

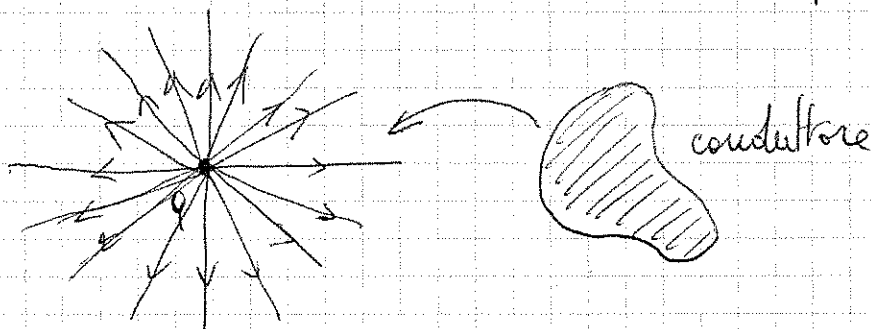
2.1 CONDUITORI

Conduttori: cariche libere di muoversi al loro interno
esempi: elettroni di conduzione nei metalli
ioni + o - nei liquidi e nei gas

Qui ci occupiamo degli stati stazionari, con cariche ferme all'equilibrio.

Situazione banale: pezzo di materiale conduttore neutro e posto in una regione di campo \vec{E} nullo.
In questo caso non succede nulla. Il conduttore contiene molte cariche a livello microscopico, ma queste sono distribuite in modo tale da annullare la carica netta in ogni parte del conduttore, in ogni volumetto comunque piccolo, perché non su scale atomiche. Ma le scale atomiche qui non ci interessano (su scale atomiche la fisica classica non funziona in ogni caso, ma questo non ci impedisce di studiare cosa succede alle cariche su scale più grandi).

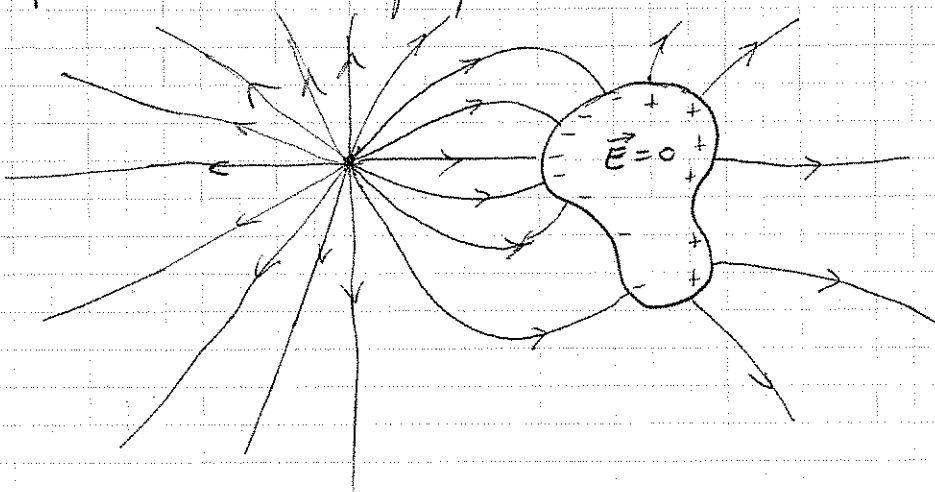
Situazione meno banale: lo stesso pezzo di conduttore ma in una regione in cui $\vec{E} \neq 0$; ad esempio, vicino ad una carica puntiforme q .



Se avviciniamo il conduttore alla carica q , le cariche interne al conduttore tenderanno a separarsi; quelle negative sono attratte dalle q positive, quelle positive saranno respinte. Se le cariche libere di muoversi sono solo negative (come gli elettroni nei metalli) queste si posizioneranno nella

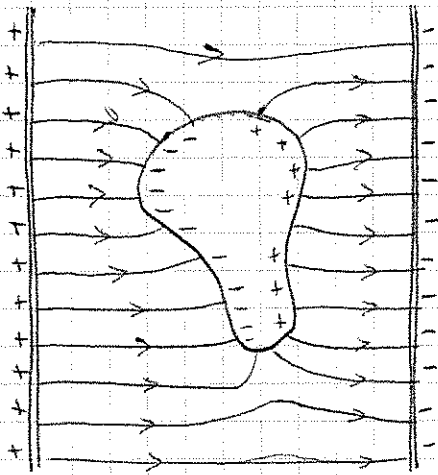
parte di conduttore più vicina a q lasciando dalla parte opposta uno squilibrio di cariche positive (il conduttore deve rimanere globalmente neutro). Assumiamo che tale riposizionamento di cariche sia istantaneo o quasi, cioè trascuriamo la durata di tale processo, e ci concentriamo sulla configurazione finale di equilibrio. Per esserci equilibrio occorre che le cariche interne al conduttore non sentano forze, oppure sentano forze con risultante nulla. Se le forze sono solo di tipo elettostatico, questo implica automaticamente che il campo elettostatico \vec{E} sia nulla ovunque all'interno del conduttore. Un campo \vec{E} non nullo, infatti, farebbe muovere le cariche verso una nuova configurazione. Il campo \vec{E} all'interno del conduttore è la somma di quello dovuto alla carica q e di quello dovuto alle cariche del conduttore che si sono riposizionate per effetto della vicinanza di q . Dunque, il riposizionamento avviene proprio in modo tale da annullare il campo all'interno.

La situazione alla superficie è diversa, perché in prossimità delle superficie esistono forze diverse che impediscono alle cariche di fuoriuscire dal conduttore. Tali forze agiscono perpendicolarmente alla superficie, così che è possibile mantenere cariche all'equilibrio in presenza di un campo elettrico perpendicolare alla superficie a cui si oppongono le forze che tengono le cariche nel conduttore. Dato che un campo \vec{E} parallelo alla superficie non sarebbe equilibrato da altre forze, l'equilibrio impone che le componenti di \vec{E} parallele alla superficie siano nulle.

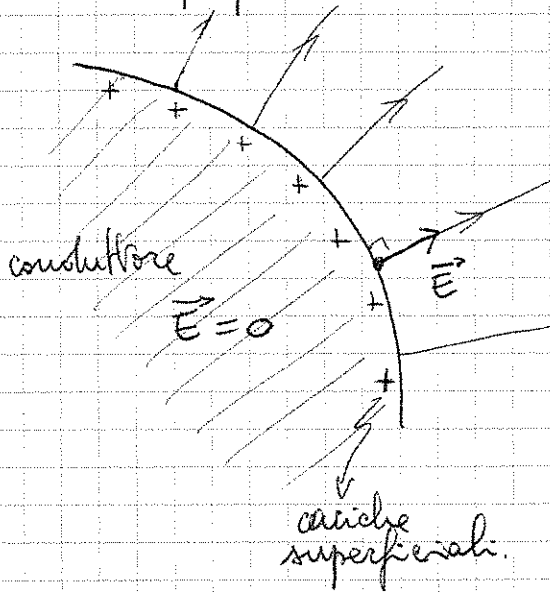


Qualitativamente il campo è questo

Analogamente, per il conduttore tra due piastre piane:



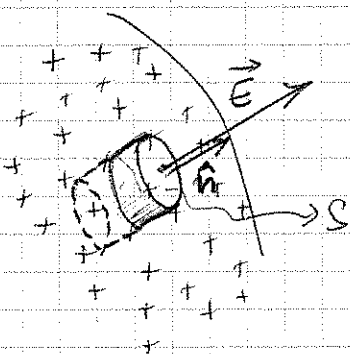
Vicino alla superficie:



Il campo \vec{E} dell'essere
perpendicolare alla superficie
 $E_{||} = 0$

$E_{\perp} \neq 0$ fuori ma $= 0$ dentro
c'è una discontinuità del
campo.

Supponiamo che in un punto della superficie la densità superficiale di carica sia σ . Usiamo la legge di Gauss per legare σ e E_{\perp} . Basta prendere una "superficie di Gauss" cilindrica che intersechi la superficie del conduttore.



Il flusso di \vec{E} uscente dal cilindro è pari al flusso attraverso la sola faccia esterna S , dato che $\vec{E} = 0$ dentro il conduttore. Se l'altezza del cilindro e l'area S sono infinitesime, allora \vec{E} sulla faccia del cilindro coincide con \vec{E} sulla superficie del conduttore (all'esterno di essa) ed è costante su S . Dunque

$$\Phi = |\vec{E}| S$$

Per la legge di Gauss dev'essere

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow \text{carica dentro il cilindretto}$$

Combinando le due espressioni si ha:

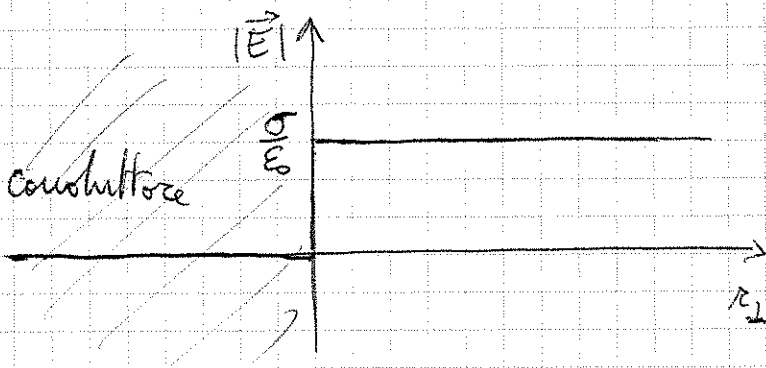
$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Essendo $\vec{E} \perp$ alla superficie, possiamo scrivere

$$\vec{E} = \hat{n} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

questo è noto come
teorema di Coulomb.

Sia r_{\perp} la ~~la~~ coordinata ortogonale alla superficie; allora il modulo del campo ha l'andamento (in prossimità della superficie):



Dal fatto che $\vec{E} = 0$ ovunque nel conduttore e dalla definizione $\Delta\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$, segue che $\Delta\varphi = 0$ per qualsiasi percorso interno al conduttore. In altri termini

$$\varphi = \text{costante}$$

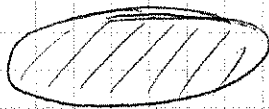
ovunque nel conduttore, incluse le superfici. Le superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale. Ciò è consistente con il fatto che le linee di forza del campo \vec{E} sono perpendicolari alla superficie del conduttore.

Ribadiamo che, quando si dice che $\vec{E} = 0$ nel conduttore, si intende il campo medio sentito dalle cariche libere su scale più grandi di quelle atomiche, non il campo "locale" su scale atomiche. Quest'ultimo non è affatto nullo (ad esempio, il campo

\vec{E} in prossimità di ciascun nucleo atomico diverge). Il campo "locale" è rilevante ai fini delle proprietà elettriche macroscopiche, laddove può essere rimpiazzato dal campo medio.

Carica di conduttori per induzione

Prendo un conduttore neutro



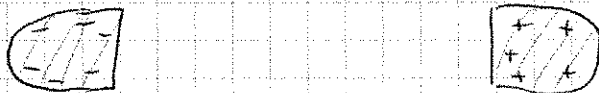
Avvicino una carica positiva q



Taglio il conduttore in due parti e le separo

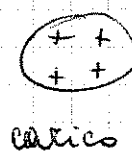
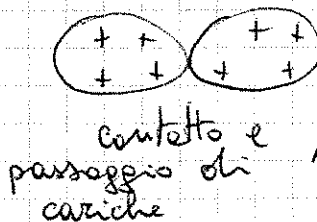


Tolgo la carica q



Ho ottenuto due conduttori carichi!

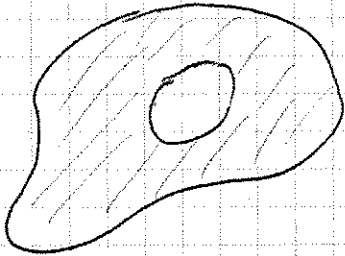
Carica per contatto



Se un conduttore è carico, cioè possiede un eccesso di cariche di un dato segno, tali cariche si respingono e vicende e vanno a disporsi sulla superficie del conduttore in modo che, al solito, $\vec{E} = 0$ ovunque dentro.

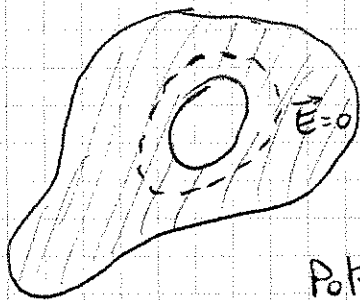
Conduttore cavo

Prendiamo un conduttore con una cavità vuota al suo interno



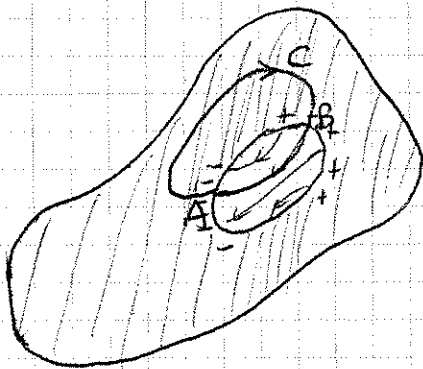
Ovunque nel conduttore il campo \vec{E} dev'essere nullo in condizioni statiche. Eventuali cariche in eccesso, se il conduttore è carico, oppure cariche indotte da un campo esterno, possono stare solo sulla superficie. Ma quali superficie?

Pbm: possono esserci cariche sulla superficie della cavità? Consideriamo una "superficie di Gauss" interna al conduttore e che ~~compresenda~~ racchiude la cavità. Il flusso Φ di



\vec{E} attraverso tale superficie è nullo sempre, dato che \vec{E} è ovunque nullo sulla superficie. Dunque, dalla legge di Gauss segue che la carica nel volume racchiuso è nulla.

Potrebbero però esserci tante cariche + e tante cariche -. L'unico posto dove potrebbero stare è la superficie della cavità. Supponiamo per assurdo che tali cariche ci siano. Vi saranno allora zone di superficie con densità di carica + e zone con densità di carica -. Il campo \vec{E} all'interno della cavità vuota avrà allora linee di forza che vanno da queste a quelle. Consideriamo il circuito

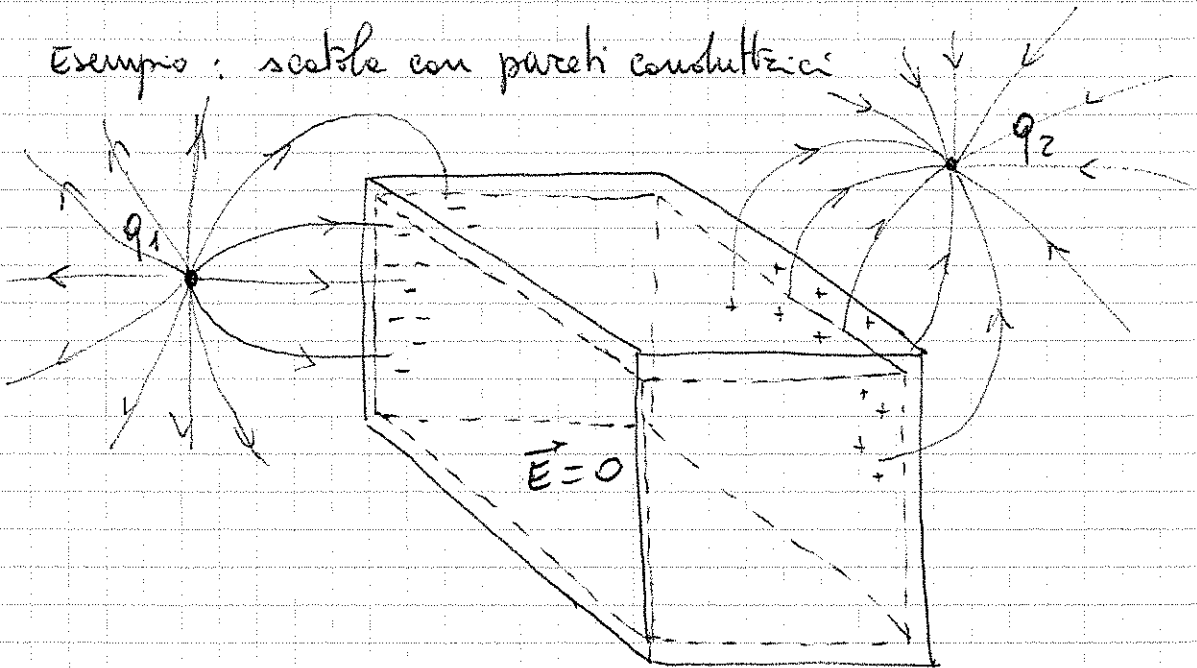


chiuso C in figura e calcoliamo la circolazione di \vec{E} .

