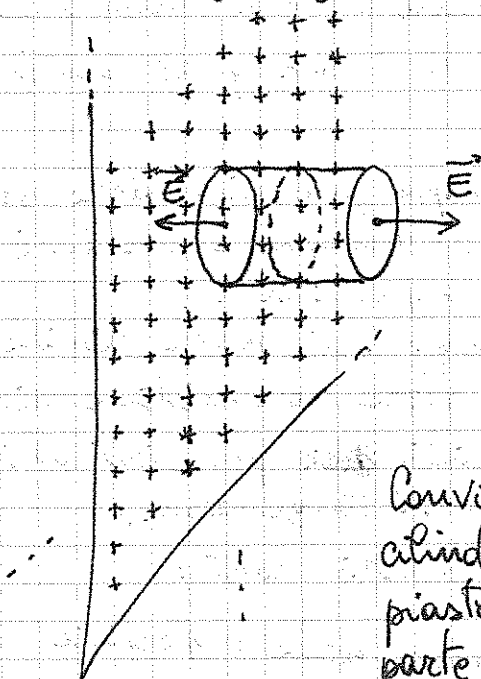
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

che porta direttamente alla legge di Coulomb per la forza tra due cariche.

* Cambiando la costante e rimpiazzando la carica con la massa ed \vec{E} con \vec{g} , la legge di Gauss vale anche per il campo gravitazionale, che pure va come $1/r^2$.

* La legge di Gauss semplifica il calcolo del campo \vec{E} in molti casi, in particolare quelli in cui ci si può aiutare con simmetrie evidenti.

ESEMPIO 1 lastre piane infinite e cariche uniformemente con densità superficiale di carica σ .



Per simmetria:

- le linee di forza del campo devono essere perpendicolari alla lastra (non vi è nessuna altra direzione privilegiata)
- \vec{E} può dipendere solo dalle distanze dalle piastre.

Conviene disegnare una "superficie di Gauss" cilindrica, con due basi parallele alle piastre, l'una a distanza x da una parte, e l'altra alle stesso distanza dalla parte opposta.

Il flusso di \vec{E} attraverso le superfici laterali è nullo perché \vec{E} è perpendicolare a tali superfici. Il flusso a destra vale

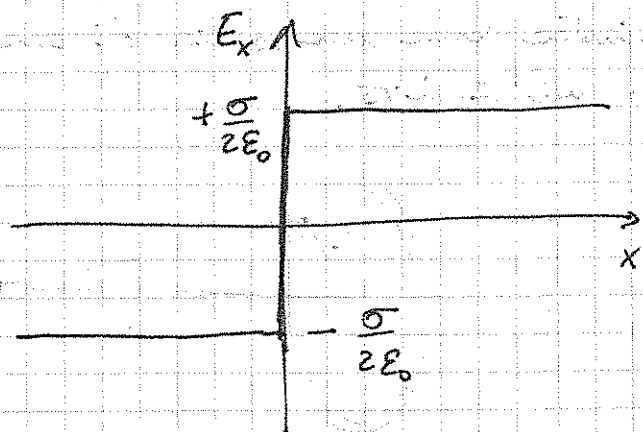
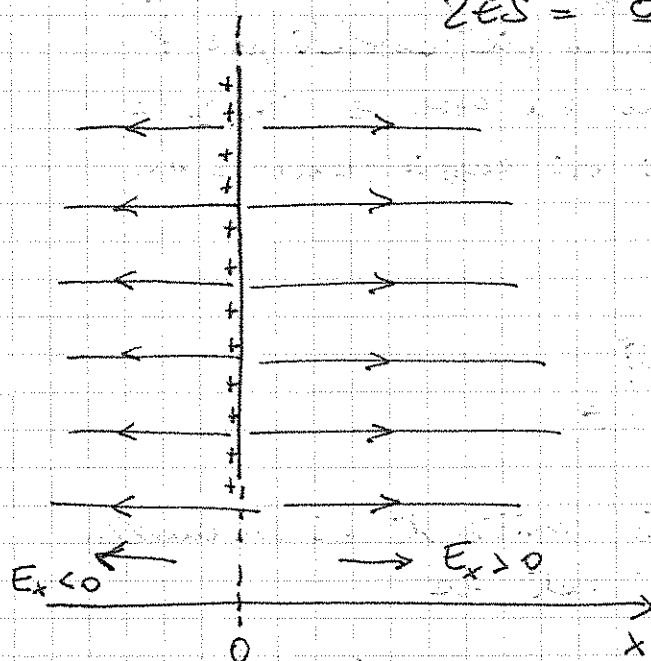
$$ES$$

dove $E(x)$ è la componente di \vec{E} perpendicolare alla piastra (le altre componenti essendo nulle) calcolata in x , ed S è l'area della base del cilindro. Il flusso a sinistra è ancora ES , con lo stesso segno essendo ancora un flusso uscente (sono cambiati sì il segno di \vec{E} , che il segno del vettore della superficie, in modo che il prodotto non cambia segno).

Il flusso totale è quindi $2ES$

La legge di Gauss impone che Φ sia uguale alla carica interna diviso ϵ_0 . Dunque $\Phi = \sigma S / \epsilon_0$. Eguagliando i due risultati:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Si osservi che E non dipende dalle distanze x dalle piastre. Come può essere?

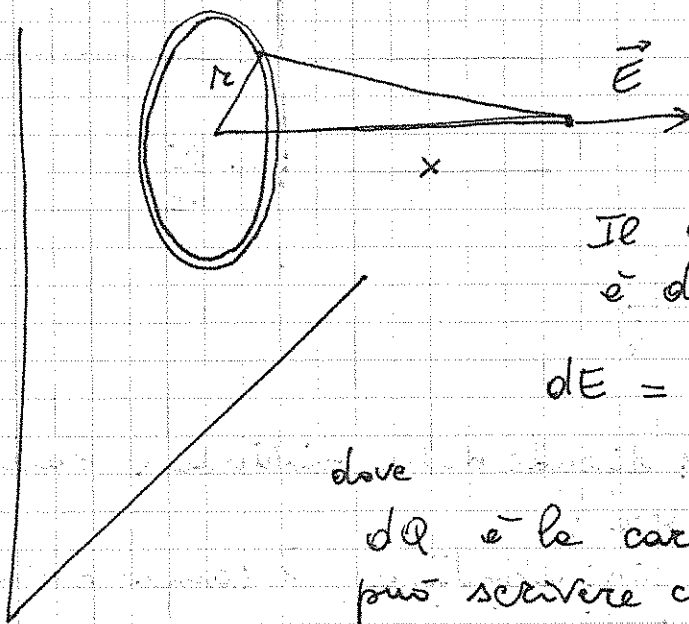
Intuitivamente: più ci si allontana, il campo dovuto ad una certa zona delle piastre diminuisce come $1/x^2$, ma l'area delle zone che contribuisce al campo cresce come x^2 .

