

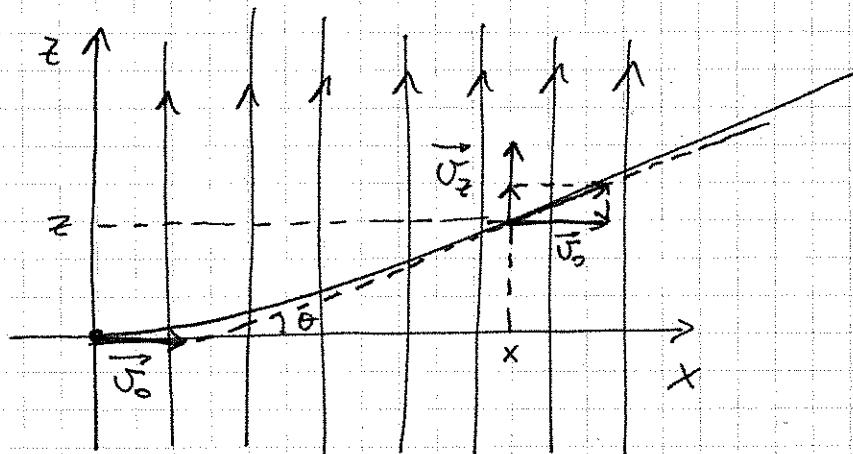
MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETTRICO

Supponiamo che una certa distribuzione statica di cariche elettriche produca nello spazio un campo elettrico $\vec{E}(r)$. Se introduciamo una carica q in un punto r' , queste sentirebbe le forze

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

e subisce un'accelerazione pari a $\vec{a} = \vec{F}/m$.

Caso semplice: campo uniforme; forza costante



$$\text{sia } \vec{E} = \hat{z} E$$

$$\text{l'accelerazione verticale } \vec{a} = q \frac{\vec{E}}{m}$$

Il moto è parabolico

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ z = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \end{cases} \rightarrow t = \frac{x}{v_0} \quad \rightarrow z(x) = \frac{1}{2} \frac{qEx^2}{mv_0^2}$$

per la velocità:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_z = \frac{qE}{m} t \end{cases} \rightarrow v_z(x) = \frac{qEx}{mv_0}$$

Deflessione:

$$tg \theta = \frac{v_z}{v_x} = \frac{qEx}{mv_0^2}$$

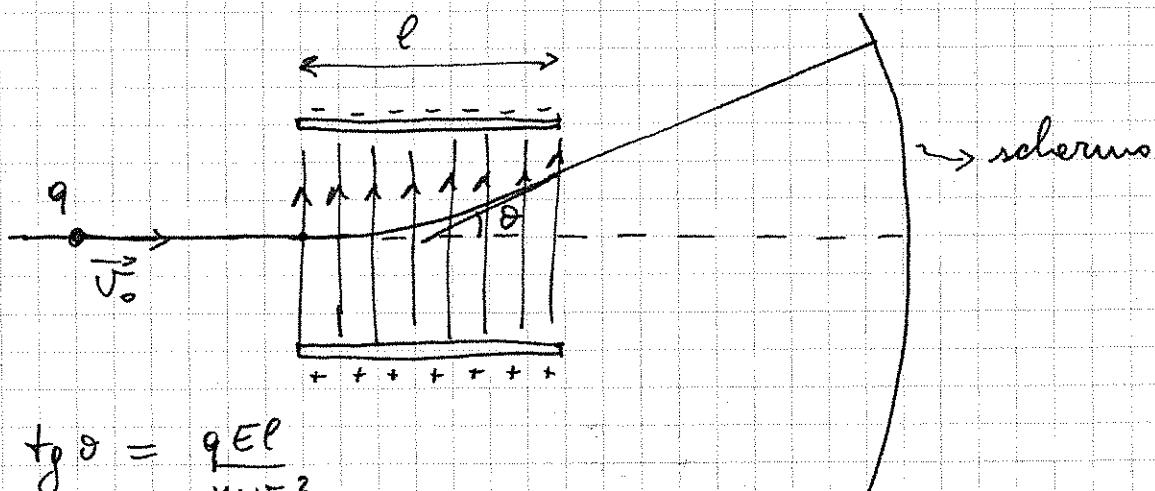
La differenza di potenziale:

$$\Delta \varphi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_0^z E dz' = - E \Delta z$$

↳ variazione di quote

la situazione è del tutto analogo al caso delle gravi-
sità sulla superficie terrestre, dove il campo $\vec{f} = \hat{z} g$,
con g accelerazione di gravità, e la differenza di potenziale
per unità di massa è $g \Delta z$.

Applicazione tipica: deflessione in un tubo catodico



$$\tan \theta = \frac{qEl}{mv_0^2}$$

Variando il modulo del campo E si ottiene una variazione proporzionale delle deflessioni.

In termini di energie: calcoliamo la variazione di energia cinetica.

$$\Delta E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v_z^2 = \frac{1}{2} m \frac{q E^2 x^2}{m^2 v_0^2} = q E \frac{1}{2} \frac{q E x^2}{m v_0^2}$$

$$= q E \Delta z$$

$$= - q \Delta \varphi$$

$$= - \Delta U$$

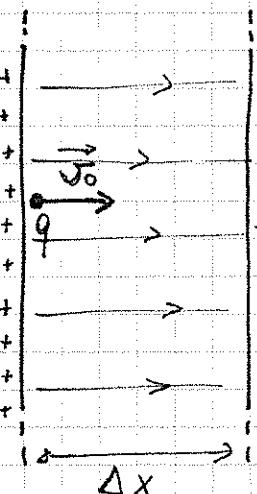
↳ Variazione di energie potenziali

Ritroviamo la conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta (E_{\text{cin}} + U) = 0$$

Note: nei tubi catodici in realtà le cariche del fascio sono negative (elettroni), ma le firme non cambiano.