Nel tratto da A a B passante per il conduttore $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$, dato che il campo \vec{E} è nullo. Invece nel tratto da B ad A nella cavità vuota $\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{e} \neq 0$ dato che si percorre un tratto di linea di forza di \vec{E} nel vuoto, da cariche + e cariche -. Dunque $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{e} \neq 0$ in contraddizione con la legge fondamentale

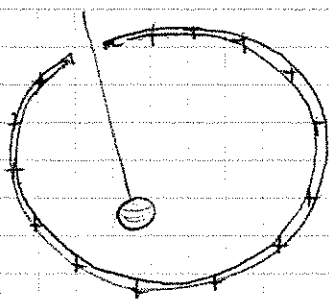
$\nabla \times \vec{E} = 0$ valida per ogni campo elettrostatico. Ne deduciamo che l'ipotesi era sbagliata e che non possiamo esserci cariche sulla superficie della cavità vuota, indipendentemente da ciò che succede fuori dal conduttore e dal fatto che il conduttore sia neutro o carico. Il campo \vec{E} nella cavità è nullo!

Esempio: scatole con pareti conduttrici



Le pareti conduttrici schermano il campo esterno. Tale fenomeno è detto "gabbia di Faraday".

Esempio: guscio sferico cavo



Se inseriamo una "sonda" conduttrice neutra, questa non si carica per contatto, né per induzione, dato che tutte le cariche eventualmente presenti sul guscio se ne stanno sulla superficie esterna, e il campo dentro è nullo.

Note: se il guscio ha carica q ed è sferico, per simmetria la carica si distribuisce in modo isotropo. Il fatto che in un punto qualsiasi interno alla cavità il campo \vec{E} si annulla può essere visto allora come una evidenza dell'andamento in $1/r^2$ delle forze di Coulomb.

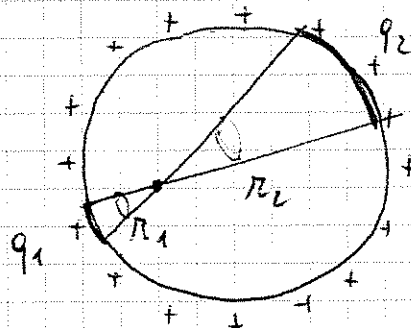
$$\sigma = \text{cost}$$

$$q_1 = \Omega \pi_1^2 \sigma$$

$$q_2 = \Omega \pi_2^2 \sigma$$

$$|\vec{E}_1| \propto \frac{q_1}{\pi_1^2}$$

$$|\vec{E}_2| \propto \frac{q_2}{\pi_2^2}$$

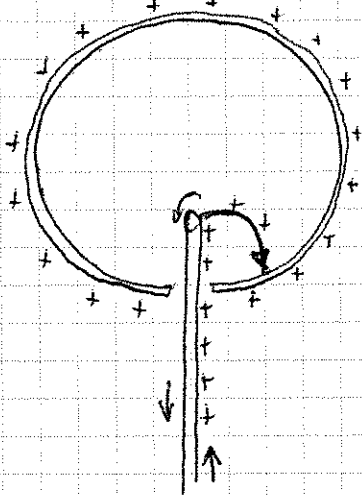


independenti
da r_1 e r_2

Per ogni angolo solido i contributi da destra e da sinistra sono uguali e opposti se il campo decresce come $1/r^2$ e l'area cresce come r^2 .

È una verifica accurata delle legge di Coulomb (più accurata della bilancia di Cavendish).

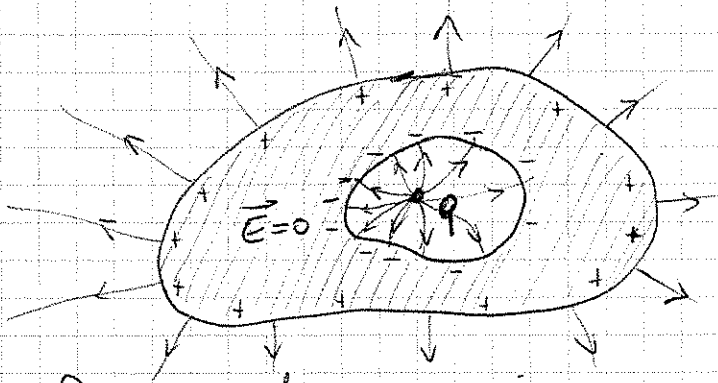
Processo inverso: carica per contatto del guscio sferico



Se si vuole caricare il guscio per contatto, è molto meglio farlo trasportando le cariche all'interno tramite un foro e un nasticcio. In questo modo si evita il campo \vec{E} dovuto alle cariche superficiali sul guscio.

Questo si fa negli apparecchi detti "generatori di Van de Graaf".

Finora abbiamo parlato di cavità vuote. Ma se ci fossero cariche nella cavità?

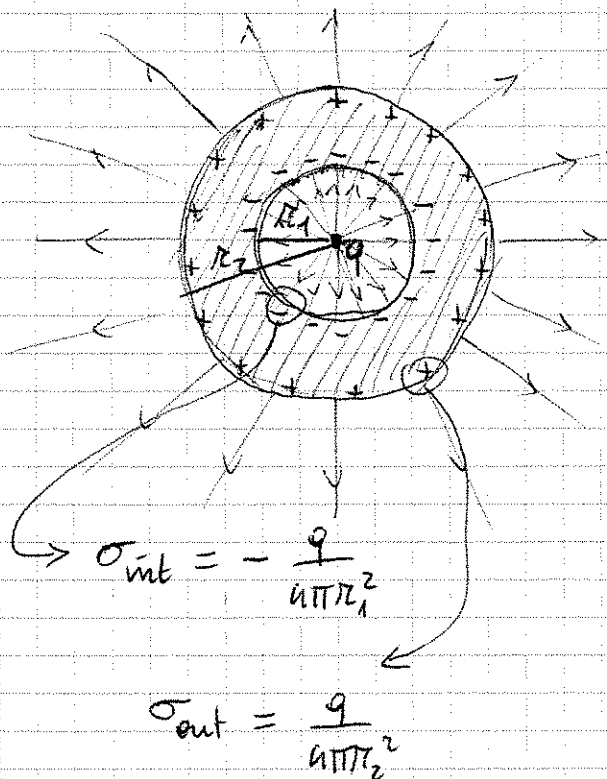


Pensiamo un conduttore neutro in una regione in cui non vi siano cariche. Mettiamo una carica positiva q dentro una cavità del conduttore.

Ragionando come prima, con le superfici di Gauss, si deduce che:

- * se la superficie di Gauss è interna al conduttore e racchiude la cavità, allora il flusso di \vec{E} è nullo, essendo nullo il campo nel conduttore. Perciò la carica q deve essere bilanciata da una carica $-q$ distribuita sulle superficie della cavità.
- * dato che il conduttore è globalmente neutro, deve esserci una carica $+q$ distribuita sulla superficie esterna del conduttore.
- * Vi sarà un campo esterno al conduttore determinato dalla carica $+q$ sulla superficie dello stesso (secondo il teorema di Coulomb).

Esempio semplice: conduttore sferico con cavità sferica concentrica e carica q nella cavità.



All'interno della cavità:

\vec{E} di una carica puntiforme q

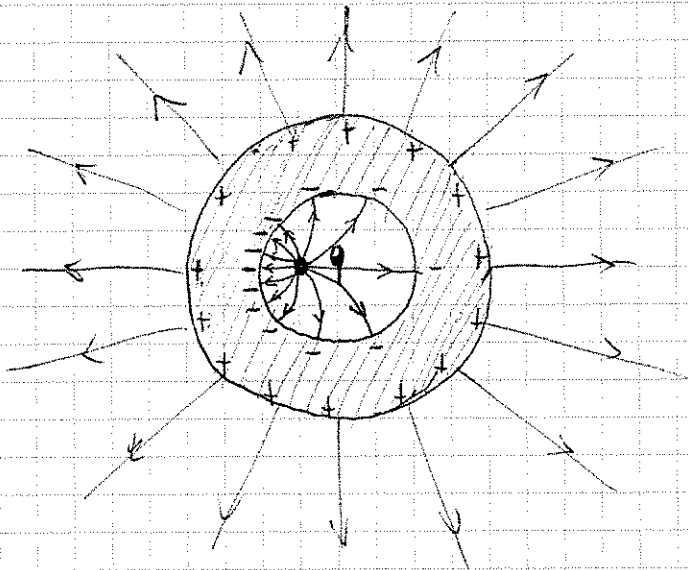
All'interno del conduttore:

$\vec{E} = 0$

All'esterno del conduttore:

\vec{E} di una distribuzione sferica con carica q ; equivalente ad una carica puntiforme q .

E se la carica q non fosse al centro della cavità? Ricordiamo che le linee di forza devono essere sempre perpendicolari alle superfici del conduttore. Allora il campo all'interno della cavità non ha le stesse forme di prima.



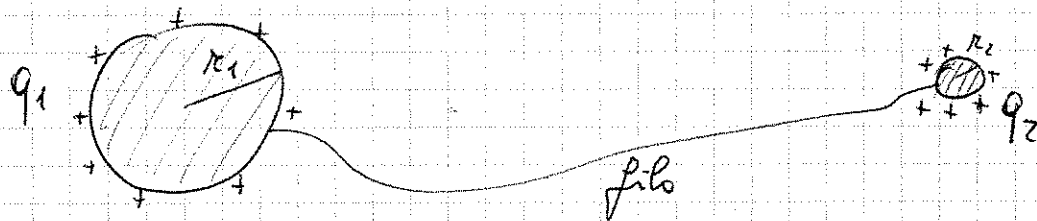
E il campo fuori? Quello è determinato dalle cariche indotte sulle superficie esterne. La densità di carica di queste dipende solo dalla curvatura locale della superficie. Quindi rimane uguale a prima e il campo \vec{E} pure.

Il campo \vec{E} prodotto all'esterno è insensibile alla posizione della carica q all'interno della cavità. È l'alta faccia della gabbia di Faraday.

Occhio però; questa affermazione l'abbiamo dedotta da una serie di argomentazioni, una delle quali non ancora dimostrata: la densità di carica dipende dalla curvatura locale della superficie esterna (una volta assegnata la carica del conduttore e/o le cariche nelle cavità dello stesso). Una dimostrazione rigorosa si otterrebbe usando l'unicità delle soluzioni dell'equazione di Laplace. Ma qui non lo facciamo (si vedano i testi). Ci limitiamo a fare un ragionamento qualitativo per la densità di carica su superfici curve, assegnata la carica totale.

Consideriamo due sfere conduttrici di raggi r_1 e r_2 , distanti tra loro e collegate con un sottile filo conduttore. Il filo fa in modo che le due sfere si trovino allo stesso

potenziale.



Sia $q = q_1 + q_2$ la carica totale.

Le densità superficiali di carica sono

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi r_1^2} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi r_2^2}$$

I potenziali sulle superfici:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad ; \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

ma questi devono essere uguali, dato che il sistema composto dalle due sfere e dal filo corrisponde ad un unico conduttore la cui superficie deve essere equipotenziale. Quindi:

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

ovvero
$$\frac{4\pi r_1^2 \sigma_1}{r_1} = \frac{4\pi r_2^2 \sigma_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_1 \sigma_1 = r_2 \sigma_2$$

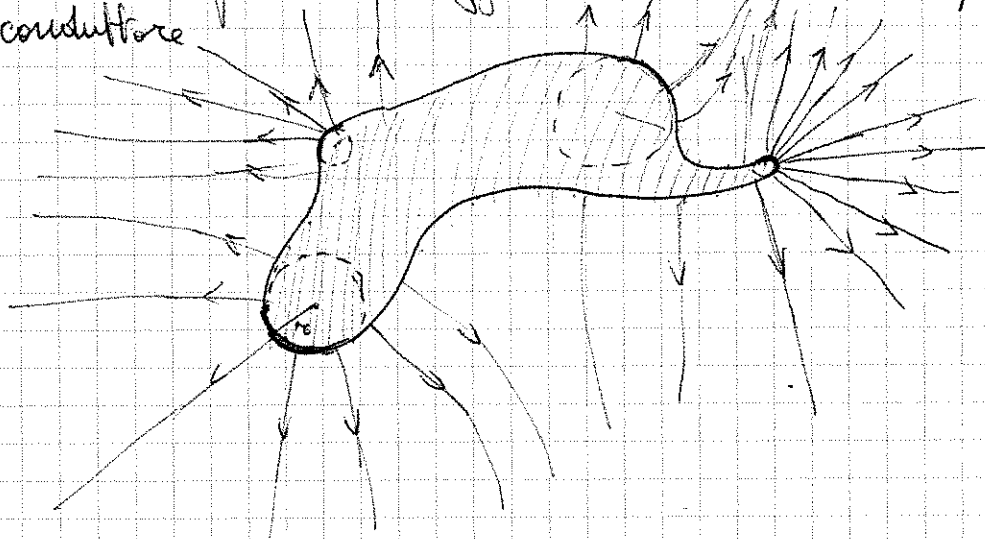
che si può scrivere come

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

che implica anche $\frac{|\vec{E}_1|}{|\vec{E}_2|} = \frac{r_2}{r_1}$ per il campo in

prossimità delle sfere. Densità di carica e campo sono dunque inversamente proporzionali alla curvatura delle superficie, intesa come "raggio di curvatura".

Possiamo definire un raggio di curvatura locale per qualsiasi conduttore



Dall'esempio delle due sfere deduciamo che il campo \vec{E} è più intenso laddove la superficie ha curvatura minore, cioè dove appare più appuntite. Questo si chiama "effetto dispersivo delle punte", essendo in mente il fatto che i conduttori si scaricano in aria più facilmente se dotati di punte, in prossimità delle quali il campo è abbastanza intenso da permettere la ionizzazione delle molecole d'aria.

Un'applicazione dicette dell'effetto punta: il parafulmine

Equazione di Laplace e conduttori

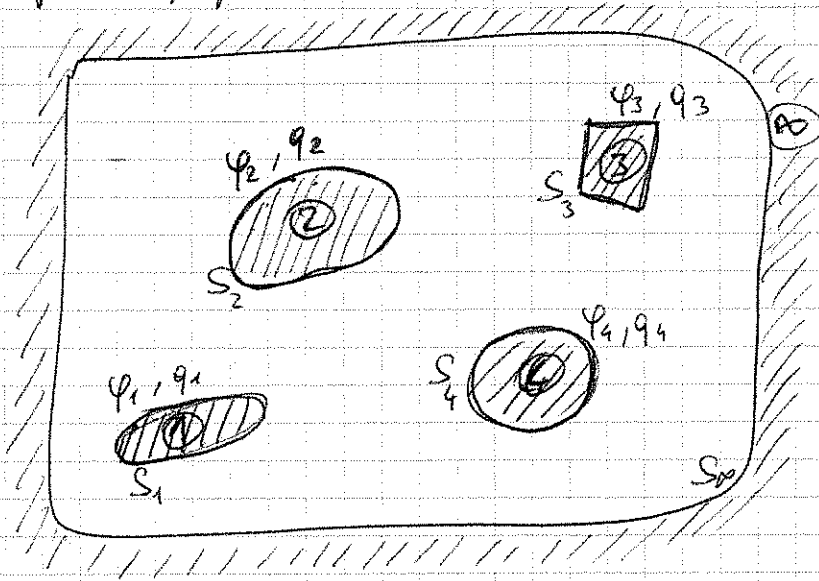
Supponiamo di avere un certo numero di conduttori nello spazio, ciascuno con una certa carica. In linea di principio, e partendo dalle leggi di Coulomb e il principio di sovrapposizione, possiamo calcolare \vec{E} e φ ovunque nello spazio.

In pratica non è affatto banale. Un modo per risolvere il problema è quello di riformularlo in termini di ricerca della soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

in tutto lo spazio esterno ai conduttori (vuoto) con opportuni

ne condizioni al contorno fissate dalla conoscenza del potenziale φ sulle superfici dei conduttori, oppure dalla conoscenza della carica sui conduttori. L'infinito può essere trattato come una superficie equipotenziale e $\varphi = 0$ poste a distanza infinite.