Altra osservazione: il campo ha una discontinuità sulla piastra. Nei casi reali la piastra ha sempre uno spessore finito e la discontinuità non c'è. È una questione di scale di lunghezza rilevanti al problema che si considera.

Se la piastra ha una dimensione laterale finita, diciamo L , anziché infinite, allora l'espressione trovata vale solo per distanze x dalla piastra molto minori di L , per cui sono trascurabili gli effetti di bordo. Al contrario, se $x \gg L$, la piastra produce un campo sempre più simile a quello di una carica puntiforme.

Se le cariche sulla piastra sono negative cambia solo il verso del campo (freccia verso la piastra).

Lo stesso problema, se risolto direttamente dalla legge di Coulomb, richiede qualche passaggio in più. Comincierei partendo dall'espressione che avevamo già calcolato per il campo prodotto da un anello sul suo asse e vedere la piastra come una serie di anelli di raggio crescente da 0 all'infinito.



Il contributo di un anello è dato da

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

dove

dQ è la carica sull'anello, che si può scrivere così:

$$dQ = \sigma \underbrace{2\pi r dr}_{\text{area dell'anello}}$$

Allora $dE = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi \epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$

e il campo totale è

$$E = \int_0^{\infty} dr \cdot \frac{\sigma 2\pi r}{4\pi \epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{x}\right) \frac{r}{x} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r}{x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} dy \frac{y}{(1+y^2)^{3/2}}$$

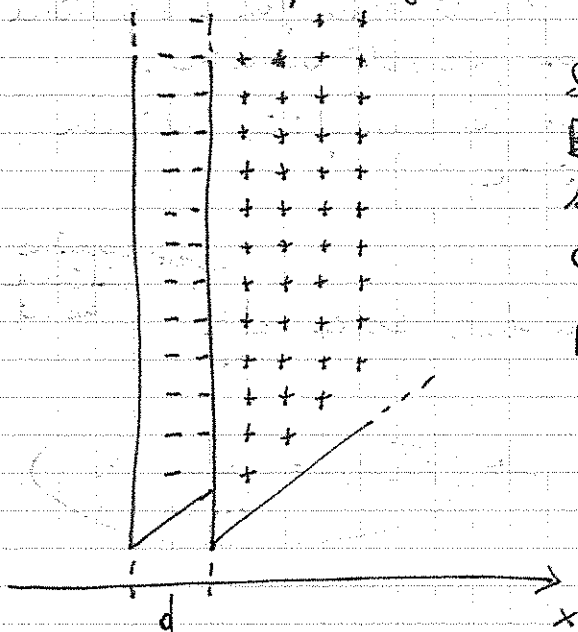
$$\leftarrow \begin{aligned} y &= 1 + y^2 \\ dy &= 2y dy \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_1^{\infty} dy \frac{1}{y^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[y^{-1/2} \right]_1^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ come si voleva}$$

ESEMPIO 2 Doppie piastre di cariche opposte.

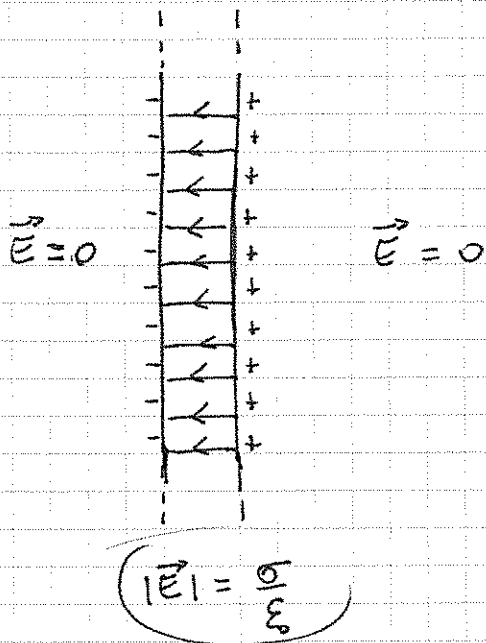
È una semplice generalizzazione del caso precedente



Stesse σ ma di segno opposto.

Basta sommare i campi delle singole piastre con i segni appropriati.

$$\text{Risultato: } \begin{cases} |\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \text{tra le piastre} \\ \vec{E} = 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

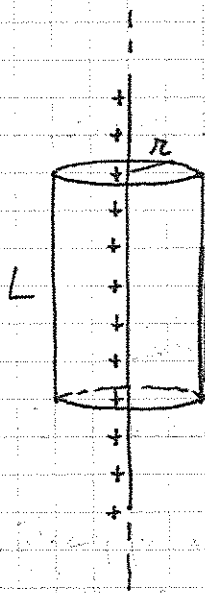


Nei casi realistici di piastre finite con effetti di bordo:



ESEMPIO 3

Filo uniformemente carico con densità di carica lineare λ .



Per simmetria \vec{E} è puramente radiale (perpendicolare al filo) e isotopo attorno all'asse.

Conviene introdurre una "superficie di Gauss" cilindrica con l'asse sul filo, e altezza L .

Dunque, il flusso di \vec{E} sulle facce superiore e inferiore è nullo per ortogonalità.

Il flusso attraverso la superficie laterale cilindrica è dato da

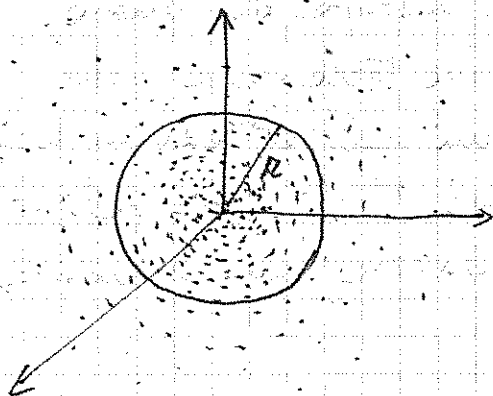
$$\Phi = 2\pi r L E(r)$$

Per la legge di Gauss questo flusso deve valere $\frac{\lambda L}{\epsilon_0}$ ^{carica interna al cilindro}

Dunque

$$2\pi r L E(r) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

ESEMPIO 4 Distribuzione sferica



supponiamo che la distribuzione di cariche abbia densità $\rho(r)$ che dipende solo dalla distanza da un punto (che scegliamo come origine del sist. di riferimento) e che non dipenda dagli angoli.