Caso ancora più semplice: \vec{v}_0 nella stessa direzione di \vec{E}



Le differenze di potenziale tra le lastre:

$$\Delta \varphi = -E \Delta x$$

Se la carica accelera da una piastra all'altra, essa acquisisce energie cinetica

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

$\rightarrow v_{\text{final}}$

La conservazione dell'energia meccanica impone che

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta U = -q \Delta \varphi$$

ovvero $\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = -q \Delta \varphi$

e se $v_0 = 0$ si ha $v = \sqrt{\frac{2q |\Delta \varphi|}{m}}$

Dato un tipo di particelle, con rapporto q/m assegnato, la velocità finale è determinata dalla differenza di potenziale.

Applicazione: acceleratori lineari

Esempio: elettroni

$$m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Supponiamo che le lastre abbiano una diff. di potenziale pari a 1 Volt.

Allora

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = q_e \Delta \varphi = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ Volt} \\ = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Questa energia è detta "elettronvolt" (eV)

$$(1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J})$$

/ Strumenti matematici : gradiente, divergenza, rotore /

Abbiamo già visto cos'è il gradiente. In coordinate cartesiane :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

È un operatore differenziale che agendo su una funzione scalare produce un campo vettoriale. Il campo contiene informazioni sulle "pendenze locali" della funzione.

Con le derivate parziali si può fare dell'altro.

Consideriamo il simbolo "nabla" definito come

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

È un modo per scrivere un operatore. L'operatore vuole qualcosa alla sua destra su cui agire. Se questo qualcosa è una funzione scalare, allora nabla diventa il gradiente di quella funzione. Ma se invece ci mettiamo un campo vettoriale? Possiamo usare le regole dei prodotti scalari tra vettori così :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Stavolta da un campo vettoriale \vec{A} abbiamo ottenuto un campo scalare. Tale campo scalare si chiama divergenza di \vec{A} e si scrive

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

come sopra, oppure $\overrightarrow{\text{div}} \vec{A}$.

Notiamo anche che, mentre il prodotto scalare tra due vettori usuali, $\vec{A} \cdot \vec{B}$, è commutativo, nella scrittura $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ l'ordine è cruciale.

Con $\vec{\nabla}$ e un campo \vec{A} possiamo anche usare le regole dei prodotti vettoriali, così:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \det \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Questo si chiama rotore di \vec{A} e si indica con

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

come sopra, oppure $\text{rot } \vec{A}$, oppure ancora (nei testi inglesi) con $\text{curl } \vec{A}$. Nei testi italiani si trova anche $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Un'altra operazione che si può fare è applicare tre volte di seguito, ad esempio ad una funzione scalare:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$$

che si può leggere come divgrad f . Dalla definizione di divergenza e di gradiente, il divgrad risulta essere:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \end{aligned}$$

Questo operatore, in parentesi, è detto "leplocius" e si indica con

$$\vec{\nabla}^2$$

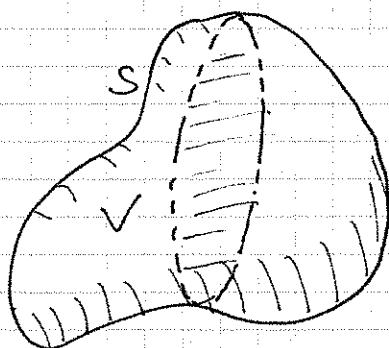
oppure anche con Δ . Dunque $\vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$

Fin qui abbiamo giocato con l'operatore $\vec{\nabla}$. Ora vediamo in cosa possono essere utili la divergenza, il rotore e il leplocius. (del gradiente abbiamo già detto).

(bianco per sbaglio)

Legame tra divergenza e flusso

Consideriamo un generico campo vettoriale \vec{v} . Prendiamo poi un volume V , altrettanto generico, e le superficie S che lo racchiude.



Il flusso di \vec{v} attraverso l'intera superficie S è definito come

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{z}$$

$d\vec{z}$ \hookrightarrow elemento di superficie

Immaginiamo di dividere il volume in due parti, arbitrariamente, con superficie di separazione in comune. Il volume di sinistra sia V_1 di superficie S_1 e il volume di destra sia V_2 con superficie S_2 ; le superfici S_1 e S_2 hanno una parte in comune, ma con elementi di superficie $d\vec{z}_1$ e $d\vec{z}_2$ punti per punto uguali in modulo ma opposti in verso (per convenzione $d\vec{z}$ punta verso l'esterno del volume racchiuso).

Quindi il flusso Φ_1 e il flusso Φ_2 del campo \vec{v} rispettivamente attraverso S_1 e S_2 hanno due contributi che si cancellano esattamente fra loro, e i contributi che sopravvivono sono quelli corrispondenti alle parti di S_1 e S_2 sulle superficie esterne del volume V complessivo. Dunque

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{z} = \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{z}_1 + \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{z}_2$$

Cioè rimane vero anche se suddividiamo V in molte parti: i contributi a Φ da superfici di teglio si annullano e i contributi esterni si sommano per ridurre Φ :

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{z} = \sum_{\text{parti}} \int_{S_{\text{parte}}} \vec{v} \cdot d\vec{z}_{\text{parte}}$$