Le condizioni al contorno si possono fissare in due modi equivalenti e alternativi:

- si assegna il valore del potenziale φ su ciascuna superficie S_1, S_2, S_3, \dots (problema di Dirichlet)
- si assegna il campo E_{\perp} su ogni superficie (equivalente a conoscere la densità superficiale di carica). Il valore di E_{\perp} coincide con la derivata $-\frac{\partial \varphi}{\partial n_{\perp}}$. (problema di Neumann)

In entrambi i casi un teorema matematico assicura che, date le condizioni al contorno, la soluzione dell'equazione di Laplace è unica. Di questo avremo già parlato a pp 1.70 e 1.71.

Qui mostriamo un'altra cosa interessante: la soluzione delle equazioni di Laplace è quella che minimizza l'energia elettostatica. Dimostriamolo.

Sia $\varphi(\vec{r})$ il potenziale che risolve la $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$ in tutto lo spazio esterno ai conduttori, con le condizioni al contorno $\varphi(\vec{r}) = \varphi_i = \text{costante}$ sulla i -esima superficie ($i=1, 2, 3, \dots$).

L'energia elettrostatica vale

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}\varphi)$$

↳ spazio vuoto tra i conduttori

Ora consideriamo un potenziale $\tilde{\varphi}(\vec{r})$ che sia identico a $\varphi(\vec{r})$ sulle superfici S_i e che differisca da $\varphi(\vec{r})$, in tutto lo spazio tra i conduttori, di una funzione piccola:

$$\tilde{\varphi}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + f(\vec{r})$$

con $f(\vec{r})$ piccola ovunque (rispetto a φ)
e $f(\vec{r}) = 0$ su tutto il contorno.

Calcoliamo l'energia elettrostatica \tilde{U} associata a $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (\vec{\nabla}\tilde{\varphi}) \cdot (\vec{\nabla}\tilde{\varphi})$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV [\vec{\nabla}(\varphi + f)] \cdot [\vec{\nabla}(\varphi + f)]$$

positivo,
quadratico in f

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV \left\{ (\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}\varphi) + 2(\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}f) + (\vec{\nabla}f) \cdot (\vec{\nabla}f) \right\}$$

Ora il secondo termine può essere trattato così:

$$(\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla}\varphi) - f \nabla^2 \varphi$$

e si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_V dV (\vec{\nabla}\varphi) \cdot (\vec{\nabla}f) &= \int_V dV \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla}\varphi) - \int_V dV f \nabla^2 \varphi \\ &= \int_S f \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{a} - \int_V dV f \nabla^2 \varphi \end{aligned}$$

dove nel primo integrale a destra abbiamo usato il teorema

della divergenza. Entrambi gli integrali sono nulli. Il primo è nullo perché la funzione f è nulla su tutta la superficie di contorno S per ipotesi. Il secondo è nullo perché $\nabla^2 \varphi$ è nullo ovunque in V per ipotesi.

Dunque

$$\tilde{U} = U + \text{termine positivo quadratico in } f$$

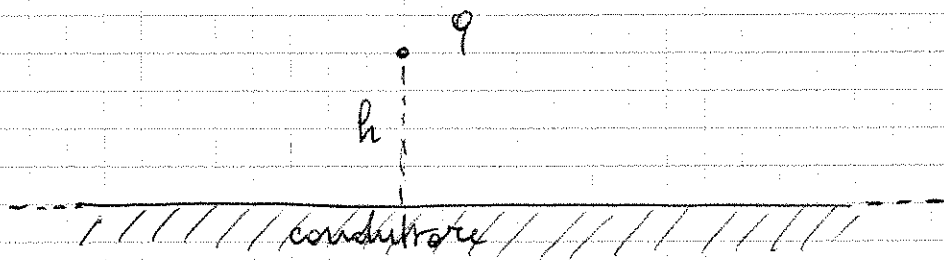
L'energia elettostatica aumenta sempre se aggiungiamo alla soluzione di $\nabla^2 \varphi = 0$ una funzione qualsiasi, tenendo fisse le condizioni al contorno. In altri termini, φ è la funzione che rende minimo l'energia elettostatica.

Questo suggerisce anche un metodo di calcolo per ricavare soluzioni dell'equazione di Laplace approssimate. Basta scegliere una classe di funzioni $\varphi(\vec{r})$ caratterizzate da un certo numero di parametri che si possono variare a piacere. Al variare dei parametri si cerca il minimo della U . La φ che dà la U minima corrisponde ad una soluzione approssimata dell'equazione di Laplace, tanto migliore quanto più efficace è stata la scelta della classe di funzioni $\varphi(\vec{r})$ di partenza. Questo metodo è detto metodo variazionale. È una procedura utilissima in fisica, in molti ambiti.

Si suggerisce la lettura del testo di Feynman, cap 19, Vol II, Parte I.

Un'applicazione interessante dell'unicità delle soluzioni dell'equazione di Laplace è il metodo delle cariche immagine.

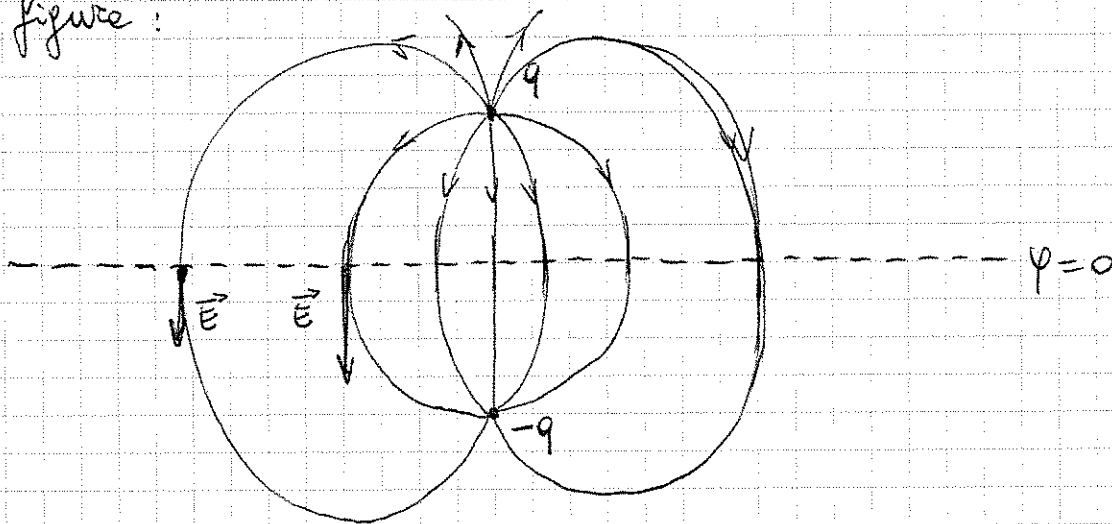
Supponiamo di avere una carica q puntiforme posta di fronte ad una piastra piano conduttrice, ad una distanza h dalle stesse



Le cariche sul conduttore vengono richiamate alla superficie (quella di segno opposto a q). Come si distribuiscono?

- in modo che \vec{E} sia perpendicolare alla superficie
- in modo che $\varphi = \text{costante}$ sulla superficie.

Scegliamo arbitrariamente il riferimento di φ sulla superficie in modo che $\varphi = 0$ su di essa. Nell'intero conduttore $\varphi = \text{cost} = 0$, dato che $\vec{E} = 0$. Vogliamo determinare \vec{E} ovunque nello spazio sopra il conduttore. A tale scopo conviene sostituire il problema reale con un altro problema avente le stesse condizioni al contorno. Consideriamo tutto lo spazio vuoto compreso tra la superficie del conduttore e l'infinito (semispazio superiore nella figura) esclusa una sferetta infinitesima attorno a q . A questo aggiungiamo ~~un~~ un semispazio inferiore, vuoto, con una carica $-q$, come in figura:



Di questo problema conosciamo già la soluzione, trattandosi del dipolo discusso a p. 1.18 - 1.19.

È facile calcolare φ in un punto generico dello spazio, se il piano orizzontale è il piano xy e l'asse z passa per le cariche $\pm q$, allora

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right]$$

Il piano xy è equipotenziale e il campo elettrico ~~lungo~~ sul piano è diretto lungo z e si calcola facilmente da

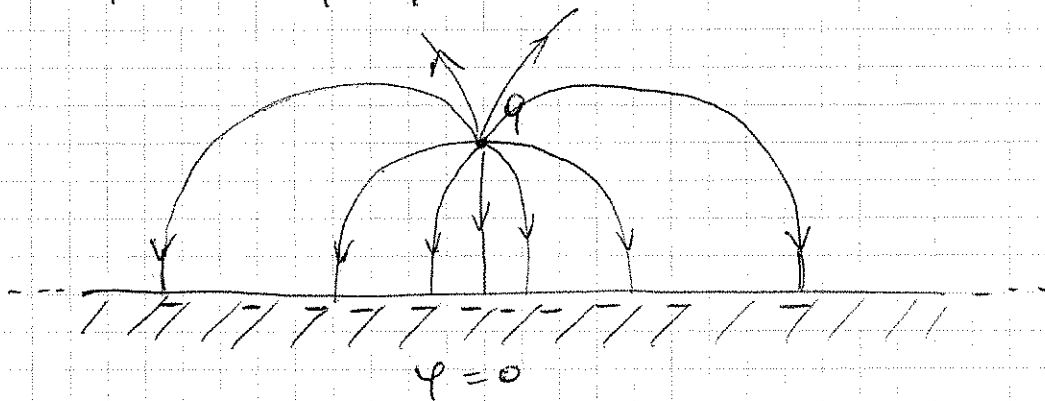
$$E_{\perp} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

si trova

$$E_{\perp} = - \frac{2qh}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\pi_{\parallel}^2 + h^2)^{3/2}}$$

come in 1.18 (con la sostituzione $d \rightarrow 2h$ e $x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \pi_{\parallel}^2$).

Ora, questo secondo problema che abbiamo risolto coincide con il primo problema, quello della piastra conduttrice, l'andamento del potenziale φ in tutto il semispazio superiore. Infatti $\varphi=0$ sul piano xy e all'infinito, e φ approssima quella di una singola carica puntiforme in un intorno di q . Dunque la $\nabla^2 \varphi = 0$ deve dare la stessa soluzione in entrambi i casi, almeno nel semispazio superiore. Quello inferiore è banale, nel caso del conduttore, dato che $\varphi=0$ per $z < 0$.



Possiamo anche calcolare la densità di carica sulle piastre usando il teorema di Coulomb $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$?

$$\sigma(\pi_{\parallel}) = - \frac{qh}{2\pi(\pi_{\parallel}^2 + h^2)^{3/2}}$$

è di segno opposto a q come ci si aspetterebbe. Ha valore massimo in $\pi_{\parallel}=0$ e decresce all'infinito allontanandosi da tale punto.

La carica totale che si è ridistribuita sul conduttore per effetto di q può essere calcolata integrando $\sigma(\pi_{\parallel})$:

$$\begin{aligned}
 \int_S \sigma(\pi_{||}) da &= \int_0^{\infty} d\pi_{||} \underbrace{2\pi\pi_{||}}_{\text{area dell'anello di raggio } \pi_{||}} \sigma(\pi_{||}) \\
 &= -qh \int_0^{\infty} d\pi_{||} \frac{\pi_{||}}{(\pi_{||}^2 + h^2)^{3/2}} \quad \leftarrow \eta = \pi_{||}^2 + h^2 \\
 &= -\frac{qh}{2} \int_{h^2}^{\infty} d\eta \eta^{-3/2} \\
 &= qh \left(\eta^{-1/2} \right)_{h^2}^{\infty} = -q
 \end{aligned}$$

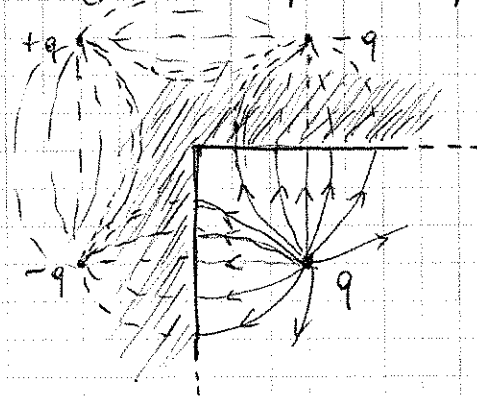
È ragionevole; la carica usata sul conduttore è giusto $-q$.
 La carica $-q$ del problema fittizio senza conduttore, che abbiamo usato per dedurre la soluzione del problema vero, è detta carica immagine.

Notiamo che la carica q posta sopra il conduttore viene attratta verso il conduttore dalla carica $-q$ che si trova sulla piastra. La forza è la stessa che la carica q risente nel problema delle due cariche $\pm q$, dove $-q$ è la carica immagine. Si può calcolare con la legge di Coulomb:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2h)^2} \hat{z}$$

Il metodo delle cariche immagine può essere usato, con varie difficoltà, anche in geometrie più complicate, o con superfici curve.

Esempio:



CONDENSATORI E CAPACITA'

Consideriamo un sistema composto da due conduttori carichi con carica uguale in modulo ma opposta in segno, $\pm Q$. I due conduttori si trovano ad una differenza di potenziale $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

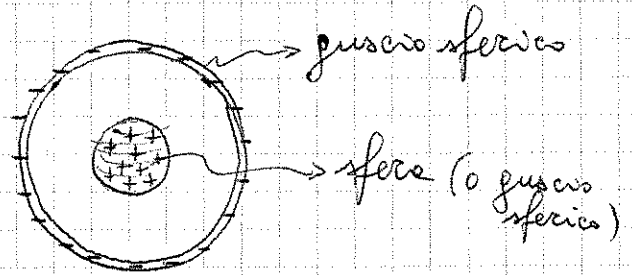
Definiamo tale sistema un "condensatore" e definiamo la sua "capacità" come la quantità

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta\varphi} \right|$$

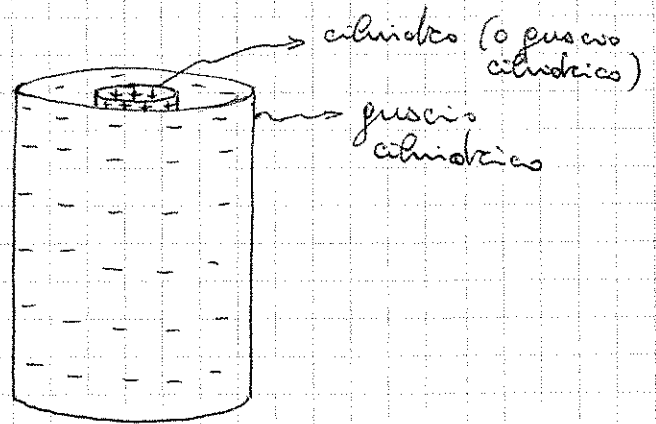
I due conduttori sono detti "armature" del condensatore.

Esempi:

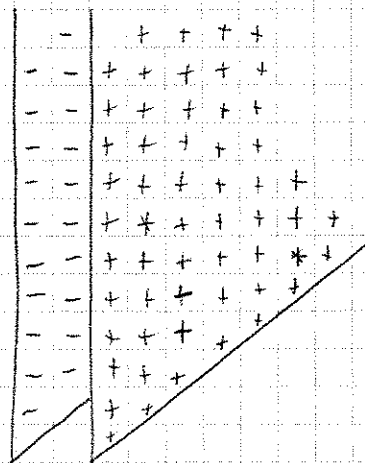
condensatore sferico



condensatore cilindrico



condensatore piano



Calcoliamo la capacità di un condensatore piano, costituito da due armature di superficie S , densità di carica $\sigma = Q/S$ uniforme, poste a distanza d . Supponiamo di poter approssimare il campo \vec{E} delle due lastre con quello dovuto a due lastre infinite, aventi la stessa densità di carica. L'approssimazione sarà molto buona all'interno del conduttore, un po' meno ai bordi. Il campo per le piastre infinite l'avevamo già calcolato e pp. 1.49 e 1.31. È uniforme e vale in modulo

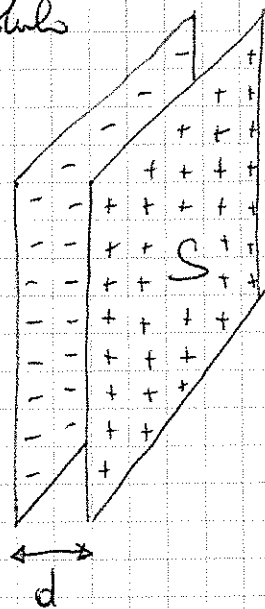
$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La differenza di potenziale è

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

Allora la capacità è

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta\varphi} \right| = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



Dipende solo dalla geometria del sistema.