Per simmetria il campo \vec{E} prodotto dalla distribuzione ~~radiale~~ isotropa può essere solo radiale

$$\vec{E} = \hat{r} E(r)$$

e $|E|$ può dipendere solo da r .

Scegliamo una "superficie di Gauss" sferica di raggio r .

Allora
$$\Phi = 4\pi r^2 E(r)$$

D'altra parte, per la legge di Gauss deve valere

$$\Phi = q_{\text{interna}} / \epsilon_0$$

dove
$$q_{\text{interna}} = \int_{\text{sfera}} dV \rho(\vec{r}) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r)$$

Perciò

$$4\pi r^2 E(r) = q_{\text{interna}} / \epsilon_0$$

che implica

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{interna}}}{r^2}$$

è lo stesso campo prodotto da una carica puntiforme posta nell'origine e pari alla somma delle cariche nella sfera!!

Il caso della carica puntiforme q è un caso particolare di questo esempio ($\rho(r)$ singolare all'origine e nulla altrove).

Si noti che vale il risultato analogo per il campo gravitazionale prodotto da una distribuzione isotropa di massa, come nel caso dei pianeti, o del sistema terra-luna, che si comportano come oggetti puntiformi nell'attrazione reciproca (Era un grosso problema per Newton, che faticò molto a darne una dimostrazione diversa, non avendo a disposizione la legge di Gauss)

Caso particolare: ρ uniforme entro una sfera di raggio R .

Allora $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ carica della sfera

$q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ carica entro una sfera di raggio $r < R$

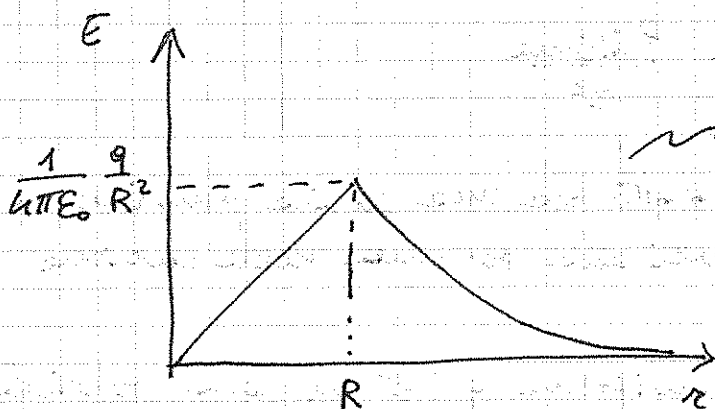
Per $r < R$ la legge di Gauss implica che

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{int}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

da cui $E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$

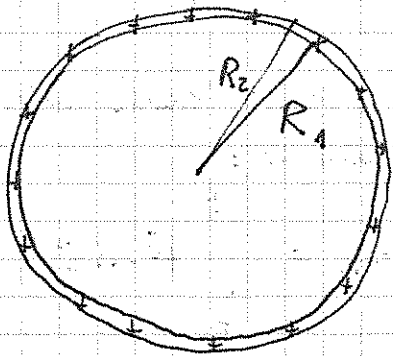
Per $r > R$ invece, $q_{int} = q$ e il campo è

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



→ stessa forma del campo gravitazionale in un pianeta di densità uniforme.

Altro caso particolare : guscio sferico



$\rho \neq 0$ solo in $R_1 < r < R_2$

La legge di Gauss dice che

$$\vec{E} = 0 \text{ per } r < R_1$$

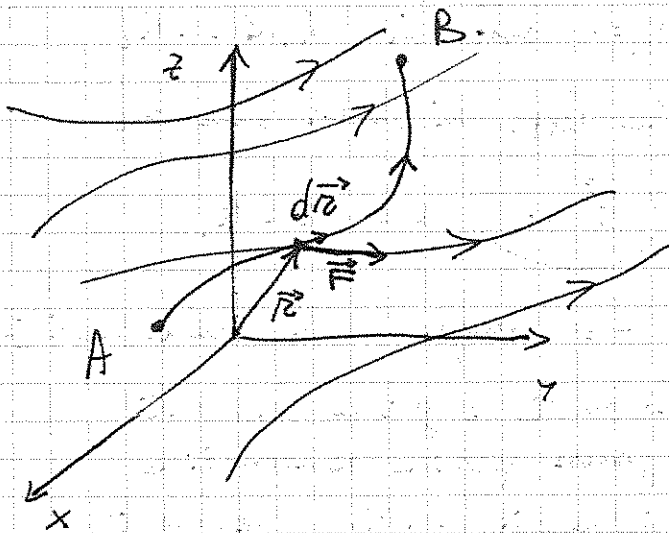
↳ campo nullo nella cavità!!

Per dimostrarlo basta scegliere la solita superficie di Gauss sferica concentrica e prenderla di raggio $r < R_1$. La carica interna è nulla \rightarrow il flusso è nullo \rightarrow per simmetria il campo stesso è nullo.

Questo esempio suggerisce una verifica sperimentale: misurare il campo elettrico entro una cavità sferica. È più oscuro delle bilancie di Cavendish.

POTENZIALE ELETTRICO

Riprendiamo quanto detto all'inizio sul campo gravitazionale.

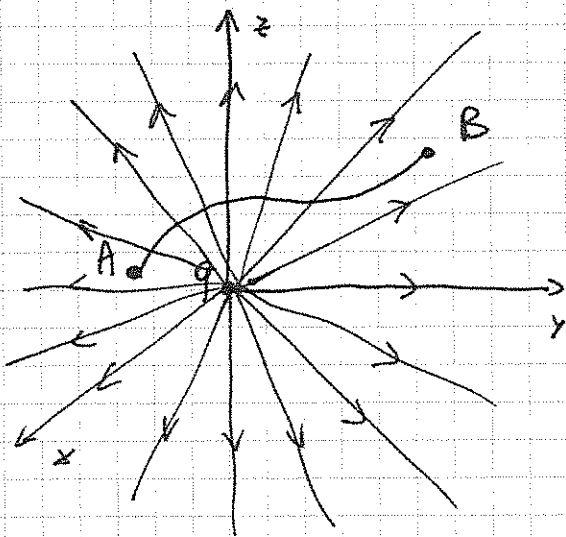


lavoro fatto dalle forze del campo:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se \vec{F} dipende solo da \vec{r} e il lavoro L_{AB} non dipende dalla scelta del percorso, ma solo da A e B, allora \vec{F} è detto un campo conservativo.