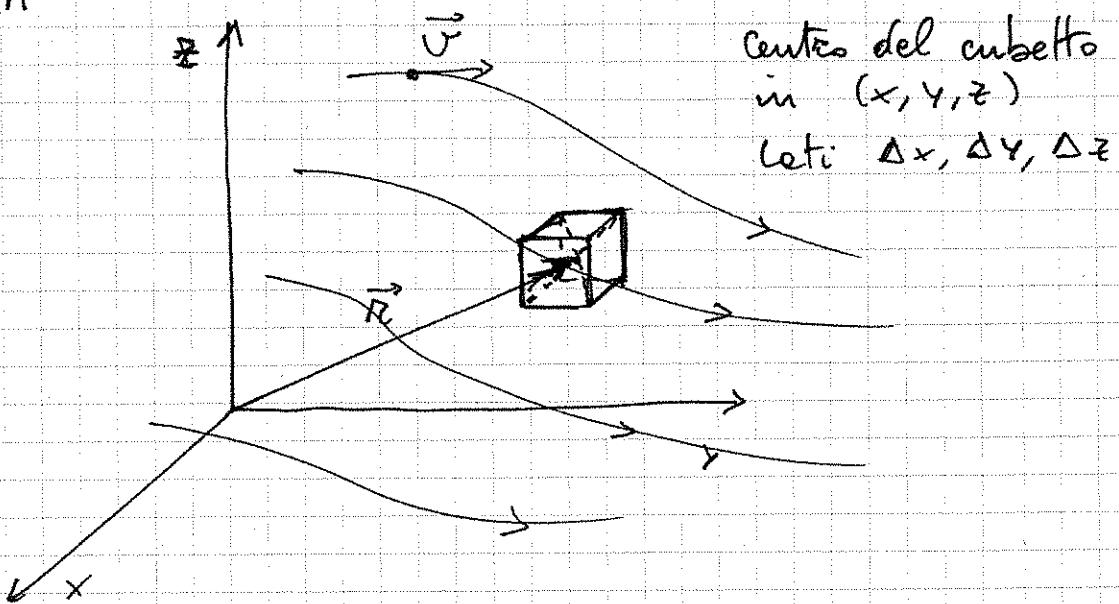
Se il numero dei pezzi viene fatto tendere all'infinito, il volume di ciascun pezzo diventa infinitesimo. Proviamo a scrivere il passaggio al limite in questo modo:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^N V_i \left(\frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i \right) \\ &\quad \downarrow N \rightarrow \infty \\ &= \int_V dV \lim_{V_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{a}_i \right)\end{aligned}$$

Il nostro scopo ora è quello di mostrare che il limite nell'inte grande esiste ed è proprio la divergenza di \vec{F} , così che

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_V dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

Abbiamo anticipato il risultato. Ora lo vogliamo ricavare. Per farlo consideriamo il caso in cui il volume V è tagliato a cubetti di lati $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e consideriamo uno di questi:



Calcoliamo il flusso di \vec{v} attraverso le superfici sopra e sotto, considerando Δz abbastanza piccolo da poter sviluppare \vec{v} in serie di Taylor. Vogliamo tenere poi il termine dominante.

$$\Phi_{\text{sopra}} = \Delta x \Delta y \left[v_z(x, y, z) + \frac{\Delta z}{z} \frac{\partial v_z}{\partial z}(x, y, z) \right]$$

$$\Phi_{\text{sotto}} = -\Delta x \Delta y \left[v_z(x, y, z) - \frac{\Delta z}{z} \frac{\partial v_z}{\partial z}(x, y, z) \right]$$

La somma dei due flussi è

$$\Phi_{\text{sopra}} + \Phi_{\text{sotto}} = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial v_z}{\partial z}(x, y, z) = \Delta V \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Se ripetiamo il calcolo per le coppie evanti-dietro e destro-sinistra, troviamo

$$\Phi_{\text{evanti}} + \Phi_{\text{dietro}} = \Delta V \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\Phi_{\text{destra}} + \Phi_{\text{sinistra}} = \Delta V \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

E il flusso totale attraverso la superficie del cubetto è

$$\Phi = \Delta V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

Se dividiamo per ΔV otteniamo proprio $\vec{v} \cdot \vec{F}$. Questo è uno dei volumetti V_i in cui abbiamo suddiviso V . Se invece di prendere cubetti sceglieremo altre forme, il risultato non cambierebbe. Allo stesso modo, se sceglieremo di mettere il punto x, y, z anziché al centro del cubetto su uno dei suoi vertici, di nuovo il risultato non cambierebbe (è facile provarlo). Dunque è vero che

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V_i} \int \vec{v} \cdot d\vec{S}_i \right) = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

s:

ed è così vero che

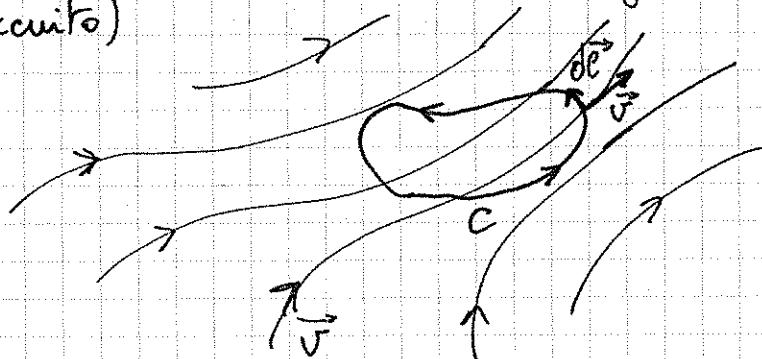
$$\int_S \vec{V} \cdot d\vec{a} = \int_V dV \vec{V} \cdot \vec{J}$$

Questo è noto come "teorema di Gauss" oppure "teorema della divergenza". È un fatto matematico, non fisico.

Lo useremo molto utilmente per la fisica, fra un po'. Ora però facciamo qualcosa di simile per il rotore.

L'azione del rotore e circuitazione

Definiamo prima cos'è la circuitazione di un campo vettoriale. Prendiamo il solito campo generico \vec{V} . Poi tracciamo una linea chiusa generica nello spazio (un circuito).



Il circuito C può essere visto come l'insieme di tratti elementari $d\vec{e}$, di lunghezze infinitesime ($d\vec{e}'$) e diretti lungo la tangente al circuito in ciascun punto.