Unità di misura della capacità:

dalla definizione si vede che

$$[C] = \left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \right]$$

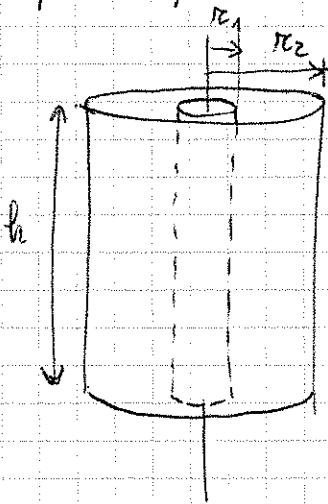
si introduce un'unità di misura "ad hoc": il farad (F)

$$1 \text{ farad} = 1 \frac{\text{coulomb}}{\text{Volt}}$$

Il farad è grande! Tipici valori si esprimono in picofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$), nanofarad ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) o microfarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$).

Nota: si può esprimere ϵ_0 in $\frac{\text{F}}{\text{m}}$ (farad su metro)!

Ora calcoliamo la capacità di un condensatore cilindrico, sempre trascurando gli effetti di bordo, cioè considerando le armature come fossero parte di cilindri infiniti.



Il campo \vec{E} si calcola facilmente con la legge di Gauss, come a p. 1.32 Prendiamo una superficie di Gauss cilindrica di raggio r e calcoliamo il flusso di \vec{E} . Per simmetria \vec{E} dev'essere radiale, perpendicolare alla superficie esterna dei cilindri, e il suo modulo non dipende dall'angolo

attorno all'asse per la simmetria estensionale del sistema:

$$\vec{E} = \hat{r} E(r)$$

\hat{r} → distanza dall'asse
 \hat{r} → vettore \perp all'asse dei cilindri

Dunque il flusso attraverso il cilindro di raggio r è

$$\Phi = \underbrace{2\pi r h}_{\text{area esterna del cilindro}} E(r)$$

Per la legge di Gauss deve valere $\Phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ → carica interna

Sia Q la carica positiva sull'armatura interna di raggio r_1 e $-Q$ la carica sull'armatura esterna di raggio r_2 . Allora

$$\text{se } r < r_1 : q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\text{se } r_1 < r < r_2 : q_{\text{int}} = Q \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r}$$

$$\text{se } r > r_2 : q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

Il campo \vec{E} è diverso da zero solo tra le piastre dove vale

$$\vec{E} = \hat{r} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r}$$

La differenza di potenziale si ricava integrando

$$|\Delta\varphi| = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Da cui la capacità

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Anche qui tutto dipende dai parametri geometrici, h, r_1, r_2 .

Notiamo che, se $r_2 \cong r_1 \gg d$, allora si può sviluppare il risultato precedente

$$\log\frac{r_2}{r_1} = \log\left(\frac{r_1+d}{r_1}\right) = \log\left(1+\frac{d}{r_1}\right) \cong \frac{d}{r_1}$$

\uparrow
 $d \ll r_1$

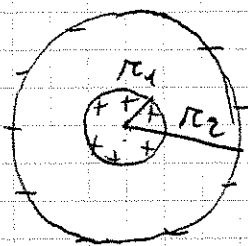
da cui

$$C \cong \frac{\overbrace{2\pi r_1}^S h \epsilon_0}{d} = \frac{S \epsilon_0}{d} \rightarrow \text{come per il condensatore piano di pari superficie.}$$

La curvatura non conta se d è molto inferiore al raggio delle piastre.

Questo suggerisce la possibilità di usare fogli avvolti (tipo fogli di alluminio separati da fogli isolanti coassiali) per ottenere condensatori di grande superficie e poco ingombrati.

Infine, calcoliamo la capacità di un condensatore sferico



\vec{E} è radiale e vale $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ tra

le due armature. E è nullo all'interno ($r < r_1$) e all'esterno ($r > r_2$).

Differenza di potenziale: $|\Delta\varphi| = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

La capacità diventa

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} //$$

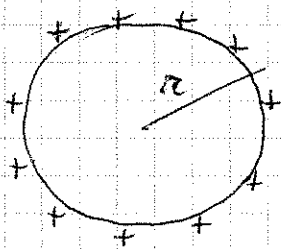
Come prima, se $d \ll r_1 \cong r_2$ si ottiene il risultato del condensatore piano. Infatti

$$C \cong \frac{4\pi\epsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{SE_0}{d}$$

Inoltre si può anche calcolare la capacità di una singola sfera di raggio $r_1 = r$, quando la sfera di raggio r_2 viene presa infinitamente grande ($r_2 \rightarrow \infty$). Dal risultato scritto in alto si ottiene, per $r_2 \rightarrow \infty$,

$$C \cong 4\pi\epsilon_0 r$$

↳ è il rapporto tra la carica su una sfera di raggio r e il potenziale φ sulla superficie della sfera, avendo posto $\varphi = 0$ all'infinito




Esempio: se assumiamo che la Terra sia una sfera conduttrice, allora la sua capacità è

$$C_{\text{terra}} = 4\pi\epsilon_0 r_{\text{terra}}$$

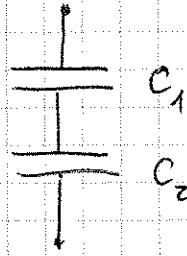
essendo $r_{\text{terra}} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ si ottiene

$$C_{\text{terra}} = 4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 \text{ F} = 712 \mu\text{F}$$

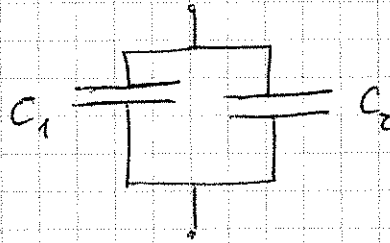
Condensatori come elementi di circuito elettrico

Simbolo  C

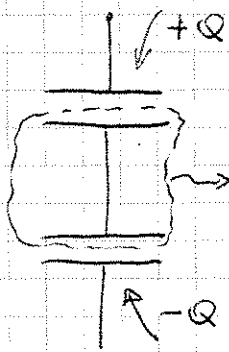
Condensatori in serie:



Condensatori in parallelo:



Calcoliamo la capacità totale di due condensatori in serie.



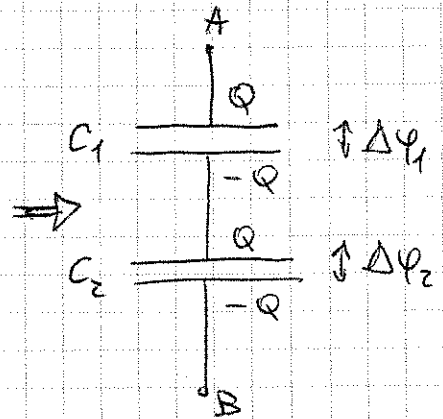
questo conduttore si carica per induzione di carica $-Q$ sopra e $+Q$ sotto

$$\Delta\varphi_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{Q}{C_2}$$

diff. di potenziale tra A e B

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$



Dunque la capacità complessiva è

$$C_{TOT} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

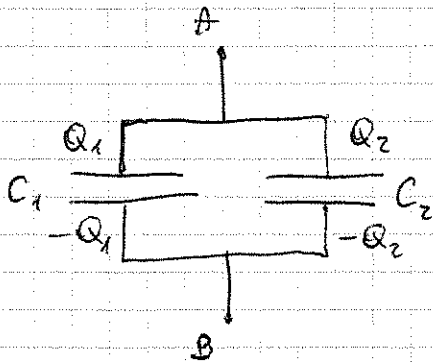
o in altre forme:

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

La stessa espressione è applicabile a più condensatori in serie, C_1, C_2, C_3, \dots

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

Ora calcoliamo C_{TOT} per condensatori in parallelo



In questo caso dev'essere

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi$$

dato che la diff. di potenziale tra A e B non deve dipendere dal percorso.

D'altra parte

$$\Delta\varphi_1 = C_1 Q_1 \quad \text{e} \quad \Delta\varphi_2 = C_2 Q_2$$

Dunque

$$C_{TOT} = \frac{Q_{TOT}}{\Delta\varphi} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta\varphi} = \frac{Q_1}{\Delta\varphi_1} + \frac{Q_2}{\Delta\varphi_2} = C_1 + C_2$$

Anche questa è generalizzabile a più condensatori in parallelo

$$C_{TOT} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Vedremo più avanti quale sarà l'effetto di inserire condensatori in un circuito elettrico. Prima dobbiamo definire cos'è una corrente elettrica.

Energia elettostatica di un condensatore

Quanto lavoro dobbiamo fare per caricare un condensatore di capacità C ?

Immaginiamo di caricarlo un po' per volta, aggiungendo una carica dq al q già presente, con q che va da 0 a Q . Si tratta di portare un dq da una armatura all'altra quando

la differenza di potenziale tra le due e^- $\Delta\varphi = \frac{q}{C}$, per definizione di C . Dunque il lavoro elementare è

$$dL = \frac{q}{C} dq$$

e il lavoro totale: $L = \int_0^Q dq \frac{q}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

Questo è proprio l'energia elettostatica. Si può scrivere

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi$$

Tale energia dev'essere ~~la stessa~~ anche uguale all'integrale di $|\vec{E}|^2 \frac{\epsilon_0}{2}$ all'interno del condensatore. Facciamo la verifica nel caso del condensatore piano, dove \vec{E} è uniforme. Si ha

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \left(\frac{Q}{SE_0} \right)^2$$

tra le
armature

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ essendo } \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{SE_0^2} \int dV$$

tra le
armature

→ volume interno, tra le piastre
di superficie S e distanza d

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{SE_0} Sd$$

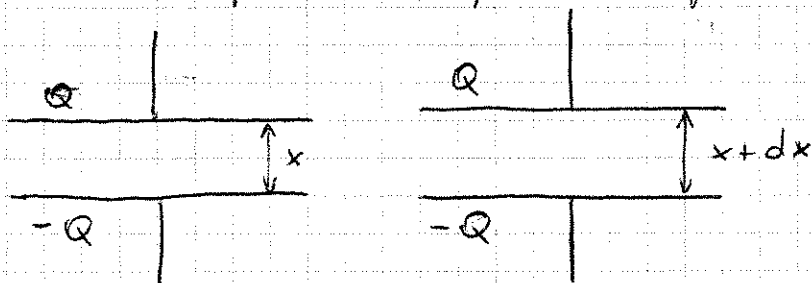
$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{SE_0} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ come si voleva.}$$

Analoga verifica si potrebbe fare per condensatori sferici, cilindrici, ecc.

Dunque i condensatori sono in grado di "immagazzinare" energie elettostatica sotto forma di densità di energia nel campo elettrico, $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$.

Forza tra le armature e pressione elettrostatica

Consideriamo un condensatore piano, con armature parallele di superficie S e distanza x , caricate con carica Q . Sia Q costante e x variabile. Per incrementare la distanza da x a $x+dx$ occorre fare lavoro. Conviene calcolare l'energia elettrostatica prima e dopo. La differenza è il lavoro svolto.



$$L = U_f - U_i = \frac{Q^2}{2C_f} - \frac{Q^2}{2C_i} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} [(x+dx) - x]$$

/ {
finale iniziale

$$= \frac{Q^2 dx}{2\epsilon_0 S}$$

Questa variazione di energia coincide con l'energia nel campo \vec{E} contenuto nel volume aggiunto $dV = S dx$, essendo

$$dU = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 dV = \frac{\epsilon_0 Q^2 S dx}{2 S^2 \epsilon_0^2} = \frac{Q^2 dx}{2\epsilon_0 S}$$

Il lavoro è positivo. Viene fatto dall'esterno contro la forza di Coulomb che attira le due armature caricate con cariche di segno opposto. L'intensità della forza è calcolabile così:

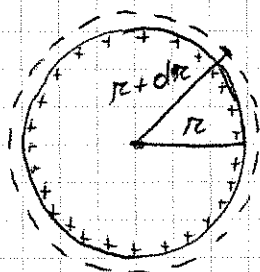
$$\vec{F} = - \left(\frac{dU}{dx} \right) \hat{x} = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \hat{x} \quad \rightarrow \text{si oppone all'incremento della distanza } x.$$

La forza per unità di superficie è

$$\frac{|\vec{F}|}{S} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \rightarrow \text{è una pressione; si chiama pressione elettrostatica.}$$

Per tenere le due armature cariche ad una distanza fissa occorrono forze esterne vincolari. Un modo semplice è quello di inserire tra le armature un materiale solido isolante (non conduttore) di spessore adeguato. In questo caso, come vedremo più avanti, si ottiene anche un aumento di capacità!

Facciamo un calcolo simile, ma per una sfera di raggio variabile.



Il guscio sferico di raggio r , caricato con carica Q , produce un campo \vec{E} radiale, nullo all'interno della sfera e

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

fuori. L'energia elettrostatica può essere calcolata con l'espressione

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

con $C = 4\pi\epsilon_0 r$

Oppure si può calcolare integrando $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ all'esterno della sfera:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{fuori}} dV |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_r^\infty dr' r'^2 E(r')^2 \\ &= 2\pi\epsilon_0 \int_r^\infty dr' r'^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{Q^2}{r'^4} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_r^\infty dr' \frac{1}{r'^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad \text{come prima} \end{aligned}$$

Se il raggio viene incrementato da r a $r+dr$, l'energia varia con:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) dr = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

Se dr è positivo l'energia elettostatica diminuisce. Questo significa che il lavoro fatto dall'esterno è negativo, cioè viene fatto contro le forze del campo elettostatico che tendono ad aumentare spontaneamente il raggio della sfera. Ciò è consistente con la repulsione tra le cariche sulla sua superficie. La quantità

$$|\vec{F}| = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

è il modulo di tale forza, mentre la pressione elettostatica è lo stesso diviso per la superficie $S = 4\pi r^2$:

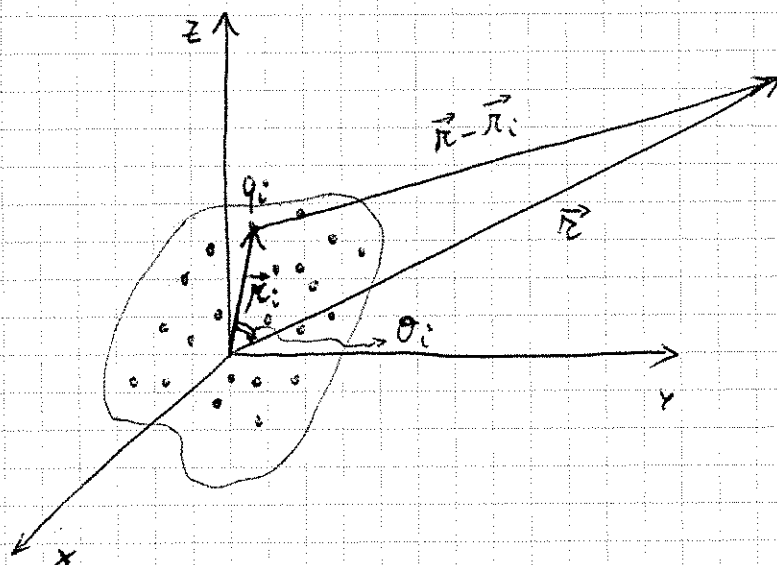
$$\frac{|\vec{F}|}{S} = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

come nel caso precedente.

Seguono alcuni esercizi sui condensatori: (calcolo di capacità, serie e parallelo, conduttore piano con inserita una lastra conduttrice, ...)

SVILUPPO IN MULTIPOLI DEL POTENZIALE ELETTRICO

Prendiamo una distribuzione di N cariche puntiformi che occupano una regione limitata di spazio



Vogliamo calcolare il potenziale elettrico φ dovuto alla distribuzione di cariche assegnate e lo vogliamo calcolare in un punto dello spazio \vec{r} molto distante dalle cariche, cioè per $r \gg r_i$ per qualsiasi carica i -esima della distribuzione.