Consideriamo il campo \vec{E} generato da una carica q puntiforme posta nell'origine del sistema di riferimento. È un campo centrale ($\vec{E} = \hat{r} E$). La forza è $q_p \vec{E} = \vec{F}$



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} F dr$$

↳ se \vec{F} è radiale, il prodotto scalare si riduce al prodotto di F per la parte radiale dello spostamento

Il $\int_{r_A}^{r_B} F(r) dr$ dipende solo da r_A e r_B e non dal percorso scelto.

↳ la forza è conservativa

Il lavoro L_{AB} è quello fatto dalle forze del campo per spostare la carica di prova q_p . Si può allora

definire il lavoro per unità di carica come W_{AB}/q_p .
Essendo $\vec{E} = \vec{F}/q_p$, risulta che il lavoro per unità di carica è

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Tale grandezza è funzione solo di \vec{r}_A e \vec{r}_B .

Cio è vero per un campo \vec{E} elettrostatico qualsiasi, dato che il campo prodotto da una distribuzione di cariche generica può essere sempre visto come la somma dei campi prodotti da singole cariche, ciascuno di essi essendo conservativo.

Per un qualsiasi campo elettrostatico \vec{E} possiamo perciò definire una nuova funzione scalare $\varphi(\vec{r})$, avente le dimensioni di lavoro per unità di carica (o energia per unità di carica), tale che

$$\varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

questa è detta
differenza di potenziale elettrico
 $\Delta\varphi$

La differenza di potenziale elettrico tra i punti \vec{r}_A e \vec{r}_B è il lavoro fatto contro le forze elettrostatiche per portare una carica di prova, q_p , da A a B, diviso per la carica stessa. Il segno - nella definizione, davanti all'integrale, è puramente convenzionale. Il segno di $\Delta\varphi$ non dipende dal segno di q_p , dato che il segno si elide facendo il rapporto tra il lavoro e la carica q_p .

Dato che il potenziale viene definito tramite un integrale su un percorso $A \rightarrow B$, ne segue che la funzione $\varphi(\vec{r})$ è definita a meno di una costante arbitraria. Solo la differenza

$[\varphi(\vec{r}_B) - \varphi(\vec{r}_A)]$ è data nella definizione. Questo non deve preoccupare, dato che tutte le predizioni della teoria riguardano differenze di potenziale e non valori assoluti dello stesso.

Per questo motivo si è pure liberi di scegliere un punto arbitrario A come riferimento per il calcolo di $\Delta\varphi$, assegnando ad esso un valore convenzionale del potenziale $\varphi(\vec{r}_A)$, così che si possa scrivere

$$\varphi(\vec{r}_B) = \varphi(\vec{r}_A) - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$
 \hookrightarrow fisso arbitrariamente

In forma più generale, individuando la coordinate di B come la variabile indipendente della funzione φ , si può scrivere

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_A^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \text{cost.}$$

Esempio: se la distribuzione di cariche che genera il campo \vec{E} occupa una regione limitata dello spazio, allora conviene prendere A come un qualunque punto a distanza infinite e porre $\varphi_A = 0$. In tal caso

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

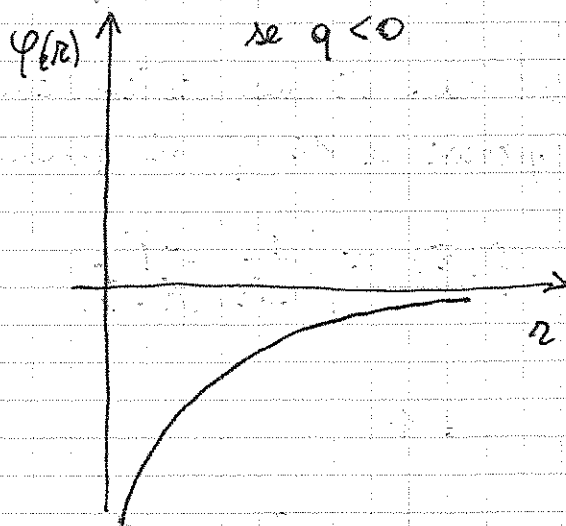
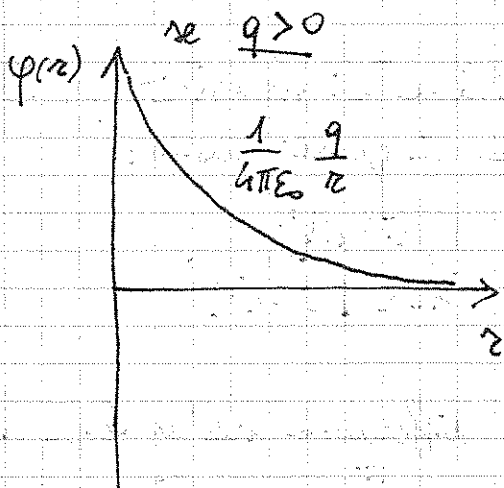
Il caso più semplice è quello del campo prodotto da una carica puntiforme q posta nell'origine, per il quale

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

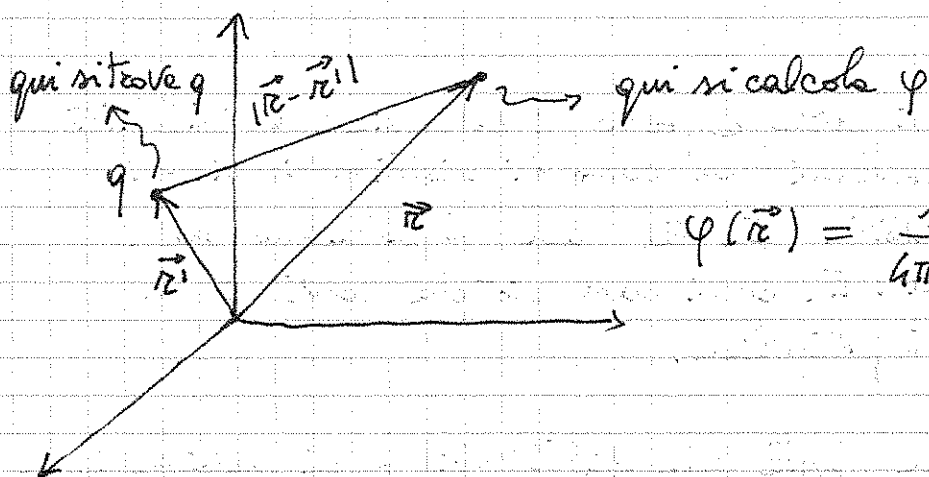
Da cui segue

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r dr - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Mentre il modulo del campo diminuisce come $1/r^2$, il potenziale diminuisce come $1/r$.