Occorre anche fissare convenzionalmente il verso di percorrenza di C . La scelta è arbitraria, ma bisogna stare attenti ad essere consistenti. Comunque, una volta fissato il verso di percorrenza ha senso scrivere il prodotto

$$\vec{V} \cdot d\vec{e}$$

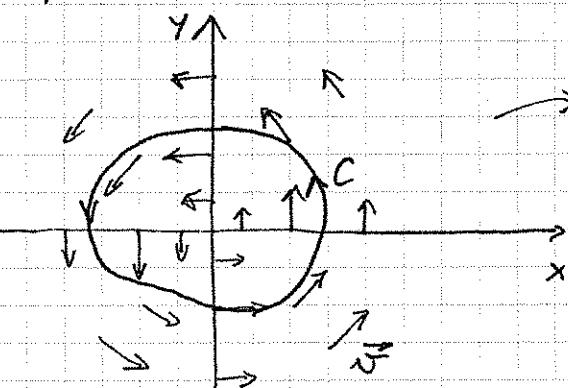
punto per punto di C , e calcolare l'integrale

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{e}$$

Questo si chiama circuitazione di \vec{V} sul circuito C .

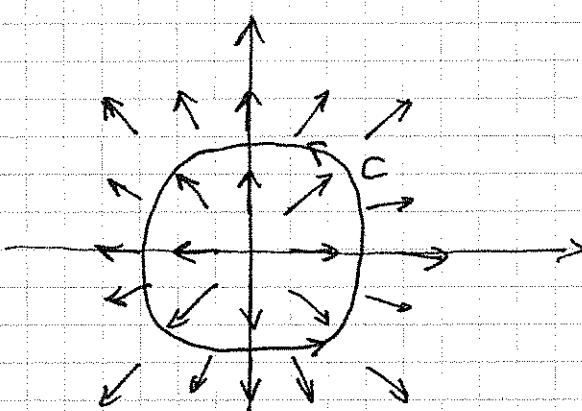
La circuitazione di \vec{V} prende contributi maggiori nei tratti

in cui \vec{v} e \vec{J} sono paralleli. Esempio: se il campo \vec{J} è di questo tipo



allora si ha grande circolazione

Se invece il campo \vec{J} è così

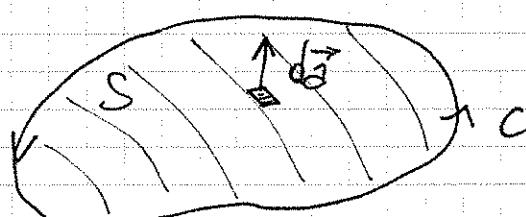


allora si ha piccola circolazione (nulla se il campo è puramente radiale).

Se \vec{J} è il campo di velocità di un fluido allora la circolazione assume un significato fisico concreto: misura la "rotazione" del fluido stesso, la sua viscosità.

La circolazione è una grandezza definita su un percorso di lunghezza finita. Cosa succede su scale lokale?

Procediamo in modo simile a come avevamo fatto per il flusso uscente da un volume. Stavolta consideriamo la superficie S che ha il contorno C (una qualsiasi superficie avente quel contorno).



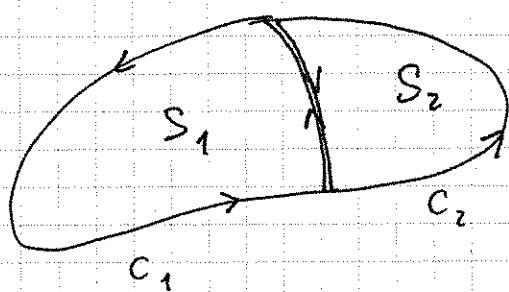
Dobbiamo ristabilire le convenzioni sui segni. Scopriamo il verso degli elementi

di superficie, \vec{F} , sulla superficie S come quello dato dalle regole delle mani destre applicate al verso di percorrenza del contorno C (mano che segue il contorno e pollice che indica $\vec{d}\ell$). Le scelte sinistre non cambierebbe i risultati, ma teniamo d'occhio poi le destre.

La circuitazione di un campo \vec{F} sul contorno di S è

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Ora suddividiamo S in due superfici S_1 e S_2 e calcoliamo le due circuitazioni:



$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2$$

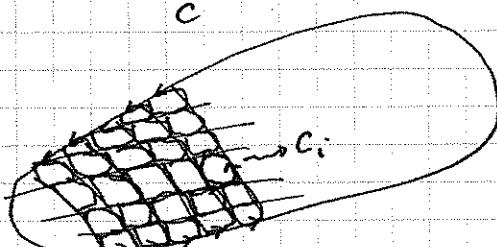
Questi integrali hanno un tratto di percorso in comune, quello che separa S_1 da S_2 .

Il verso di percorrenza di tale tratto è opposto nei due integrali mentre \vec{F} è lo stesso, così che i due contributi degli integrali si cancellano nella somma, in modo che:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2$$

Vale anche se si suddivide S in molte piccole superfici. Ogni volta i contributi di tratti comuni si cancellano e nella somma sopravvivono solo i $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ sul contorno esterno:

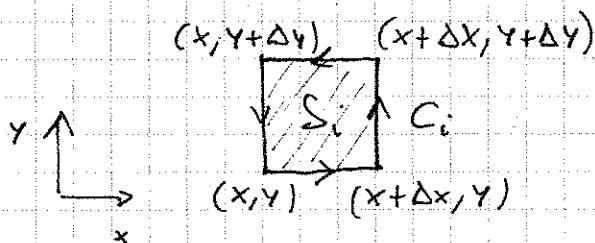
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \sum_i \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_i$$



Consideriamo ora il limite

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i \right)$$

Prendiamo una ~~qualsiasi~~ superficie S_i piccole, orientate con la normale \hat{n} lungo l'asse z . Supponiamo anche di aver diviso la superficie S in piastelline quadrate, in modo che la superficie S_i abbia questi contorni:



Se Δx e Δy sono piccoli, possiamo sviluppare \vec{v} ottenendo $v(x, y)$ e calcolare la circolazione così:

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}_i &= \left(v_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \Delta x \\ &\quad + \left(v_y(x, y) + \Delta x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Delta y \\ &\quad - \left(v_x(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta x \\ &\quad - \left(v_y(x, y) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Delta y \end{aligned}$$

avendo moltiplicato, per ogni lato, il valore di v nel punto medio del lato per la lunghezza. Il risultato diventa

$$\oint_{C_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}_i = \underbrace{\Delta x \Delta y}_{S_i} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

ovvero

$$\frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \vec{v} \cdot d\vec{l}_i = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z$$

se le superficie S_i fosse state orientate con la normale

lungo \hat{x} o lungo \hat{y} , avremmo trovato le componenti x o y del rotore di \vec{v} . In generale è vero che

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{S_i} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}_i \right) = \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

\hat{n} normale a S_i

Tornando quindi alla relazione scritta in fondo a p. 1.63, possiamo scrivere

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{S_i} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}_i \right) S_i$$

e passare al limite per $N \rightarrow \infty$ e $S_i \rightarrow 0$ in modo da ottenere

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

avendo fatto la sostituzione di $\hat{n} S_i \rightarrow d\vec{S}$. La relazione appena fatta passa sotto il nome di teorema di Stokes. A parole: la circolazione di un campo vettoriale lungo un percorso chiuso C è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualsiasi superficie che abbia come contorno C .