Applicando l'espressione di φ per cariche puntiformi e il principio di sovrapposizione, si ha

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\theta_i}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2\frac{r_i}{r} \cos\theta_i\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Questa espressione è esatta per qualsiasi \vec{r} . A questo punto applichiamo l'assunzione $r \gg r_i$ per sviluppare in serie di Taylor. Baste ricordare che

$$\frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \ll 1} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

da cui

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i\right]} \xrightarrow{\frac{r_i}{r} \ll 1} 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i \right]^2 + \dots$$
$$= 1 + \frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta_i - 1}{2} \right) + \dots$$

Quindi:

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i \left[1 + \frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta_i - 1}{2} \right) + \dots \right]$$

Può essere scritto così:

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right] \quad \text{espansione in multipoli}$$

con

$$K_0 = \sum_{i=1}^N q_i = Q \quad \text{monopolo elettrico} = \text{carica totale}$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^N q_i r_i \cos \theta_i = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \cdot \hat{r} \quad \text{termine di dipolo elettrico}$$

$$\text{chiamiamo } \vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \quad \text{momento di dipolo elettrico}$$

$$\text{allora } K_1 = \vec{p} \cdot \hat{r}$$

$$K_2 = \sum_{i=1}^N q_i r_i^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta_i - 1}{2} \right) \quad \text{termine di quadrupolo elettrico}$$

Dunque il potenziale asintotico è sviluppabile così:

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^N q_i r_i^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta_i - 1}{2} \right) + \dots \right]$$

Per distribuzioni con carica totale non nulla, $Q \neq 0$, il termine di monopolo è dominante e la distribuzione produce un

effetto a grandi distanze equivalente a quello di una carica puntiforme, gli altri termini dello sviluppo essendo trascurabili (vanno a zero più rapidamente).

Se invece $Q=0$ e $\vec{p} \neq 0$, la distribuzione di carica si comporta come un dipolo elettrico, come a p. 1.44. Il momento di dipolo \vec{p} misura uno scostamento dei centri delle cariche + rispetto alle -. Per vederlo basta separare la somma sulle cariche in due somme separate sulle cariche + e sulle cariche - :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i = \sum_{i+} q_{i+} \vec{r}_{i+} + \sum_{i-} q_{i-} \vec{r}_{i-}$$

$$= Q^+ \left(\frac{\sum_{i+} q_{i+} \vec{r}_{i+}}{\sum_{i+} q_{i+}} \right) + Q^- \left(\frac{\sum_{i-} q_{i-} \vec{r}_{i-}}{\sum_{i-} q_{i-}} \right)$$

← somma cariche +
← somma cariche -

possiamo definire, in analogia al centro di massa, i due centri di carica

$$\vec{R}_+ = \frac{\sum_{i+} q_{i+} \vec{r}_{i+}}{\sum_{i+} q_{i+}} ; \quad \vec{R}_- = \frac{\sum_{i-} q_{i-} \vec{r}_{i-}}{\sum_{i-} q_{i-}}$$

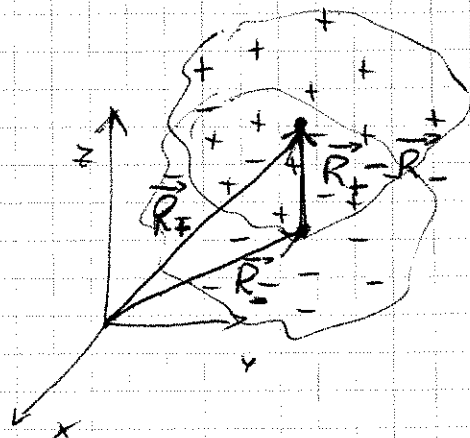
Allora $\vec{p} = Q^+ \vec{R}_+ + Q^- \vec{R}_-$

e se la distribuzione è neutra si ha $0 = Q = Q^+ + Q^-$,
ovvero $Q^- = -Q^+$. Dunque

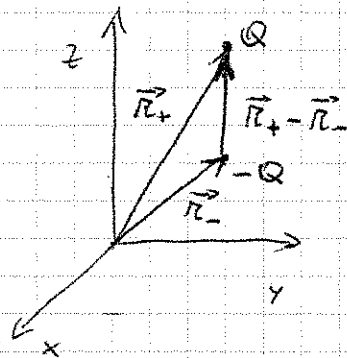
$$\vec{p} = Q^+ (\vec{R}_+ - \vec{R}_-)$$

← distanza tra i centri di carica

← non dipende dalla scelta del sistema di riferimento.



Il caso più semplice è quello di due cariche $\pm Q$

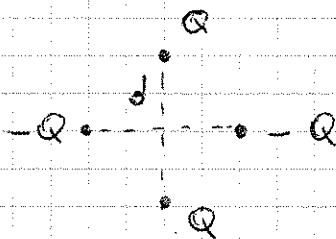


$$\begin{aligned} \vec{p} &= Q\vec{r}_+ - Q\vec{r}_- \\ &= Q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \\ &= Q\vec{d} \end{aligned}$$

coincide con la definizione di p. 1.44.

In generale: $\vec{p} \neq 0$ se i centri di carica di una distribuzione neutra non coincidono. Al contrario $\vec{p} = 0$ se coincidono.

Esempio: 4 cariche così



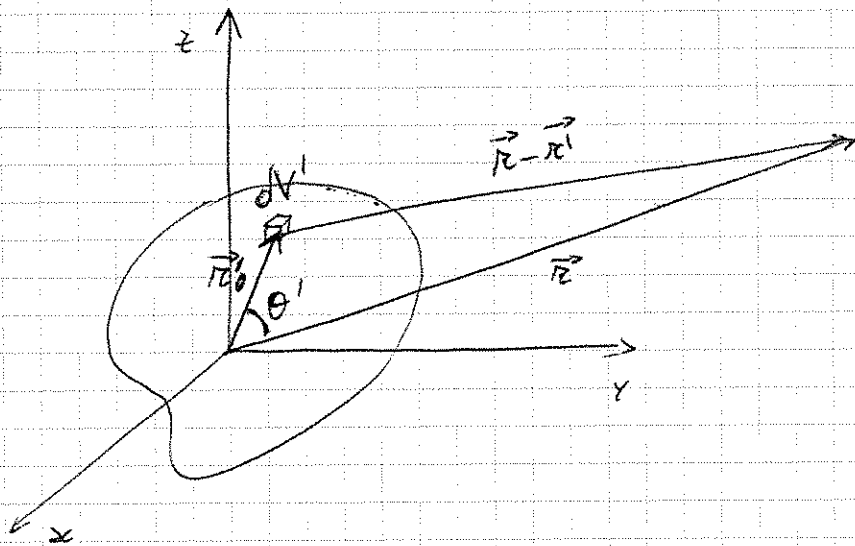
hanno $Q_{TOT} = 0$ (no monopolo) e i centri di carica delle cariche + e - coincidenti, al centro della configurazione (no dipolo).

Questa ultima configurazione ha momento di quadrupolo non nullo. Infatti

$$\begin{aligned} K_2 &= \sum_{i=1}^4 q_i r_i^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta_i - 1}{2} \right) \\ \text{con } \vec{r} = \vec{z} & \quad \Bigg| \\ &= Q d^2 \left[\frac{3 \cos^2 0 - 1}{2} - \frac{3 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1}{2} + \frac{3 \cos^2 \pi - 1}{2} - \frac{3 \cos^2 \frac{3}{2}\pi - 1}{2} \right] \\ &= 3Qd^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Il termine di quadrupolo K_2 rende conto della deviazione da una distribuzione isotropa (sferica) di cariche.

Il tutto è generalizzabile ad una distribuzione continua, con densità di carica $\rho(\vec{r})$.



potenziale asintotico ($r \gg r'$):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right]$$

con

$$Q = \int dV' \rho(\vec{r}') = \int dV' \rho(r')$$

$$\vec{P} = \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = \int dV' r' \rho(r')$$

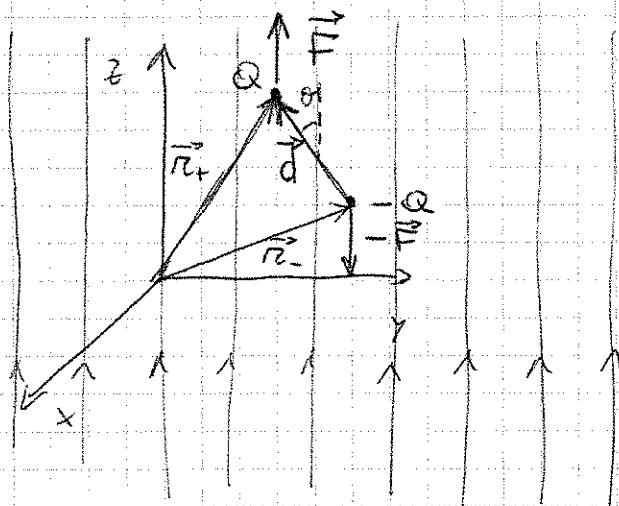
$$K_2 = \int dV' r'^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) \rho(\vec{r}')$$

Da questa espressione è anche facile dimostrare che $K_2 = 0$ per una distribuzione sferica, $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$. Infatti, in tal caso

$$\begin{aligned} K_2 &= \int dV r^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \rho(r) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \\ &= \pi \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) \int_0^\pi d\cos \theta (3 \cos^2 \theta - 1) = 0 \\ &\quad \underbrace{\left[\cos^3 \theta - \cos \theta \right]_{-1}^1}_{=0} \end{aligned}$$

Energia potenziale di un dipolo elettrico in un campo \vec{E} esterno

Caso semplice: due cariche $\pm Q$ e distanza d fissate, poste in un campo elettrico esterno uniforme \vec{E} .



Le forze dovute al campo \vec{E} tendono a ruotare il dipolo in modo da allineare \vec{p} con \vec{E} .

Sia θ l'angolo tra \vec{p} e \vec{E} . Allora il momento delle forze rispetto al punto medio tra le cariche vale

$$|\vec{\tau}| = 2 \frac{d}{2} QE \sin \theta$$

$$= QdE \sin \theta = |\vec{p} \times \vec{E}|$$

La relazione vale anche in senso vettoriale, non solo per i moduli, dato che $\vec{\tau}$ è perpendicolare sia a \vec{p} che a \vec{E}

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Calcoliamo anche l'energia potenziale del dipolo in questo modo

$$U = Q\varphi(\vec{r}_+) - Q\varphi(\vec{r}_-) = Q\Delta\varphi$$

dove $\varphi(\vec{r})$ è il potenziale associato ad \vec{E} . Si può scrivere:

$$U = Q\Delta\varphi = -Q \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \leftarrow \vec{E} = \hat{z} E$$

$$= -Q \int_{-}^{+} E dz$$

$$= -Q \Delta z E$$

$$= -Q \vec{d} \cdot \vec{E}$$

$$= -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

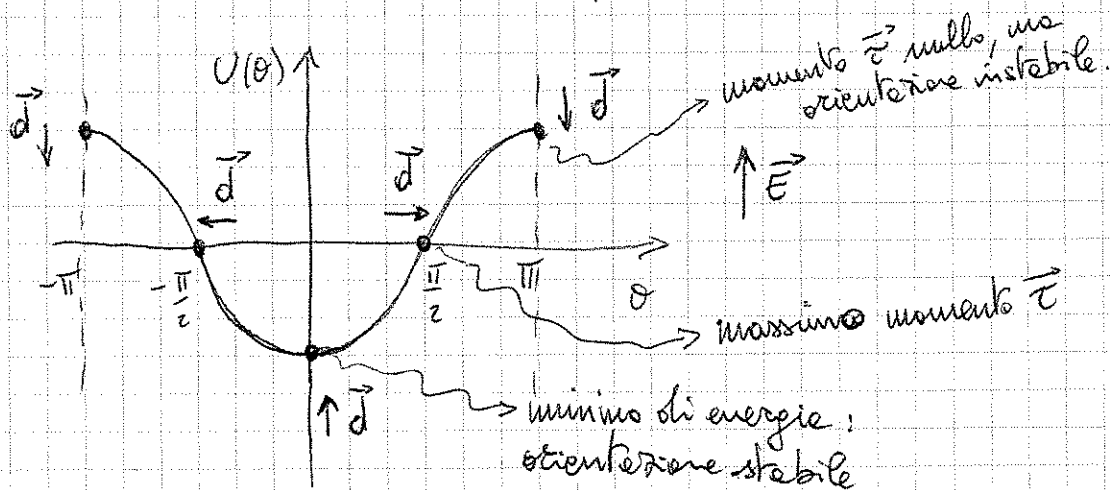
→ allineando \vec{p} con \vec{E} l'energia diminuisce

La relazione tra energia potenziale e momento delle forze si riceve
 calcolando la derivata di U rispetto all'angolo θ

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$$

$$\text{da cui } \frac{dU}{d\theta} = pE \sin \theta = |\vec{p} \times \vec{E}| = |\vec{\tau}|$$

In altri termini $dU = |\vec{\tau}| d\theta$, che è l'espressione
 analoga a $dU = -F dx$ per una forza lungo x .



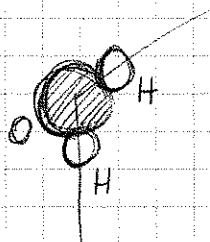
2.2

Dielettrici

I materiali dielettrici sono sostanze in cui tutte le cariche sono legate in atomi e molecole (non ci sono cariche libere di muoversi su scale macroscopiche) e gli effetti elettrici sono dovuti alla manifestazione su scale macroscopiche di distribuzioni di cariche dipolari. Gli atomi e/o le molecole possono avere

- dipolo elettrico permanente
- dipolo elettrico indotto
- entrambi

Esempio di molecole con dipolo permanente: acqua (H_2O)

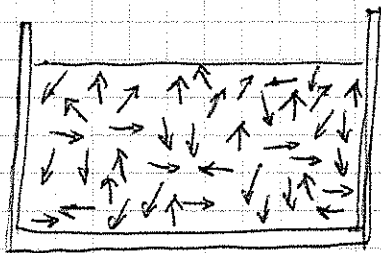


l'ossigeno attrae parte delle cariche negative dell'idrogeno verso di sé, lasciando l'idrogeno più positivo.

La distribuzione di carica ha quindi il centro delle cariche - spostato verso l'ossigeno, rispetto al centro delle cariche +



quindi la molecola ha un momento di dipolo permanente. Un insieme di molecole d'acqua può essere visto, ai fini degli effetti elettrici, come una collezione di dipoli orientati in modo casuale e uguali in modulo. In

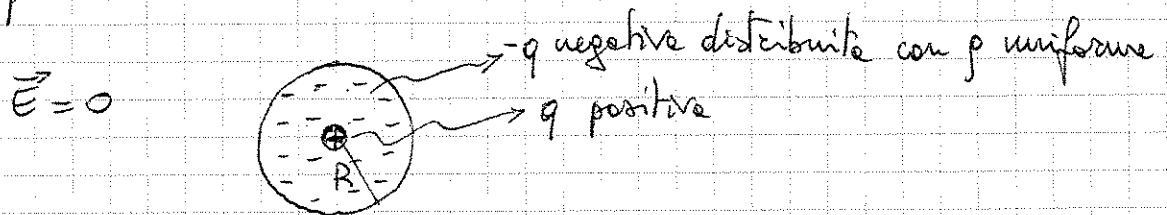


presenza di un campo elettrico esterno i dipoli tenderanno ad orientarsi con il campo, dando luogo ad un effetto macroscopico (polarizzazione).

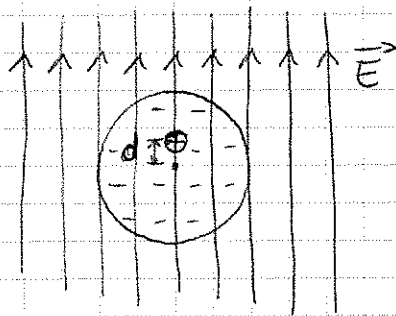
Altri esempi di molecole con momento di dipolo permanente:
 $NaCl$, NH_3

Modello per il dipolo nucleare

Supponiamo di avere un atomo nel vuoto, in assenza di campi esterni, assimilabile ad una distribuzione di cariche neutre, con un nucleo positivo al centro e una nube negativa isotropa intorno. Il momento di dipolo è nullo.



Supponiamo ora di mettere l'atomo in un campo esterno \vec{E} non nullo.



Il campo \vec{E} produrrà uno spostamento delle cariche + rispetto al centro delle cariche -. Immaginiamo le cariche negative come fisse nello

spazio e consideriamo le forze che agiscono sulle cariche positive (si potrebbe fare il contrario e il risultato non cambierebbe). La carica + risente di due forze: la forza $q\vec{E}$ dovuta al campo esterno e la forza dovuta alle cariche negative intorno. La seconda l'avevamo già calcolata a p. 1.34, dove avevamo visto che il campo elettrico prodotto da una distribuzione uniforme e sferica di cariche di densità ρ ~~possiede~~ vale $\frac{\rho r}{3\epsilon_0}$, dove r è la distanza dal centro.