Se la carica q che genera il campo non è nell'origine, ma si trova in \vec{r}_1 , la forma del potenziale sarà la stessa, proporzionale a $1/\text{distanza}$, salvo che la distanza è ora $|\vec{r} - \vec{r}_1|$.



Se poi le cariche che generano il campo sono molte (q_1, q_2, \dots) e si trovano in $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$, basta applicare il principio di sovrapposizione ai vari campi che lo compongono.

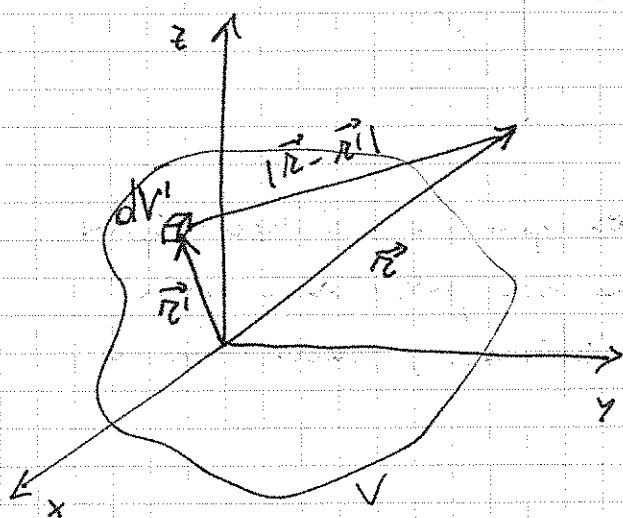
Si trova così che

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Qui si intende ancora che il riferimento A è all'infinito, cioè "molto lontano da tutte le cariche della distribuzione che genera il campo".

Nel caso di una distribuzione continua di densità $\rho(\vec{r})$ la espressione di φ si generalizza in questo modo:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$



A differenza dell'analogia espressione per \vec{E} , questa per φ è una espressione scalare. Si tratta di calcolare un solo integrale.

Note: la scelta di porre a zero il potenziale all'infinito può dare problemi nel caso di distribuzioni di cariche illimitate. In tal caso si potrebbero fare scelte diverse. In ogni caso ciò che conta è la differenza di potenziale.

Abbiamo visto che, data una distribuzione di cariche generica, possiamo calcolare il potenziale $\varphi(\vec{r})$, calcolando una somma o un integrale, senza conoscere prima il campo \vec{E} . Possiamo calcolare \vec{E} e partire da φ ?

Legame tra \vec{E} e φ

La definizione di differenza di potenziale è

$$\varphi(B) - \varphi(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Supponiamo che A e B distino una distanza infinitesima. Allora la differenza di potenziale è pure infinitesima ed è pari al lavoro elementare per unità di carica

$$d\varphi = - \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Occorre una procedura per invertire questa relazione se si vuole scrivere \vec{E} in funzione di φ .

Ovviamente non si può scrivere $\vec{E} = - \frac{d\varphi}{d\vec{r}}$ (errore!!)

dato che la divisione per un vettore non è definita.

Occorre invece usare il concetto di derivate parziali, così:

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz$$

queste sono le derivate parziali di una funzione in tre variabili, $\varphi(x, y, z)$; ciascuna derivata può essere vista come il limite del rapporto incrementale in una direzione, fissando le coordinate nelle altre due direzioni.

Il fatto che si possa scrivere $d\varphi$ in questo modo discende dal carattere conservativo del campo \vec{E} , cioè dal fatto che l'incremento di φ può essere calcolato lungo un percorso che, ad esempio, corrisponde agli incrementi lungo x , y e z . Si dice che $d\varphi$ è un "differenziale esatto".

Poi possiamo anche riscrivere $\vec{E} \cdot d\vec{r}$ così:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Per cui la $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ diventa:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dz = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

che è un'identità se

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad ; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Formalmente si può introdurre un operatore differenziale a tre componenti

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

In modo che le tre relazioni precedenti si possono scrivere in forma compatta:

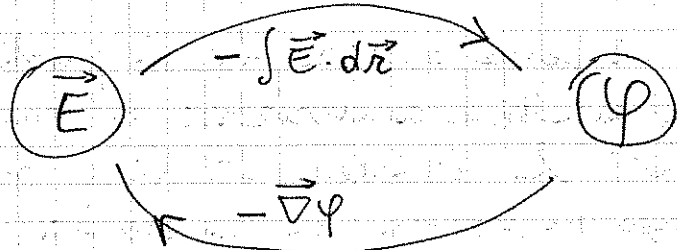
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

L'operatore $\vec{\nabla}$ è detto gradiente, se applicato ad una funzione scalare produce un campo vettoriale.

Si indica anche con "grad", così

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

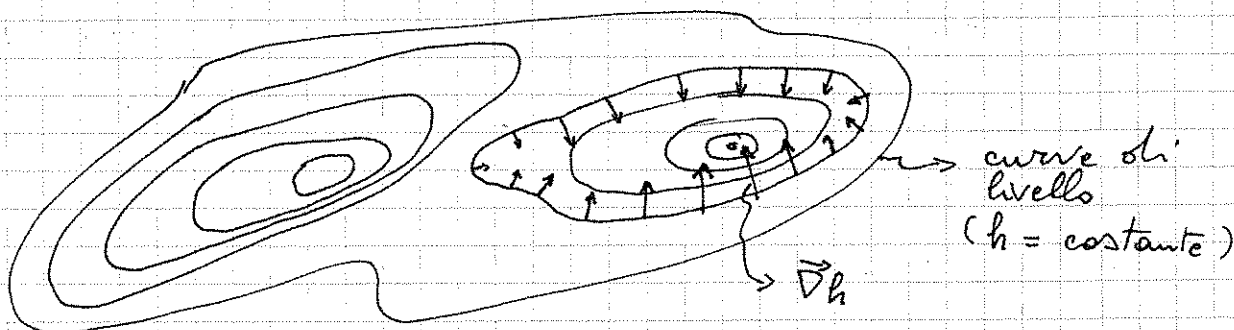
Di conseguenza, e secondo della convenienza si può calcolare prima \vec{E} e da questo φ , oppure prima φ e da questo \vec{E} .