Il fatto che la superficie S sia qualsiasi è evidente nella nostra derivazione: non abbiamo assunto, infatti, alcuna superficie particolare. Le stesse cose puo essere viste anche così: il campo $(\vec{\nabla} \times \vec{v})$ è un campo a divergenza nulla e ciò segue che le scelte di S nel teorema di Stokes è arbitaria. Dimostriamo la prima parte di questa affermazione, calcolando la divergenza del rotore di \vec{v} :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}) = \frac{\partial^2 J_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 J_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 J_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 J_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 J_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 J_x}{\partial x \partial y}$$

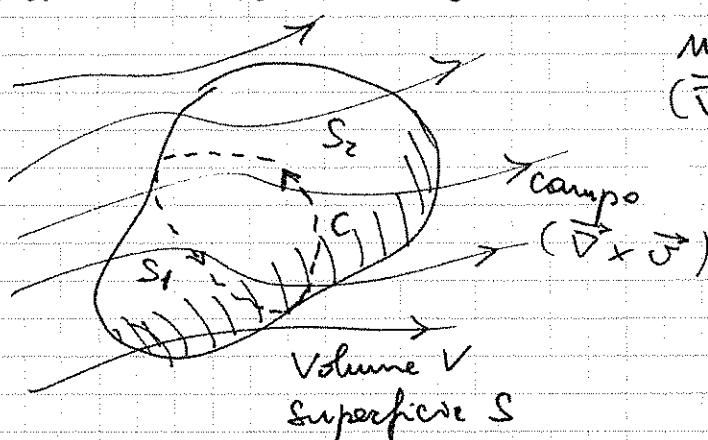
A destra abbiamo una somma di derivate parziali seconde, miste. In ciascuna, l'ordine delle due derivazioni non è importante. Ad esempio

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 J_z}{\partial y \partial x}$$

e così per le altre. Si vede subito, in tal modo, che la somma contiene tre coppie che si annullano esattamente. Dunque

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}) = 0$$

ovvero, la divergenza del rotore di un campo qualsiasi è nulla sempre. Questo ci torna molto utile più avanti, quando parleremo dei campi magnetici. Ma ora ci manca la prova della seconda parte dell'affermazione delle pagine precedente. Calcoliamo il flusso del rotore di \vec{J} attraverso una superficie che racchiude un volume V chiuso.



Dal teorema di Gauss, essendo nulla la divergenza del campo $(\vec{\nabla} \times \vec{J})$ ovunque in V , il flusso di $(\vec{\nabla} \times \vec{J})$ attraverso S è nullo.

Ora disegniamo una curva chiusa C sulla superficie S tale da tagliare S in due

superficie S_1 e S_2 aventi lo stesso contorno C . Il flusso uscente dal volume V attraverso $S_1 + S_2$ è nullo. Questo significa che il flusso uscendo verso S_1 ~~è opposto~~ è uguale a verso ~~uscendo~~ opposto rispetto a quello uscendo verso S_2 , avendo considerato come positivo un flusso uscente da V . Ora notiamo perciò che, dato il percorso orientato C , le convenzioni sui segni va cambiate: quello che conta è sopre quant'è il flusso che attraversa le superficie contornate da C .

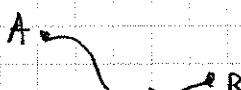
secondo le regole delle mani destre. Così facendo è immediato vedere che i ~~flussi~~ flussi Φ_1 e Φ_2 attraverso le due superfici sono uguali, come si voleva. In parole più semplici: in V tanto entra quanto esce, dunque S_1 e S_2 sono attraversate dallo stesso flusso nelle direzioni individuate dal contorno C.

In sintesi:

* dai punti alle linee

$$f(B) - f(A) = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

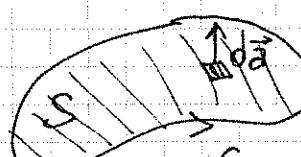
dalle
definizione di
gradienti



* dalle linee alle superfici:

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{a}$$

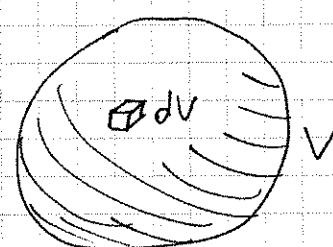
teorema di
Stokes



* dalle superfici ai volumi:

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{a} = \int_V \delta V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

teorema di
Gauss (o delle
divegenze)



Per il momento ci fermiamo qui con la matematica e torniamo alla fisica.

Le leggi per \vec{E} e φ in forme locali

Torniamo alla legge (legge fisica, non teorema matematico!) di Gauss di p. 1.26.

$$\Phi = \int_V dV \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Ovvero

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V dV \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

che vale per il campo elettostatico prodotto dalla distribuzione continua $\rho(\vec{r})$.