Dunque, se la carica q è posta a distanza d dal centro delle cariche negative, esse risente di una forza complessiva

$$F = qE + q \frac{\rho d}{3\epsilon_0} = qE - \frac{q^2 d}{4\pi R^3 \epsilon_0}$$

e la condizione di equilibrio è

$$E = \frac{q d}{4\pi R^3 \epsilon_0}$$

← questa fissa la distanza d di equilibrio per un \vec{E} esterno assegnato

L'atomo perciò si ritraeva e possedeva un momento di dipolo

elettico indotto dall' \vec{E} esterno, pari a

$$\vec{P} = q \vec{d}$$

con \vec{d} diretto come \vec{E} . Dalla relazione precedente si deduce

$$\vec{P} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \vec{E}$$

Normalmente si introduce una grandezza α , detta polarezzabilità, tale che

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$$

Nel nostro modello risulta $\alpha = 4\pi R^3 = 3V \rightarrow$ volume atomico

Si tratta solo di un modello classico, ma è sufficiente per capire che un campo elettrico \vec{E} può indurre momenti di dipolo in una sostanza non conduttrice, tramite la deformazione delle distribuzioni di carica nei singoli atomi e nelle singole molecole.

Esempi di atomi con grande polarezzabilità: Ne , K , Cs

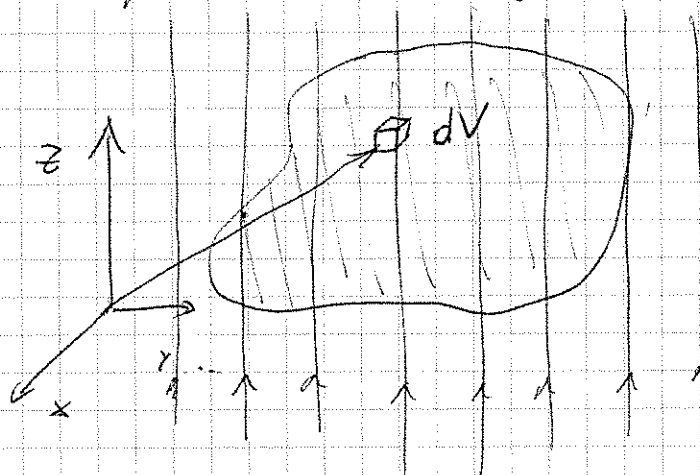
Polarezzazione

Siamo interessati a vedere qual è l'effetto macroscopico dei momenti di dipolo microscopici.

Con campo esterno nullo ($\vec{E} = 0$) una sostanza composta da molecole con momento di dipolo permanente, avrà i dipoli orientati a caso e, quindi, non manifesterà effetti macroscopici. Se i momenti di dipolo sono nulli, anche quelli indotti sono nulli in assenza di campo esterno.

Con un campo esterno non nullo invece ($\vec{E} \neq 0$), eventuali dipoli permanenti già presenti tenderanno ad orientarsi lungo il campo \vec{E} , eventualmente contrastati dagli urti casuali dovuti all'agitazione termica, dando luogo ad un effetto su scala macroscopica. Per una sostanza priva di dipoli permanenti, si avranno comunque dipoli indotti, sempre* nella direzione di \vec{E} . Si parla perciò di "polarezzazione" della

sostanza. Si può introdurre una densità di polarizzazione, \vec{P} , in questo modo. Ritagliamo un volumetto dV in un volume



V di una sostanza dielettrica. Il volume dV è piccolo su scala macroscopica, ma è abbastanza grande da contenere molti atomi o molte molecole. Supponiamo che gli atomi o le molecole in dV abbiano

densità $n = \frac{dN}{dV} \rightarrow$ numero di dipoli in dV , ciascuno con momento di dipolo \vec{p}

allora possiamo definire una densità di polarizzazione

$$\vec{P} = n \vec{p}$$

ha le dimensioni di un momento di dipolo per unità di volume. Qui abbiamo supposto che tutti gli atomi o molecole in dV abbiano lo stesso momento di dipolo \vec{p} , orientato nella stessa direzione. Più in generale si può definire \vec{P} come la somma di tutti i dipoli microscopici in dV divisa per dV

$$\vec{P} = \frac{1}{dV} \sum_{\substack{\text{dipoli} \\ \text{in } dV}} \vec{p}_i$$

In generale \vec{P} può variare da punto a punto nello spazio. Si tratta quindi di un campo vettoriale, definito all'interno del volume occupato da un materiale dielettrico.

Nel caso di dipoli indotti, il modello classico ci suggerisce che la somma sui dipoli in dV in presenza di un campo \vec{E} sia direttamente proporzionale ad \vec{E} . Anche per le sostanze con momento di dipolo permanente si osserva che, in certi regimi di temperatura e per valori non troppo alti di $|\vec{E}|$, la polarizzazione è proporzionale ad \vec{E} .

Chiamiamo dielettrici normali quelli per cui

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

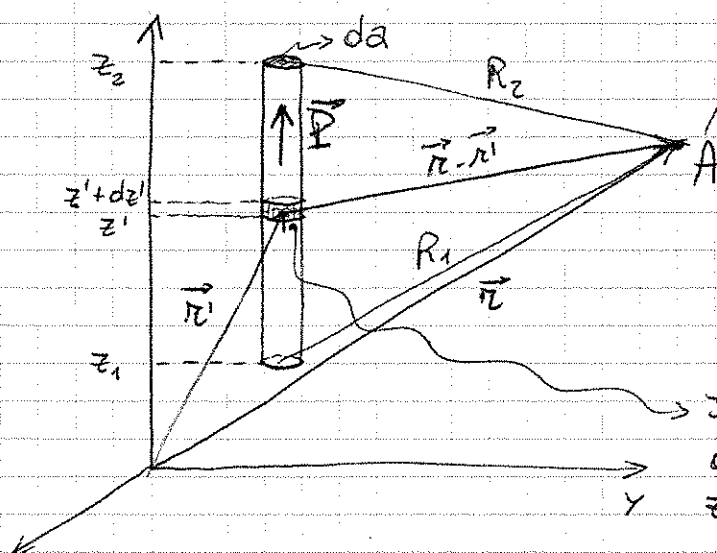
dove χ è una costante chiamata susceptività elettrica, propria di ciascun materiale. I dielettrici normali sono quelli omogenei, lineari, isotropi. Un dielettrico non omogeneo e non lineare ha una susceptività che dipende da \vec{r} e da $|\vec{E}|$:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\vec{r}, E) \vec{E}$$

In un dielettrico non isotropo la polarizzazione può essere orientata in direzione diversa da quella di \vec{E} . In tal caso la relazione tra \vec{P} e \vec{E} necessita di un fattore moltiplicativo χ che non è più uno scalare, bensì un tensore a 3 componenti. Ma di questo non ce ne occupiamo. Limitiamoci a dielettrici normali. Notiamo anche che la relazione $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ va intesa come relazione empirica (si applica \vec{E} , si misura \vec{P} e se ne deduce χ per un dato materiale); la relazione tra \vec{P} e le proprietà delle cariche su scale microscopica (ad esempio, la polarizzabilità di un atomo) è qualcosa di complicato, per cui servono modelli e teorie più raffinate. Torneremo su questo punto più avanti. Ora ci occuperemo di come si comportano le sostanze dielettriche su scala macroscopica, assumendo che valga la $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$.

Densità di polarizzazione e cariche di polarizzazione

Consideriamo un cilindretto di materiale dielettrico, così



calcoliamo il potenziale elettrico $\varphi(\vec{r})$ in questo punto, associato alle cariche nel cilindretto, assumendo che lo stesso sia polarizzato con densità di polarizzazione uniforme \vec{P} .

Il momento di dipolo di questo volumetto dV' è pari a $\vec{P} dV'$, per definizione di \vec{P}

Il contributo a $\varphi(\vec{r})$ che viene dal volumetto dV' può essere calcolato prendendo lo sviluppo multipolare di p. 2.31, essendo la distanza $|\vec{r}-\vec{r}'|$ molto maggiore delle dimensioni del volumetto. Si ha perciò:

$$d\varphi = \frac{\vec{P} dV' \cdot (\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

← abbiamo rimpiazzato
 $\vec{p} \rightarrow \vec{P} dV'$
 $\hat{r} \rightarrow \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}-\vec{r}'$

$$= \frac{P da dz' (z-z')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Ora si tratta di integrare questa espressione da z_1 a z_2 per calcolare il φ del cilindretto intero. Per farlo, chiamiamo

$$R = |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

e notiamo che

$$\frac{dR}{dz'} = \frac{z-z'}{R} \rightarrow \frac{(z-z') dz'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = dR$$

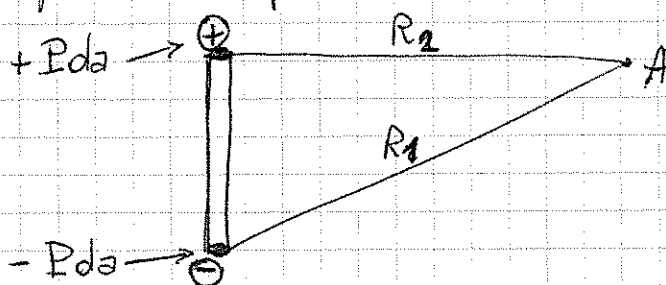
Dunque

$$d\varphi = \frac{P da dR}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

che è facilmente integrabile

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{R_1}^{R_2} dR \frac{P da}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Conclusione importante: il potenziale elettrico φ in \vec{r} dovuto al cilindretto uniformemente polarizzato è identico a quello dovuto a due cariche $\pm P da$ di segno opposto poste sulle superfici superiore e inferiore del cilindretto, in z_2 e z_1 !!



Si intuisce la ragione di questo risultato se si immagina il cilindro come una pile di dipoli. La polarizzazione crea uno sbilanciamento di carica di segno opposto sulle due superfici.

La polarizzazione del cilindro può essere anche vista come lo spostamento relativo di due distribuzioni di carica cilindriche, una positiva e l'altra negativa, che sono esattamente sovrapposte se la polarizzazione è nulla, e si discostano di una distanza piccola d per polarizzazione non nulla. L'effetto è quello di creare due strati di carica di altezza d , uno sopra e l'altro sotto, di segno opposto.

Dall'espressione precedente di $\varphi(\vec{r})$ deduciamo che la densità di carica equivalente è

$$\sigma_{pol} = P$$

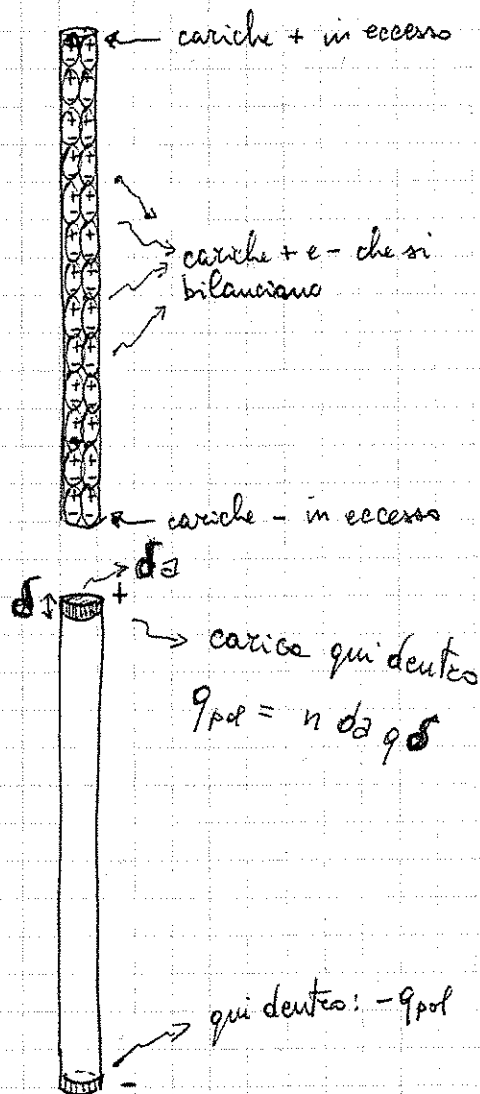
Vediamo che questo torna anche con i modelli qualitativi. Basta considerare il caso di tanti dipoli microscopici, con densità n , ciascuno dipolo essendo dato da $\vec{p} = \hat{z} q \delta$, dove \hat{z} è lungo l'asse del cilindro. Allora la "carica di polarizzazione" in eccesso sulle superficie del cilindro (vedi figura sopra) è pari a

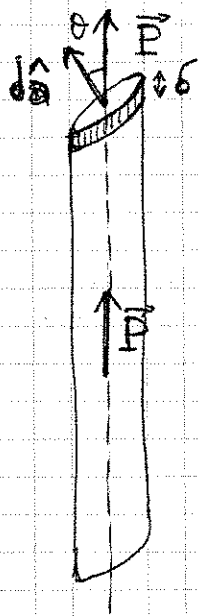
$$q_{pol} = n d z q \delta$$

ovvero: numero di dipoli per unità di volume, volte il volume, volte la carica per singolo dipolo.

Dunque $\sigma_{pol} = n q \delta = n p = P$ come si voleva.

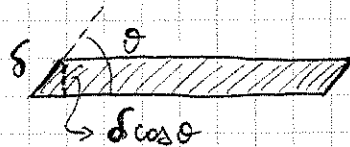
Questo modello ci permette anche di generalizzare l'espressione per σ_{pol} al caso di polarizzazione \vec{P} non perpendicolare alla superficie.





Di more, la polarizzazione corrisponde ad uno spostamento δ delle cariche + rispetto alle -. Stovette per il volume dello stoveto \vec{e}

$$da \delta \cos \theta$$



Dunque

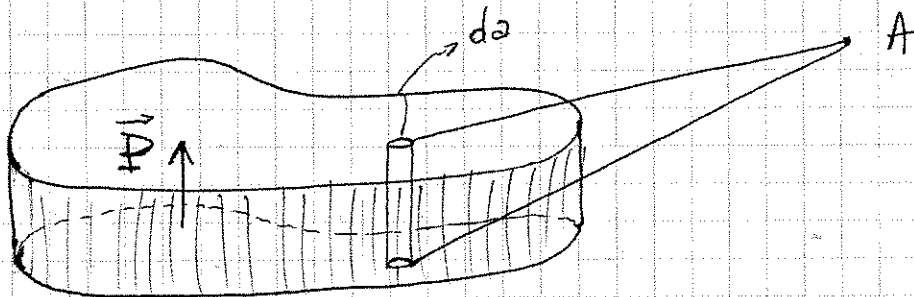
$$\begin{aligned} q_{pol} &= n da \delta \cos \theta q \\ &= n p \cos \theta da \\ &= P \cos \theta da = \vec{P} \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

e la densita' superficiale di cariche diventa

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \frac{d\vec{a}}{da} = \vec{P} \cdot d\hat{a}$$

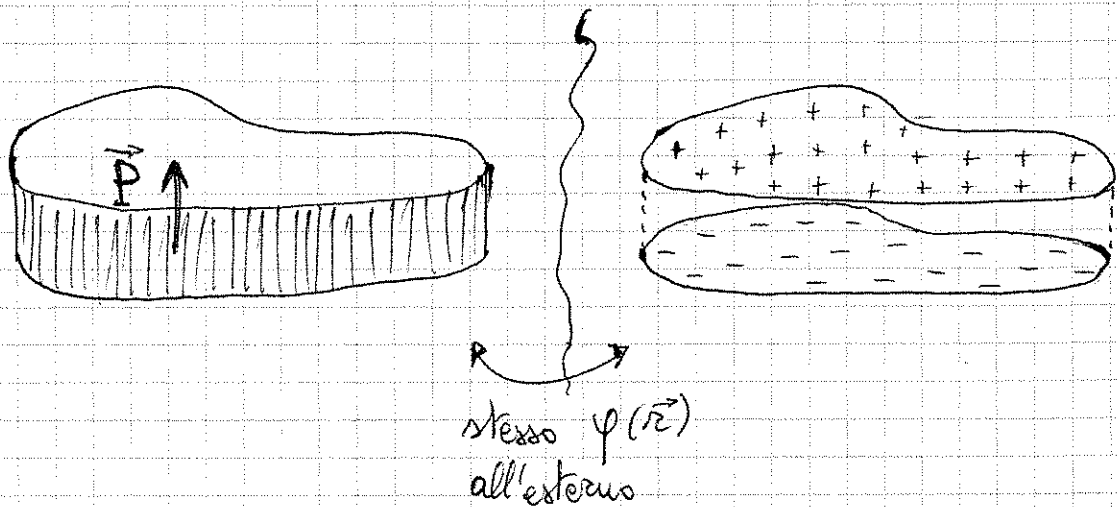
Sulle faccie inferiore la densita' di cariche avra' segno opposto, se \vec{P} e' uniforme nel materiale.