STRUMENTI MATEMATICI: l'operatore gradiente

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{in coordinate cartesiane.}$$

Per avere un'idea di cos'è il gradiente, a livello intuitivo, basta considerare le curve di livello su una carta geografica. Lo spazio rappresentato è in 2 dimensioni e la quota è una funzione delle due coordinate, $h(x, y)$. Le curve di livello sono curve equipotenziali e il gradiente della quota, $\vec{\nabla}h$, è un vettore che, punto per punto, esprime la pendenza del terreno, essendo diretto nella direzione di massima pendenza e avendo modulo proporzionale alla pendenza.



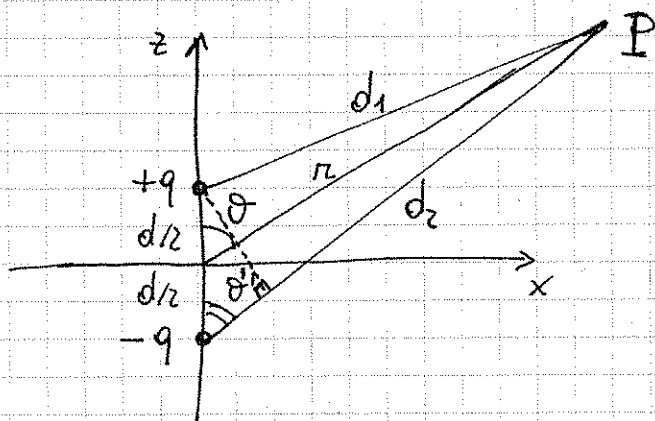
Il gradiente $\vec{\nabla}h$ ha componente nulla nella direzione in cui h è costante, cioè lungo le curve di livello. Dunque è diretto perpendicolarmente alle curve di livello. Il suo modulo è pari alla derivata di h lungo quella direzione. In questo senso il gradiente è anche detto derivata direzionale: dà le derivate della funzione nella direzione di massima variazione.

Il gradiente può essere espresso in sistemi di coordinate diversi, come le coordinate sferiche, cilindriche, ecc. In coordinate sferiche (polari) diventa:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

CALCOLO DEL POTENZIALE : ALCUNI ESEMPI

ESEMPIO 1 Dipolo elettrico



Calcoliamo il potenziale elettrico $\varphi(\vec{r})$ in P nel limite $r \gg d_1 \cong d_2$

Usando il principio di sovrapposizione

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(d_2 - d_1)}{d_1 d_2}$$

ora consideriamo il limite $r \gg d_1, d_2$ e scriviamo

$$d_1 d_2 \cong r^2$$

$$d_2 - d_1 \cong d \cos \theta \quad \text{essendo } \theta' \cong \theta \text{ nello stesso limite.}$$

Allora

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{q d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Definiamo il momento di dipolo elettrico della coppia di cariche come il vettore

$$\vec{p} = q d \hat{z}$$

Allora

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Questo è il potenziale elettrico del dipolo, a grandi distanze.

Si noti che $\varphi = 0$ per $z = 0 \Rightarrow$ il piano xy è una superficie equipotenziale. Lo spazio è suddiviso

in due sottospazi: $z > 0$ e $z < 0$ tali che $\varphi \rightarrow -\varphi$ passando da uno all'altro.

Lungo l'asse z:

$$\varphi(z) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

si annulla più rapidamente del potenziale di una singola particella carica; infatti, il dipolo è globalmente neutro.

Le superfici equipotenziali sono perpendicolari all'asse z per simmetria. Dunque il gradiente di φ è diretto lungo l'asse z e fornisce il campo \vec{E} così:

$$\vec{E} = \hat{z} E_z \quad \text{con} \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 z^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd}{z^3}$$

che è lo stesso risultato che avevamo trovato a p. 1.18

Lungo l'asse x:

Siccome il piano xy è equipotenziale con $\varphi = 0$, il gradiente è lungo \hat{z} e si ha

$$\vec{E} = \hat{z} E_z \quad \text{con} \quad E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)_{z=0}$$

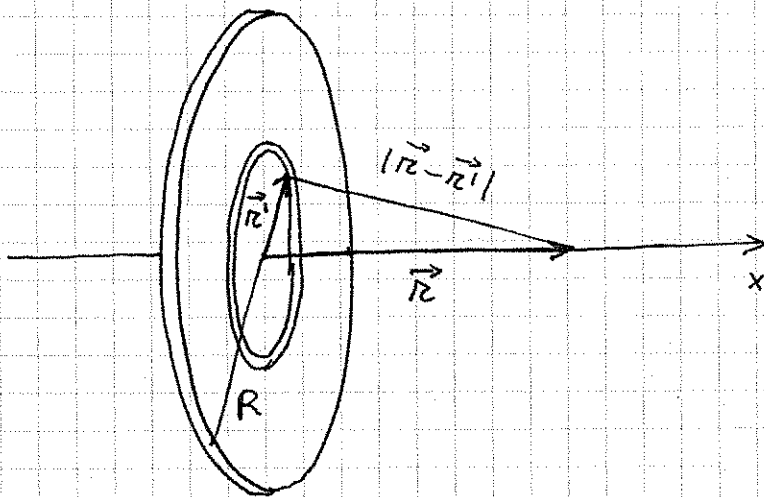
$$= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3} \right)_{z=0}$$

e ricordandosi che $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, si ha

$$E_z = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} - 3 \frac{z^2}{r^5} \right]_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

oppure $E_z(x) = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 x^3}$ come già trovato a p. 1.18.

ESEMPIO 2 | Disco uniformemente carico.



Il disco è carico con carica totale Q distribuita uniformemente con densità superficiale σ
 $Q = \pi R^2 \sigma$

Calcoliamo il potenziale lungo l'asse x sommando i contributi degli anelli infinitesimi

$$\varphi(x) = \int \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

dove dq' è la carica sull'anello di raggio $(r', r' + dr')$:

$$dq' = 2\pi r' \sigma dr'$$

Inoltre $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + r'^2}$. Dunque

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{x^2 + r'^2}}$$

Cambio variabile: $y = \sqrt{x^2 + r'^2}$, $\frac{dy}{dr'} = \frac{r'}{y}$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{|x|}^{\sqrt{x^2 + R^2}} dy$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{x^2 + R^2} - |x| \right]$$

Ora distinguiamo i casi $x \ll R$ e $x \gg R$, che sono interessanti.