Combiniamolo con il teorema (matematico) di Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{E}$$

per scrivere

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

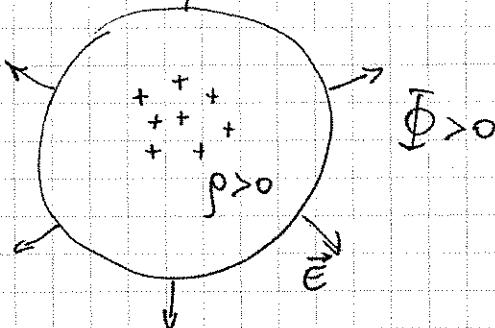
che deve essere vero per qualsiasi volume V . Questo è possibile solo se i due integrandi sono uguali in ogni punto dello spazio:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

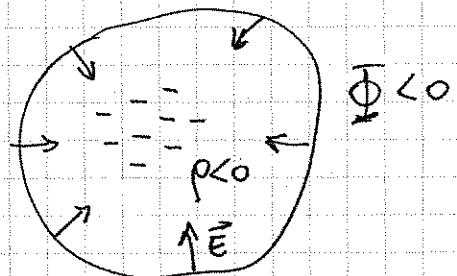
Questa è la versione "locale" delle leggi di Gauss. Essa stabilisce una relazione tra il campo elettostatico in un punto e la distribuzione di carica in quelllo stesso punto.

Per capire meglio si pensi al significato intuitivo di "divergenza": se un campo ha divergenza diversa da zero e positiva in una certa regione di spazio, allora il flusso del campo è positivo attraverso una superficie che racchiude quella regione. Il comportamento è simile a quello del flusso di un

fluido in presenza di una "sorgente", salvo che qui le sorgenti sono le cariche elettriche e il flusso è quello del campo elettrico. Le cariche elettriche sono le sorgenti del campo.



Se le cariche sono negative, il flusso è negativo, cioè entrante nello spazio. Questo è equivalente al caso dei "pozzi" in un fluido.



Il caso di campi divergenti nulli, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, è analogo al caso del campo di velocità di un fluido incompressibile in assenza di sorgenti e di pozzi.

Vediamo poi cosa si può fare con il potenziale elettrico φ . Partiamo dalla legge di Gauss locale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

e ricordiamo che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Allora possiamo scrivere $-\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \rho / \epsilon_0$ e ricordare che l'operatore divgrad è il laplaciano. Si ha:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0}$$

Questa è nota come legge di Poisson.

Si tratta di un'equazione lineare (il Laplaciano è un operatore lineare), nel senso che

se φ_1 è sol. di Poisson per le cariche p_1
e φ_2 è sol. di Poisson per le cariche p_2

allora $(\varphi_1 + \varphi_2)$ è sol. di Poisson per le cariche $(p_1 + p_2)$.

Ciò esprime formalmente il principio di sovrapposizione.

Nelle regioni prive di cariche elettriche ($p=0$) la legge di Poisson diventa

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

che i matematici conoscono bene, come equazione di Laplace.

È una delle equazioni fondamentali della fisica-matematica.

Le soluzioni sono dette "funzioni armoniche" e godono di proprietà interessanti.

Tanto per cominciare: assegnate le condizioni al contorno, la soluzione è unica. Poi, una qualsiasi soluzione ammette massimi e minimi solo sul contorno (il contorno è la superficie, o l'insieme delle superfici, che delimitano lo spazio in cui vale la $\nabla^2 \varphi = 0$).

Invece di dare dimostrazioni con rigore matematico, conviene uscire che quanto detto è vero con un argomento fisico.

Supponiamo per assurdo che φ abbia un massimo entro una regione in cui vale $\nabla^2 \varphi = 0$. Se φ ha un massimo significa che $\vec{\nabla} \varphi$ ~~è nullo~~ è un campo detto "verso" il massimo in un intorno di quel punto. Dunque

\vec{E} diverge da quel punto, e possiamo individuare una superficie attorno al punto, che lo racchiude, attraverso la quale il flusso di \vec{E} è positivo. Ciò implica che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ dev'essere non nullo in quelle regioni; la legge di Gauss allora dice che la densità di carica è non nulla in quelle stesse regioni, ma ciò contraddice il fatto di aver assunto valida la $\nabla^2 \varphi = 0$. Concludiamo che l'ipotesi non poteva

essere eccette: massimi e minimi possono solo stare sul contorno.

Detto questo, mostriamo che la soluzione è unica, dati i valori di φ al contorno. Anche qui ragioniamo per assurdo e supponiamo che due funzioni φ_1 e φ_2 siano entrambe soluzioni di $\nabla^2 \varphi = 0$ in una certa regione di spazio, e che abbiano gli stessi valori sul contorno. Poi prendiamo la funzione

$$\varphi_{\text{diff}} = \varphi_1 - \varphi_2$$

Dato che l'eq. di Laplace è lineare, anche φ_{diff} è soluzione dell'equazione. Inoltre è una soluzione che vale 0 su tutto il contorno, dove $\varphi_1 = \varphi_2$ per ipotesi. Dato che φ_{diff} può avere massimi o minimi solo sul contorno e che sul contorno è nulla, allora φ_{diff} è nulla ovunque, e $\varphi_1 = \varphi_2$ ovunque. Come si voleva.

Un'altra proprietà interessante dell'eq. di Laplace è che, se φ è una sua soluzione in una data regione dello spazio, allora il valore medio di φ sulla superficie di qualsiasi sfera tracciata entro quelle regione è uguale al valore di φ al centro delle sfere.

Una semplice implicazione è che il valore di φ al centro di una sfera deve essere intermedio tra il massimo e il minimo di φ sulla sfera. In elettostatica questo ha una conseguenza importante: è impossibile mantenere una partecile carica in equilibrio stabile nello spazio vuoto se essa è soggetta a sole forze elettostatiche!

L'equazione di Laplace è utile per risolvere il problema di calcolare $\varphi(x, y, z)$ per distribuzioni di cariche complicate, qualora siano identificabili regioni vuote e superfici di contorno su cui sia noto il valore di φ , oppure il valore del $\nabla \varphi$ perpendicolarmente alle superfici stesse.

E del rotore, cosa ce ne facciamo?