Consideriamo un dielettrico uniformemente polarizzato avente due faccie piane parallele, perpendicolari a \vec{P}



Vogliamo calcolare il potenziale elettrico generato dal dielettrico polarizzato nel punto A generico. Per il principio di sovrapposizione il potenziale puo' essere visto come la somma dei potenziali dovuti a piccoli cilindri come quello in figura. Per ciascuno vale l'espressione calcolata a p. 2.42: il potenziale e' lo stesso che si ottiene rimpiazzando il cilindro dielettrico con due superfici

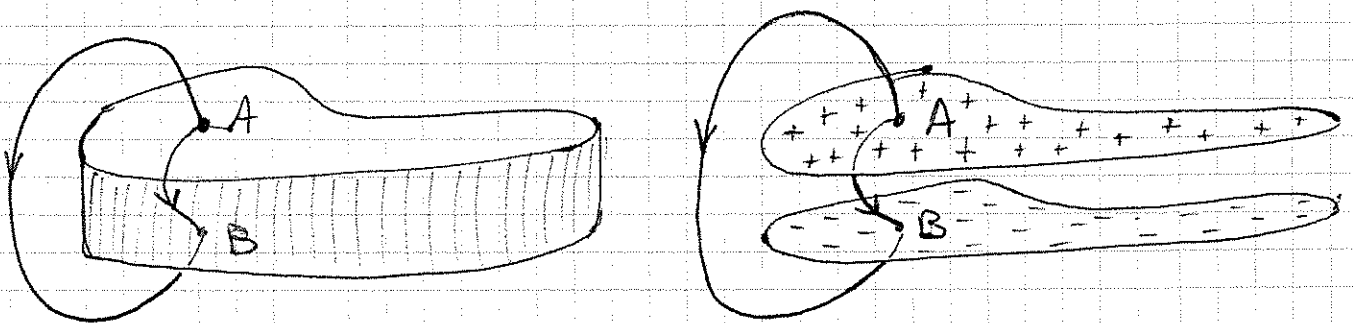
cariche, con densità di carica $\pm P$. Ciò vale per tutti i cilindri dritti in cui possiamo suddividere l'intero dielettrico. Concludiamo quindi che il potenziale in A è lo stesso che si ottiene rimpiazzando l'intero dielettrico con due superfici cariche di densità superficiale $\sigma_{\text{pol}} = \pm P$



Se $\varphi(\vec{r})$ è lo stesso delle due piastre, almeno nello spazio esterno al dielettrico, allora anche il campo \vec{E} è lo stesso.

Cosa possiamo dire di φ e \vec{E} all'interno del dielettrico?

Consideriamo due punti A e B sulle due superfici sopra e sotto, e due percorsi che li congiungono, uno fuori e l'altro dentro il dielettrico.



Per il percorso esterno

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} \quad \text{è lo stesso perché } \vec{E} \text{ è lo stesso}$$

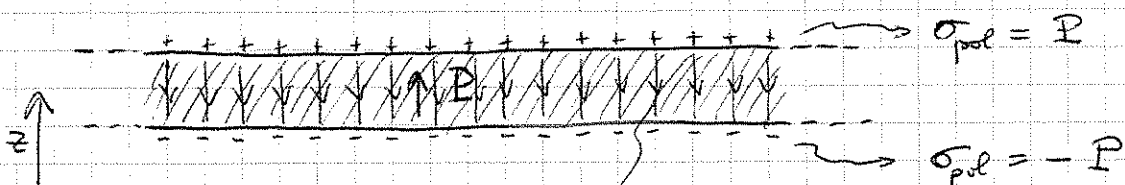
D'altra parte $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e}$ deve essere lo stesso anche per

il percorso interno al dielettrico, dato che \vec{E} è un campo conservativo.

La differenza tra il caso del dielettrico e il caso delle due piastre è che il campo tra le piastre è quello nel vuoto, mentre nel dielettrico il campo è complicato in quanto è prodotto dalle cariche microscopiche che costituiscono il materiale stesso. Localmente il campo \vec{E} ha grandi fluttuazioni, tra valori grandi in modulo e opposti in direzione. Tutte queste variazioni del campo locale microscopico non ci interessano. Una volta, mediate su scale macroscopiche, otterremo un campo medio simile a quello delle due piastre. Dato che comunque $\int \vec{E} \cdot d\vec{e}$ deve essere lo stesso che nel caso delle due piastre, possiamo definire il campo medio nel dielettrico proprio come il campo esistente tra le piastre.

Dunque, per il calcolo di φ e di \vec{E} del dielettrico possiamo equiparare il dielettrico stesso a due piastre piane con densità superficiale di carica $\sigma_{pol} = \pm P$, nel vuoto, e patto di considerare il campo \vec{E} così ottenuto all'interno del dielettrico come un campo medio, trascurate le fluttuazioni su scale atomiche.

Se il dielettrico si estende all'infinito, avendo due facce piane parallele a distanza d , ed è polarizzato con polarizzazione uniforme, allora per quanto appena detto il campo medio \vec{E}_{pol} al suo interno è uguale al campo prodotto da due armature di un condensatore piano vuoto, così:



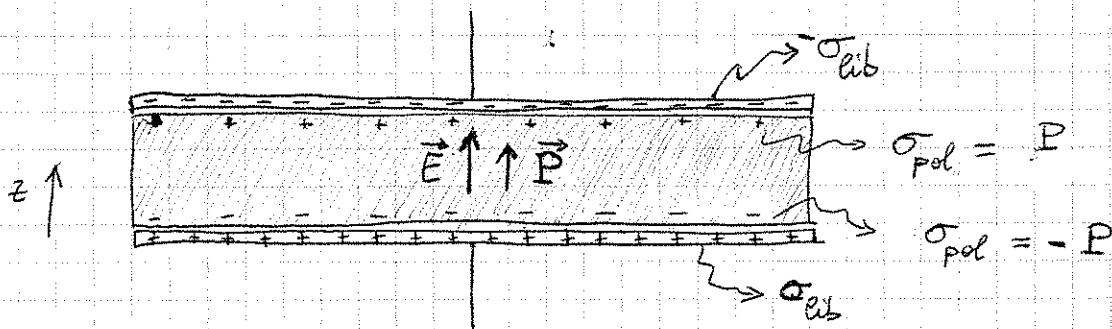
Il campo \vec{E}_{pol} invece è nullo all'esterno del dielettrico, come per il condensatore piano.

$$\vec{E}_{pol} = -\frac{|\sigma_{pol}|}{\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{P}{\epsilon_0} \hat{z}$$

↳ opposto a \vec{P}

Il campo \vec{E}_{pol} , dovuto alle cariche di polarizzazione, si aggiunge ad eventuali altri campi elettrici dovuti a cariche diverse, ad esempio quelle su conduttori, che chiameremo cariche "libere".

Esempio: condensatore piano riempito di materiale dielettrico



trascuriamo effetti di bordo.

Le cariche libere, con densità $\pm \sigma_{lib}$, producono un campo elettrico tra le piastre, nel vuoto, pari a σ_{lib}/ϵ_0 diretto dalle + alle -. Tale campo polarizza il dielettrico in modo che sulle sue facce si dispongono cariche di polarizzazione con densità $\pm P$ e con \vec{P} concorde con \vec{E} . Tale polarizzazione, a sua volta, produce un campo elettrico di polarizzazione, pari a P/ϵ_0 in modulo e discorde rispetto a \vec{P} . Il campo \vec{E} nello spazio sarà la somma di quello dovuto alle cariche libere e quello dovuto alle cariche di polarizzazione. Nello spazio esterno al condensatore sono entrambi nulli. Nello spazio interno invece si ha

$$\vec{E} = \hat{z} \left(\frac{\sigma_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0} \right) = \hat{z} \frac{\sigma_{lib} - P}{\epsilon_0}$$

Se la distanza tra le piastre è d e se il dielettrico riempie completamente il condensatore, la differenza di potenziale tra le piastre è $|\vec{E}|d$, ovvero

$$\Delta\varphi = \frac{d}{\epsilon_0} (\sigma_{lib} - P)$$

da confrontare con quella per lo stesso condensatore vuoto,

che vale

$$\Delta\varphi_0 = \frac{d\sigma_{ab}}{\epsilon_0}$$

La $\Delta\varphi$ con il dielettrico, a parità di carica sulle armature conduttrici, è minore della $\Delta\varphi_0$ senza dielettrico, dato che la polarizzazione del materiale riduce il campo elettrico al suo interno rispetto al campo che si avrebbe nel vuoto. Dal punto di vista delle capacità, ciò significa che la capacità aumenta inserendo il dielettrico nel condensatore.

Infatti:

con

$$C = \frac{Q_{ab}}{\Delta\varphi}$$

senza

$$C_0 = \frac{Q_{ab}}{\Delta\varphi_0}$$

e il rapporto, a parità di Q_{ab} , è

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ab} - P} > 1$$

Il rapporto tra le due capacità, con dielettrico e nel vuoto, è usato per definire la costante dielettrica relativa (al vuoto),

ϵ_r :

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

essendo $\epsilon_r > 1$ per qualsiasi dielettrico e $\epsilon_r = 1$ nel vuoto.

Dielettrici con ϵ_r grande sono utili per costruire condensatori di grande capacità.

ϵ_r è una grandezza empirica, facilmente misurabile, propria di ciascun dielettrico normale. Valori tipici di ϵ_r per diversi materiali si trovano tabulati nei testi.

Detto che il rapporto dei $\Delta\varphi$ è uguale al rapporto tra i moduli dei campi elettrici, possiamo scrivere

$$E_r = \frac{C}{C_0} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi} = \frac{E_0}{E}$$

dove E_0 è il campo prodotto nel vuoto dalle sole cariche libere ($E_0 = \sigma_{lib}/\epsilon_0$). Si ha quindi

$$E = \frac{E_0}{E_r} = \frac{\sigma_{lib}}{\epsilon_0 E_r}$$

Si può anche trovare la relazione tra la suscettività elettrica χ e la costante dielettrica relativa ϵ_r . Basta riprendere l'espressione che lega E e P :

$$E = \frac{\sigma_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{P}{\epsilon_0}$$

e riscrivere sapendo che $\frac{\sigma_{lib}}{\epsilon_0} = E_r E$:

$$E = E_r E - \frac{P}{\epsilon_0}$$

da cui

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

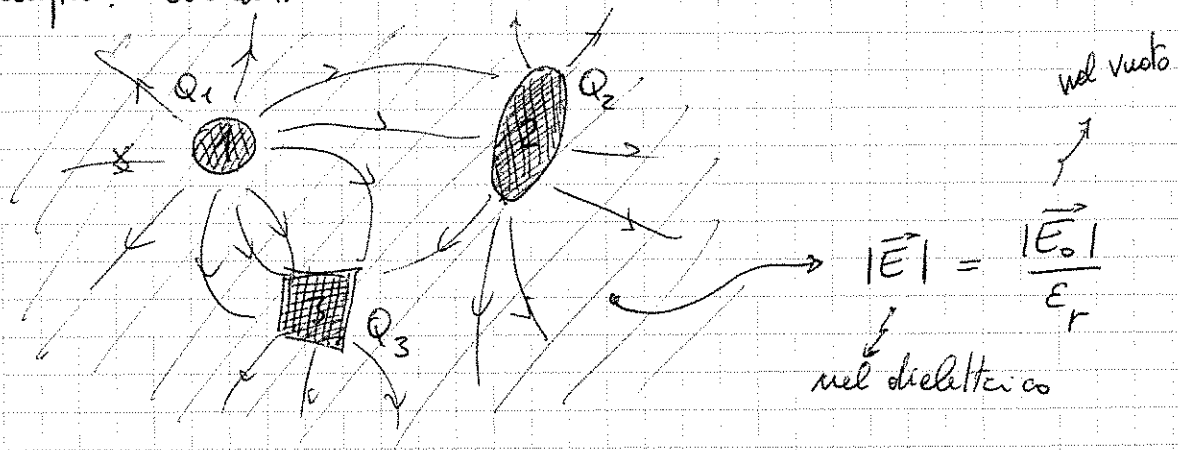
e se riprendiamo la definizione della suscettività per un dielettrico normale scritta a p. 2.41, troviamo

$$\chi = \epsilon_r - 1$$

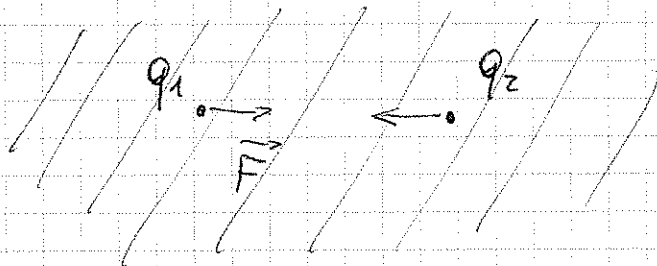
Per un dielettrico normale la conoscenza di ϵ_r equivale alla conoscenza di χ .

La relazione $E = E_0/\epsilon_r$, essendo $\epsilon_r > 1$, ci suggerisce che i campi elettrici e i potenziali elettrici dovuti a cariche libere immerse in un materiale dielettrico siano ridotti di un fattore ϵ_r rispetto ai rispettivi campi e potenziali per le stesse cariche nel vuoto.

Esempio: conduttori carichi immersi in un dielettrico



Esempio: due cariche puntiformi q_1 e q_2 immerse in un dielettrico



forza di Coulomb: $|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$

La riduzione della forza rispetto al caso delle cariche nel vuoto è un effetto della polarizzazione del materiale: attorno ad una carica libera positiva si crea uno "schermo" di cariche di polarizzazione negative che riduce il campo. Analogamente per le cariche negative schermate da cariche di polarizzazione positive.

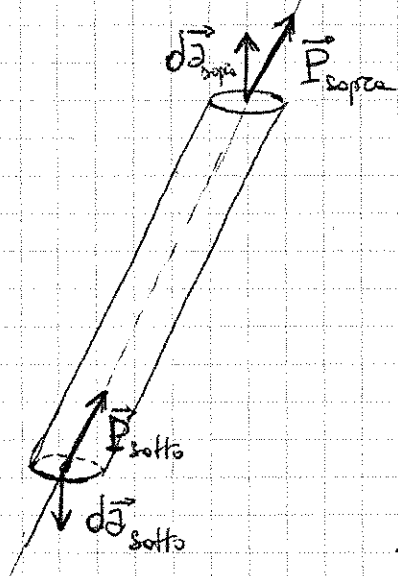
Attenzione però: la legge di Coulomb appena scritta è una legge empirica. Vale solo per dielettrici normali di cui sia noto il valore di ϵ_r . Inoltre, vale solo su scale mesoscopiche, rispetto alle scale microscopiche "atomiche" del materiale stesso. Dunque non ha lo stesso valore di legge fondamentale che ha la legge di Coulomb per cariche nel vuoto.

Ci sono tre cose che vorrei fare per completare il discorso sui dielettrici:

- i) Trattare il caso di polarizzazione \vec{P} non uniforme e scrivere l'analogo della legge di Gauss locale per i dielettrici;
- ii) legare la suscettività χ alla polarizzabilità α , cioè la trattazione "microscopica" dei dielettrici, espresso dalla χ , ai modelli "microscopici" caratterizzati dalla α ;
- iii) fare qualche esercizio.

\vec{P} non uniforme e densità di carica di polarizzazione

Consideriamo un cilindretto di materiale dielettrico così:



L'asse del cilindro sia lungo \vec{P} .
 Il verso degli elementi di superficie sia preso uscente dal volume del cilindro, il loro modulo sia uguale.