Caso $x \ll R$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}} - |x| \right] \\ &\approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} \right) - |x| \right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R \left[1 - \frac{|x|}{R} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} \right] \rightarrow \text{trascurabile} \\ &= \varphi_0 - \frac{\sigma |x|}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\text{con } \varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R}$$

E il campo elettrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\hat{x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \hat{x} \underbrace{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)}_{E_x}$$

dove E_x si calcola facilmente:

$$E_x = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

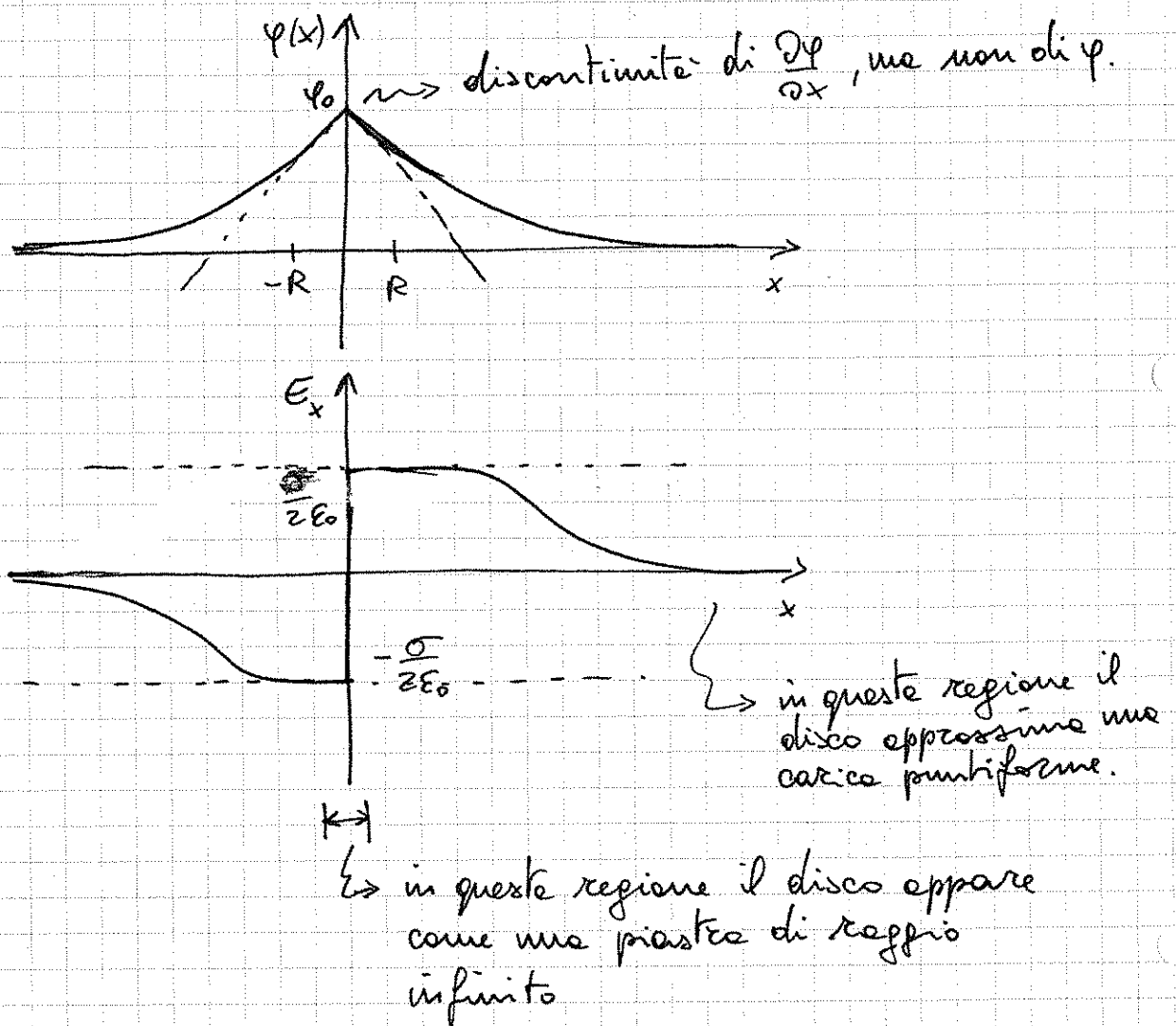
Come per una
lastre infinite
(p. 1.29)

Caso $x \gg R$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| \left[\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right] \\ &\approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} - 1 \right] \\ &= \frac{\sigma R^2 |x|}{4\epsilon_0 x^2} = \frac{\pi R^2 \sigma |x|}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|x|}\end{aligned}$$

È come il potenziale di una carica puntiforme Q , calcolato lungo l'asse. Come ci si aspetta, allontanandosi dal disco a distanze molto maggiori del suo raggio.

L'andamento complessivo, qualitativamente, è



ESEMPPIO 3 | Piastra piana infinita.

Ci riferiamo al pm precedente considerando il limite $R \rightarrow \infty$, ovvero $x \ll R$.

Il potenziale elettrico l'abbiamo calcolato alla pagina precedente:

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x|$$

e il campo \vec{E} l'avremmo calcolato poi da $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

$$E_x = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

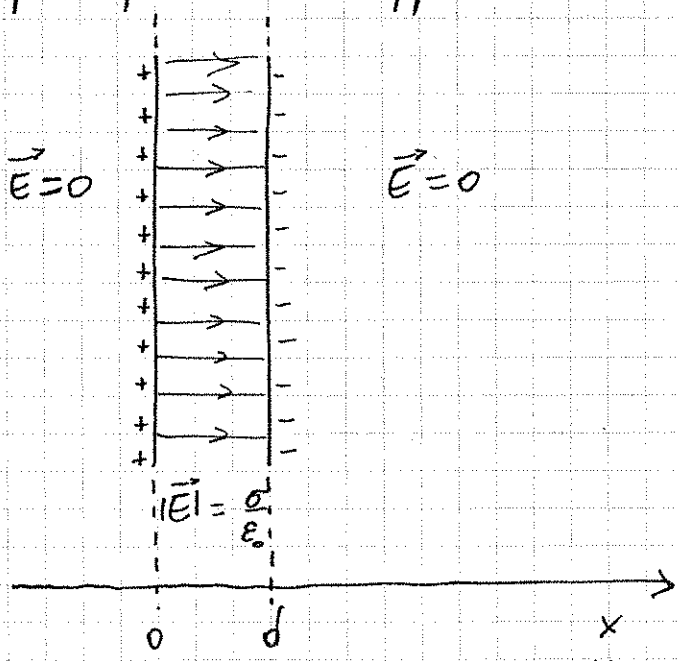
Verifichiamo semplicemente che si può procedere all'inverso. Il campo \vec{E} può essere calcolato con la legge di Gauss come a pagine 1.29, oppure dalla legge di Coulomb come a pagine 1.31. Da questo si ricava φ integrando:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= - \int_0^x E_x dx \\ &= - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x| \end{aligned}$$

come si voleva. Si noti che nel calcolo di φ per integrazione, non si poteva mettere a zero il potenziale all'infinito. La piastra stessa si estende all'infinito. Il riferimento naturale è la piastra. Il valore di φ sulla piastra è del tutto arbitrario.