Ricordiamo che il campo \vec{E} è conservativo e vale

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

su qualsiasi percorso C chiuso. Ricordiamo poi il teorema di Stokes

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a}$$

Dunque $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = 0$

per qualsiasi superficie S . Ciò è vero solo se l'integrandi è sempre nullo:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Questa legge esprime il fatto che \vec{E} è conservativo. In queste forme si dice che il campo \vec{E} è irrotazionale.

Si poteva vedere in modo equivalente invocando φ . Il campo \vec{E} è dato da $-\vec{\nabla} \varphi$. Se calcoliamo il rotore:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$$

infatti $(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi))_x = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ e così anche

per le altre componenti.

Il campo elettostatico è irrotazionale!

In sintesi:

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{irrotazionalità}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{legge di Gauss}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad \text{definizione di } \varphi$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad \text{legge di Poisson}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0 \quad \text{legge di Laplace}$$

Energie elettostatiche di una distribuzione di cariche

Il lavoro per portare una carica "di prova" (o esploratrice) in un dato punto dello spazio, in cui vi sia un campo elettrico dovuto ad una distribuzione di cariche assegnate, è stato usato per definire il potenziale elettrico φ associato alla distribuzione di cariche stessa.

Ma quanto lavoro è necessario per "costruire" da zero tale distribuzione?

Immaginiamo di piazzare una carica per volta.

Lavoro per produrre la distribuzione di carica:

- la prima carica, q_1 , si porta a costo zero e le si mette in \vec{r}_1 .

$$L_1 = 0$$

- la seconda carica risente delle forze della prima.

Se q_2 è portata dall'infinito al punto \vec{r}_2 , il lavoro fatto contro il campo elettrico della prima è

$$L_2 = q_2 \varphi_1(\vec{r}_2)$$

è potenziale elettrico dovuto alle cariche q_1 calcolato nel punto \vec{r}_2

- per portare la terza carica q_3 in \vec{r}_3 si deve lavorare contro i campi generati da q_1 e q_2 . Vale il principio di sovrapposizione, così che:

$$L_3 = q_3 \varphi_1(\vec{r}_3) + q_3 \varphi_2(\vec{r}_3)$$

che si può scrivere anche come

$$L_3 = q_3 \varphi(\vec{r}_3)$$

dove $\varphi(\vec{r}_3) = \varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3)$

è il potenziale dovuto alle altre cariche (non q_3) calcolato in \vec{r}_3 .

Se procediamo allo stesso modo fino alla N -esima carica e sommiamo tutti i lavori, il lavoro complessivo diventa

$$L = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^{i-1} \varphi(\vec{r}_i)$$

Se il riferimento di φ è all'os, dove è scelto $\varphi=0$, allora

$$L = \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{q_j}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

In forme più compatte:

$$L = \sum_{\text{coppie } ij} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{q_i} \cdot \overrightarrow{q_j}}{r_{ij}} \quad \text{con } r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Contate una
sola volta

Notiamo, d'altra parte, che lo scambio degli indici non modifica il valore di ciascun addendo. Perciò le stesse somme può essere estesa a tutte le coppie 12, 21, 13, 31, 23, 32, ... perché si mette un $1/2$ davanti:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\text{coppie } ij} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{q_i} \cdot \overrightarrow{q_j}}{r_{ij}}$$

$$\begin{aligned} \text{oppure } L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{q_i} \cdot \overrightarrow{q_j}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

$$\text{dove } \varphi(\vec{r}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{q_j}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \rightarrow \text{potenziale dovuto a tutte le altre cariche, tranne } q_i, \text{ calcolato in } \vec{r}_i$$

A questo L è proprio il lavoresso svolto per contenere la distribuzione. È un numero con le dimensioni di energia. lo chiamiamo energia elettostatica. Non va confuso con l'energia potenziale di una carica di prova all'interno del campo generato dalla distribuzione. Quest'ultima è una funzione di \vec{r} , mentre l'energia elettostatica della distribuzione è un numero che espone una proprietà globale delle configurazione di carico.

Indichiamo con V l'energia elettostatica. Allora:

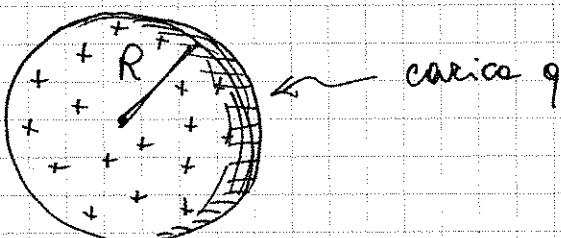
$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\vec{r}_i)$$

Per una distribuzione continua la generalizzazione è semplice; basta sostituire le cariche discrete q_i con cariche contenute in volumi infinitesimi dV e sostituire le somme con un integrale:

$$V = \frac{1}{2} \int dV p(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$$

In questa espressione non ha alcuna importanza specifica che $\varphi(\vec{r})$ è il potenziale dovuto a tutte le altre cariche esclusa quella in \vec{r} , dato che il contributo è φ che viene dal volume dV posto in \vec{r} è infinitesimo. Quindi nell'espressione appena scritta, $\varphi(\vec{r})$ è il potenziale elettrico associato a tutta la distribuzione di carica $p(\vec{r})$.

ESEMPIO energia elettostatica di una sfera di raggio R , uniformemente carica



Calcoliamo l'energia elettostatica in due modi diversi.

i) Immaginiamo di "costruire" la sfera carica portando dall'infinito guscio sferico di raggio r man mano crescente, fino a R , e spessore dr .

In una fase intermedia, in cui abbiamo ottenuto una sfera di raggio r generico, compresa tra 0 e R , il lavoro necessario a portare un nuovo guscio è dato da

$$dV = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{r} \right) dq \quad \begin{matrix} \text{nuova carica che aggiungiamo} \\ \text{portandole da } \infty \text{ a } r \end{matrix}$$

\hookrightarrow potenziale dovuto alla carica qr già presente, calcolato a distanza r dall'origine

D'altra parte, essendo la densità ρ uniforme, si ha:

$$q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$dq = 4\pi r^2 dr \rho$$

Quindi:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{4\pi r^2 dr \rho}{r} = \frac{6\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}$$

Il lavoro totale, pari all'energia elettostatica, sarà la somma dei lavori, ovvero l'integrale

$$V = \int_0^R dr \frac{6\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} = \frac{6\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(6\pi\rho R^3)^2}{15\epsilon_0}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}$$

$$\text{essendo } q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

ii) la stessa energia può essere calcolata dall'espressione

$$V = \frac{1}{2} \int_0^R dr 4\pi r^2 \rho r^2 \varphi(r) = \frac{3q}{2R^3} \int_0^R dr r^2 \varphi(r)$$

sabba il fatto che ci dobbiamo calcolare il $\varphi(r)$ associato alla distribuzione di carica completa. Per fare questo calcolo basta riprendere il risultato di p. 1.36 per il campo \vec{E} di una sfera uniformemente carica:

$$\text{per } 0 < r < R : E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r ; \text{ per } r > R : E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

da cui

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= - \int_{\infty}^r dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{q}{r^2} - \int_r^R dr \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_r^R dr r \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r^2 - R^2) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(r)^2}{R^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} \int_0^R dr \frac{3q}{R^3} r^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \\ &= \frac{3q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \int_0^1 dx x^2 \left[\frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} \right] \quad \leftarrow x = \frac{r}{R} \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}\end{aligned}$$

che è lo stesso risultato ottenuto con il metodo (i).

Note: si potrebbe mostrare, ma non è banale, che $\frac{3}{5}R$ è il valore medio di $1/r_{ij}$ quando r_{ij} sono le distanze

tra punti contenuti nella sfera

Poi sottolineano ancora che l'energia V non è il potenziale elettrico della sfera, ma è l'energia spesa per caricare la sfera!

Ha senso chiedersi dove vengono date queste energie?

In elettostatica classica non è necessario rispondere a una tale domanda. Il valore di V è un numero utile da conoscere in quanto ha a che fare con una proprietà globale del sistema e può essere usato per risolvere problemi in modo semplice in termini di variazioni di energie. La domanda sul "dove" ha senso se riusciamo ad attribuire proprietà "locali" del sistema associate al contenuto di energie. Ad esempio, se consideriamo in elettrodinamica le variazioni locali di energie associate a qualche forma di trasporto di energia. Per andare in questa direzione, già a partire dall'elettostatica consideriamo la possibilità che l'energia stia nel campo elettrico. In che modo?

Ricordiamo la $V = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi$

e ricordiamo la legge di Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ in modo da scrivere

$$\begin{aligned} V &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \varphi \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi \quad | \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\vec{\nabla}^2 \varphi) \varphi \end{aligned}$$

Ora mostriamo che $(\vec{\nabla}^2 \varphi) \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) - (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi)$

Basta applicare le definizioni di laplaciano, divergenza e gradiente.

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 \varphi) \varphi &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \varphi \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \\
 &= \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) - (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi)
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \varphi) + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \\
 &\quad \downarrow \text{teorema di Gauss} \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_S \varphi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{a} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV |\vec{E}|^2
 \end{aligned}$$

Supponiamo che $\rho(\vec{r})$ sia diversa da zero in una regione di spazio limitata e consideriamo V come un volume molto grande che la contiene, ad esempio una sfera di raggio infinito e che comprende tutte le cariche. Essendo S la superficie di tale sfera infinita, posta a infinite distanze dalla distribuzione di carica ρ , il campo $\varphi \vec{\nabla} \varphi$, di cui il primo integrale rappresenta il flusso attraverso S , è nullo. Più in dettaglio, se r è il raggio della sfera V , allora φ diminuisce come $1/r$ al crescere di r , il gradiente $\vec{\nabla} \varphi$ diminuisce come $1/r^2$, e il loro prodotto come $1/r^3$, più velocemente di quanto cresce la superficie S , la cui area va come r^2 . Dunque il flusso diventa nullo se $V \rightarrow \infty$ e sopravvive solo il secondo integrale:

$$V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV |\vec{E}|^2$$

dove l'integrazione è estesa a tutto lo spazio!

Vediamo se i conti tornano per la sfera uniformemente carica di raggio R . Il campo dentro e fuori la sfera è quello già scritto prima. Basta fare il quadro e integrare:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R dr 4\pi r^2 \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} r \right)^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty dr 4\pi r^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 \\
 &= \frac{4\pi\rho^2}{18\epsilon_0} \frac{R^5}{5} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2R} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4\pi\rho R^3}{3} \right)^2}_{q^2} \frac{1}{10R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2R} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{OK}
 \end{aligned}$$

Dalle relazioni $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\vec{E}|^2$ (*)

appare come se l'energia elettostatica di una distribuzione di cariche sia immagazzinata nello spazio, tramite il campo elettrico prodotto dalle cariche stesse.

Come vedremo, questo è un risultato importante. Qui però, per evitare troppi entusiasmi, seguiamo anche un problema:

l'espressione non vale per cariche puntiformi!

Si vede subito considerando la sferetta di prima e prendendo il limite $R \rightarrow 0$ e carica q costante

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ q \text{ cost}}} \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \infty \quad \text{l'energia diverge.}$$

Questo significa che l'espressione (*) non va usata per calcolare l'energia necessaria a costituire una carica puntiforme, qualunque significato si voglia dare all'energia di una partecella puntiforme.

Per usare le (*) si deve assumere che ρ sia una funzione finita ovunque.

Problema comune al precedente: l'espressione (*) dà sempre un'energia V positiva, ma esistono distribuzioni di cariche discrete con energie V negative. Ad esempio, l'energia elettostatica di un dipolo, cioè due cariche di segno opposto poste ad una certa distanza.

Altro problema: l'energia V , comunque calcolata, non soddisfa il principio di sovrapposizione, l'energia V di due distribuzioni di carica non è la somma delle energie elettostatiche di ciascuna. Più che un problema, queste è una ovvia conseguenza del fatto che V è una quantità che espone una proprietà globale del sistema, in modo non additivo.