ESEMPIO 4 Due piastre piane infinite e parallele.

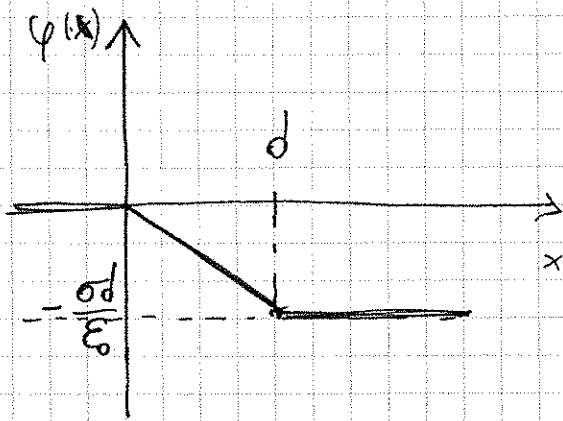
Analogamente a quanto fatto a p. 1.31, basta applicare il principio di sovrapposizione.



Supponiamo di prendere il riferimento del potenziale sulle piastre in $x=0$ e di porlo uguale a 0.

Allora, integrando \vec{E} :

$$\begin{cases} \varphi(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x & \text{per } 0 < x < d \\ \varphi(x) = 0 & \text{in } x < 0 \\ \varphi(x) = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0} & \text{in } x \geq d \end{cases}$$



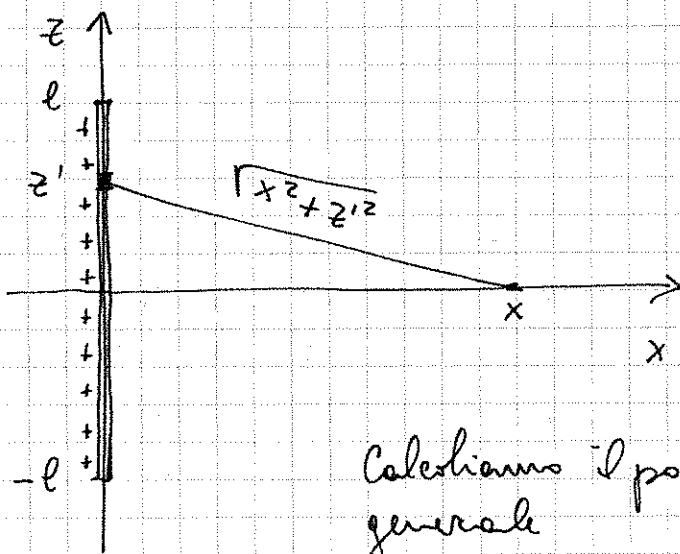
La differenza di potenziale tra le lastre è:

$$|\Delta\phi| = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

indipendente dalla scelta del potenziale di riferimento.

ESEMPIO 5

Filo uniformemente carico di lunghezza $2l$.



Carica Q uniformemente distribuita.

Densità lineare di carica

$$\lambda = Q/2l$$

Calcoliamo il potenziale dall'espressione generale

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

In questo caso conviene esprimere dq' come

$$dq' = \lambda dz'$$

carica entro il tratto infinitesimo di filo $(z', z'+dz')$

Allora

$$\phi(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + z'^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + z'^2}}$$

La primitiva è

$$\log [z' + \sqrt{x^2 + z'^2}]$$

dato che

$$\frac{d}{dz'} \log [z' + \sqrt{x^2 + z'^2}] = \frac{1 + \frac{z'}{\sqrt{x^2 + z'^2}}}{z' + \sqrt{x^2 + z'^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z'^2}}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\log(z' + \sqrt{x^2 + z'^2}) \right]_0^l \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\log(l + \sqrt{x^2 + l^2}) - \log|x| \right] \end{aligned}$$

Il potenziale ha ovviamente simmetria assiale, essendo il sistema invariante per rotazione attorno all'asse z .
 φ dipende solo dalla distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dall'asse z .
Si può generalizzare perciò l'espressione precedente nella forma

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\log(l + \sqrt{r^2 + l^2}) - \log r \right] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \left(\frac{l + \sqrt{r^2 + l^2}}{r} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \left[\frac{l}{r} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Di questa espressione è facile considerare il limite $r \ll l$, ovvero a distanze piccole, tali da poter immaginare il filo come infinitamente lungo. In questo limite:

$$\varphi(r) \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{2l}{r} = \varphi_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r$$

Il campo $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ risulta essere puramente radiale

$$E_r = -\frac{d}{dr} \varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{come già trovato e p. 1.32.}$$

Unità di misura del potenziale elettrico

Dimensionalmente il potenziale elettrico è un lavoro per unità di carica. Nel sistema SI corrisponde quindi a joule su coulomb. L'unità è detta Volt:

$$1 \text{ Volt} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Si usa il Volt anche per esprimere i campi elettrici. In particolare, dalla definizione di φ in termini di \vec{E} si vede che il campo elettrico \vec{E} può essere misurato in Volt/m (Volt su metro), anziché l'equivalente N/C (newton su coulomb):

$$1 \frac{\text{Volt}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Nel sistema CGS il potenziale elettrico si misura in erg/ues, che viene anche detto statvolt

$$1 \text{ statvolt} = 1 \frac{\text{erg}}{\text{ues}}$$

D'altra parte, per come è definita l'unità di carica elettostatica, si ha che

$$1 \text{ dyna} = 1 \frac{\text{ues}^2}{\text{cm}^2}$$

da cui $1 \text{ erg} = 1 \text{ dyna cm} = 1 \frac{\text{ues}^2}{\text{cm}}$

e infine

$$1 \text{ statvolt} = 1 \frac{\text{erg}}{\text{ues}} = 1 \frac{\text{ues}}{\text{cm}}$$