La polarizzazione produce la comparsa di una carica di polarizzazione

$$q_{\text{sopra}} = \vec{P}_{\text{sopra}} \cdot d\vec{a}_{\text{sopra}}$$

sulla superficie sopra (si veda p. 2.44) e una carica

$$q_{\text{sotto}} = \vec{P}_{\text{sotto}} \cdot d\vec{a}_{\text{sotto}}$$

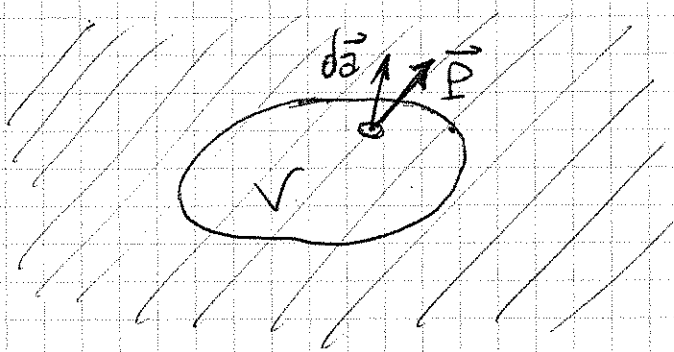
Le due cariche hanno segno opposto. Si può considerare questa carica come la carica netta che "esce" dal volume del cilindro per disporsi sulle superfici per effetto della polarizzazione. Il volume perde una carica di polarizzazione

$$\begin{aligned} \Delta q_{\text{pol}} &= - (q_{\text{sopra}} + q_{\text{sotto}}) \\ &= - (\vec{P}_{\text{sopra}} \cdot d\vec{a}_{\text{sopra}} + \vec{P}_{\text{sotto}} \cdot d\vec{a}_{\text{sotto}}) \\ &= - \sum_{\text{superfici}} \vec{P} \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

Notiamo che, se il materiale è uniforme e con \vec{P} uniforme, allora $\vec{P}_{\text{sotto}} = \vec{P}_{\text{sopra}}$ e, dato che $d\vec{a}_{\text{sotto}}$ è opposto a $d\vec{a}_{\text{sopra}}$, le due cariche sono uguali e opposte e la variazione netta di carica è nulla.

Se, invece, \vec{P} non è uniforme, si può avere $\vec{P}_{\text{sotto}} \neq \vec{P}_{\text{sopra}}$ e il volume perde o acquista carica di polarizzazione quando si polarizza.

Applichiamo lo stesso ragionamento ad un volume V finito di materiale dielettrico



La ~~variazione netta~~ carica di polarizzazione Δq_{pol} può essere calcolata sommando $-\vec{P} \cdot d\vec{a}$ su tutte le superfici elementari che racchiudono il volume V , come si

era fatto prima per un singolo cilindretto. Il risultato sarà

$$\Delta q_{\text{pol}} = - \int_{\text{Superficie}} \vec{P} \cdot d\vec{a}$$

Per il teorema della divergenza (o di Gauss) la stessa espressione può essere scritta così:

$$\Delta q_{\text{pol}} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV$$

Abbiamo ottenuto che una carica è uguale all'integrale di volume di una funzione scalare (la divergenza di \vec{P}). Niente ci vieta, a questo punto, di dare a tale funzione il significato di densità di carica. Definiamo la densità di carica di polarizzazione come la quantità

$$\rho_{\text{pol}} = - \nabla \cdot \vec{P}$$

in modo che $\Delta q_{\text{pol}} = \int \rho_{\text{pol}} dV$.

La definizione vale per qualsiasi volume V all'interno di un dielettrico. Si può scrivere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{pol}$$

che vale ovunque in un dielettrico. Anche se assomiglia alla legge di Gauss per il campo elettrico, ricordiamoci che per come l'abbiamo derivata essa è semplicemente la definizione di ρ_{pol} . Il segno - viene dal fatto che \vec{P} punta da - a +, mentre \vec{E} punta da + a -.

In una situazione generica in cui si hanno sia cariche libere che cariche di polarizzazione, il campo elettrico complessivo è determinato da entrambe e vale la legge di Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Dal punto di vista formale si può scrivere

$$\rho = \rho_{lib} + \rho_{pol}$$

$$\text{e } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0}$$

e ricordando la definizione di ρ_{pol} si ha

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

che può essere scritta anche così:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib}}$$

dove abbiamo introdotto un nuovo campo

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

usualmente detto "spostamento elettrico", oppure "induzione elettrica". La legge che abbiamo appena enunciato è elegante e utile. Mostra che vale una legge tipo-Gauss per un certo campo vettoriale; il termine di destra contiene solo

le cariche libere, e questo è un bel vantaggio. Normalmente le cariche libere si conoscono in un dato problema, essendo le cariche che disponiamo su dei conduttori di vario genere, mentre le cariche di polarizzazione sono fuori dal nostro controllo diretto. Tuttavia, occorre sottolineare una differenza cruciale rispetto alla legge di Gauss per \vec{E} : quest'ultima è una legge fondamentale che si assume vera per qualsiasi distribuzione di carica, mentre la legge per \vec{D} è una legge che vale solo per i materiali dielettrici in cui sia definita una densità di polarizzazione (ovviamente vale anche nel vuoto, ma in quel caso coincide con la legge di Gauss per \vec{E}) e, inoltre, diventa di utilità pratica solo se accompagnata da un'ulteriore legge empirica che leghi \vec{P} ad \vec{E} .

Per i dielettrici normali tale legge empirica è la solita

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Se utilizziamo questa, abbiamo

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

ovvero, ricordando la definizione di ϵ_r e la relazione

$$\chi = (\epsilon_r - 1),$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Dunque, per tali materiali, il problema può essere risolto così:

dato la distribuzione di cariche libere ρ_{lib}

↳ si cercano le soluzioni di

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

↳ si determina il campo \vec{E} da

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

La costante di proporzionalità $\epsilon_0 \epsilon_r$ che lega \vec{D} ed \vec{E} è anche detta "permittività" e, a volte, è indicata con la sola lettera ϵ . Così ϵ_0 assume il significato di permittività del vuoto.

Una nota importante: in molti libri di testo si dà enfasi all'equazione $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext}$, come se questa fosse di validità più generale della legge di Gauss per \vec{E} . La ragione dell'enfasi può essere di tipo storico (da Maxwell in poi si è spesso formulato l'elettromagnetismo privilegiando \vec{D} per vari motivi, molti dei quali non reggono però alla luce di una moderna visione della struttura della materia) oppure di tipo pratico (molti testi si occupano in modo principale delle possibili applicazioni dell'elettromagnetismo a situazioni semplici e badano meno agli aspetti legati ai fondamenti della teoria).

Suggerisco di leggere in proposito il paragrafo 10-4 del Feynman, Vol II Parte I.

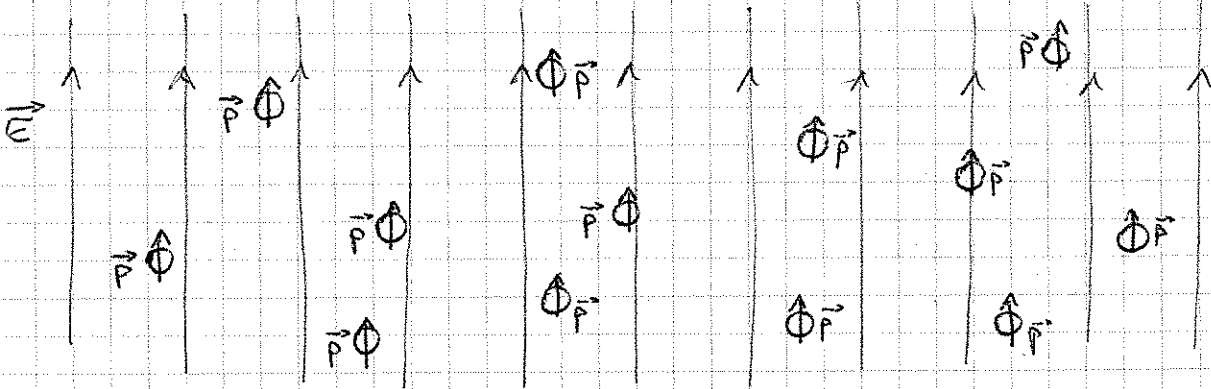
Legame tra suscettività e polarizzabilità

All'inizio eravamo partiti da un discorso sul momento di dipolo \vec{p} di molecole e atomi, facendo cenno a modelli classici. Ci siamo scerviti di questi per far vedere che, se una sostanza è polarizzabile su scale atomico/molecolare, allora può manifestare una polarizzazione macroscopica \vec{P} . A partire da quel punto abbiamo trattato i campi e i potenziali associati a $\vec{P} \neq 0$, ignorando però il legame tra ciò che avviene su scale microscopiche (espresso dalla polarizzabilità α) e ciò che avviene su scale macroscopiche (espresso dalla suscettività χ). Semplicemente abbiamo considerato χ come un dato empirico. Ora però, se si hanno modelli della struttura della materia, ci si può porre anche il problema di calcolare χ assegnata la polarizzabilità α . In generale è un problema complicato.

la cui soluzione richiede la meccanica quantistica. Tuttavia esistono dei modelli classici sufficientemente accurati nel caso di dielettrici gassosi e liquidi.

Il caso più semplice: gas

Consideriamo un gas di atomi rappresentati da sferette come quelle a p. 2.38. La densità di sferette sia n .



Supponiamo che \vec{E}_0 sia un campo elettrico esterno, dovuto a cariche libere. Tale campo produce una polarizzazione delle sferette. Ma attenzione: il campo sentito da ciascuna sferetta non è \vec{E}_0 soltanto, ma \vec{E}_0 + il campo dovuto a tutte le altre sferette polarizzate.

Assunzione chiave del modello: le sferette siano ad una distanza media abbastanza grande (n piccola) da poter considerare il campo \vec{E} sentito da ciascuna sferetta come un campo medio dovuto a tutte le altre. In altri termini, la densità è abbastanza bassa in modo che togliere o aggiungere una sfera in un punto qualsiasi del gas non ha alcun effetto significativo sul campo \vec{E} nel gas in quella regione. Il campo medio \vec{E} nel gas sarà allora

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

dove la densità di polarizzazione può essere scritta come

$$\vec{P} = n \vec{p}$$

essendo il momento di dipolo \vec{p} di ciascuna sferetta dato da

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \rightarrow \text{questo } \vec{E} \text{ è lo stesso di}$$

Dunque $\vec{P} = n \epsilon_0 \alpha \vec{E}$

Dalla definizione di χ , $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, si deduce che

$$\chi = n\alpha$$

oppure, essendo $\epsilon_r = 1 + \chi$,

$$\epsilon_r = 1 + n\alpha$$

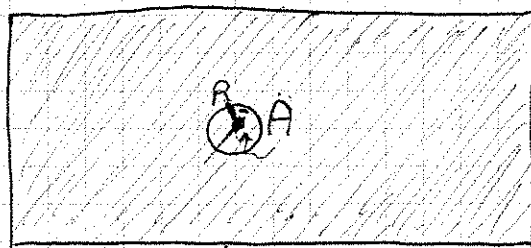
Questo è il legame tra la polarizzabilità α e la suscettività χ in un gas diluito. Il fatto cruciale, nella derivazione, è che il campo \vec{E} che entra nella definizione di χ è stato preso uguale al campo \vec{E} che induce il momento di dipolo per ciascuna sferetta tramite la polarizzabilità α .

La relazione trovata vale per dielettrici gassosi non polari e uniformi.

Qual è il problema se si volesse utilizzare la stessa procedura nel caso di un dielettrico denso? Il problema è che in quel caso non si sa bene quale sia il campo elettrico che induce la polarizzazione di ciascun atomo/molecola. In particolare gli atomi/le molecole vicine modificano il campo locale da inserire nella relazione tra \vec{E} e \vec{p} . Un modello che tiene conto di questo effetto a livello semplice è il seguente.

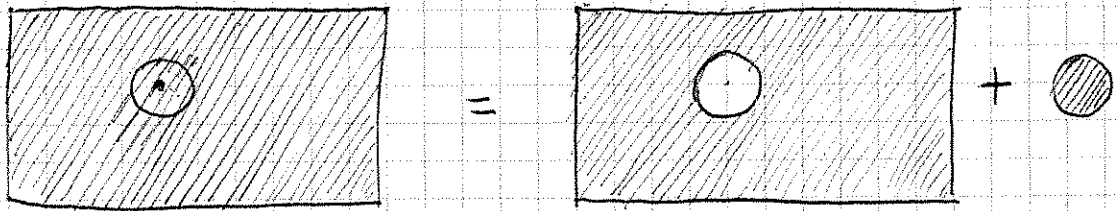
Sistema denso: legge di Clausius-Mossotti

Consideriamo un dielettrico normale, con χ assegnate. Supponiamo che sia polarizzato con \vec{E} uniforme assegnata. Ritagliamo idealmente una piccola sfera di raggio R nel dielettrico intorno ad un punto A .



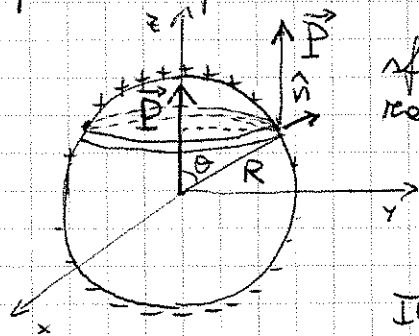
Applicando il principio di sovrapposizione possiamo dire che il campo \vec{E} nel punto A è la somma di due campi:

- 1) il campo in A prodotto dalle eventuali cariche libere e dal dielettrico polarizzato tolte le sfere (ma "congelando" il campo stesso, come se le sfere ci fosse). Questo campo lo indichiamo con \vec{E}_{buco}
- 2) il campo in A prodotto dalla sfera polarizzata. Lo chiamiamo \vec{E}_{sfera}



$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{buco}} + \vec{E}_{\text{sfera}}$$

Il nostro scopo è calcolare \vec{E}_{buco} . Per farlo calcoliamo prima \vec{E}_{sfera}



sfera polarizzata con \vec{P} uniforme lungo \hat{z}
raggio R

La densità di carica superficiale è
 $\sigma(\theta) = \vec{P} \cdot \hat{n} = P \cos \theta$

Il contributo al campo \vec{E}_{sfera} calcolato al centro è dovuto alle cariche sull'anello

$$dE_{\text{sfera}} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overbrace{P \cos \theta}^{\sigma(\theta)} \overbrace{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}^{\text{area}} \cos \theta}{R^2}$$

componente z

Il campo \vec{E}_{sfera} si trova integrando in $d\theta$:

$$\vec{E}_{\text{sfera}} = \hat{z} \left(- \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi d\cos \theta \cos^2 \theta \right) = - \frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z}$$

Si potrebbe anche dimostrare che il campo è uniforme nella sfera, ma qui non ci serve. Ci basta sapere che

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{buco}} - \hat{z} \frac{P}{3\epsilon_0}$$

ovvero

$$\vec{E}_{\text{buco}} = \vec{E} + \hat{z} \frac{P}{3\epsilon_0}$$

che si può scrivere anche scabamente così:

$$E_{\text{buco}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

dato che tutto è lungo z . Anzi, se facciamo un buco nel dielettrico, il campo nel buco è maggiore del campo medio \vec{E} del dielettrico senza buco!

Se il materiale è fatto di atomi/molecole polarizzabili, con polarizzabilità α , è naturale pensare che un atomo/molecola posto in A si polarizzi per effetto di \vec{E}_{buco} anziché di \vec{E} . Se usiamo \vec{E}_{buco} nell'espressione del momento di dipolo indotto, allora

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{buco}} = \epsilon_0 \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

Supponiamo che la densità di atomi/molecole sia n , ciascuna con il suo \vec{p} , in modo che

$$\vec{P} = n\vec{p}$$

Allora si può scrivere

$$n\vec{p} = n\epsilon_0 \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

↓

$$\vec{P} = n\epsilon_0 \alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

da cui $\vec{P} \left(1 - \frac{n\alpha}{3} \right) = n\epsilon_0 \alpha \vec{E}$

e infine $\vec{P} = \left(\frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}} \right) \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}$

questa è nota come legge di Clausius-Mossotti. Può essere

riscritta per la costante dielettrica relativa

$$\epsilon_r - 1 = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}$$

e riscritte così:

$$\alpha = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{n(\epsilon_r + 2)}$$

Questa permette di dedurre la polarizzabilità α dalle conoscenze della costante dielettrica relativa e della densità, mentre quella di prima permette di calcolarsi χ , oppure ϵ_r , dalle conoscenze di α .

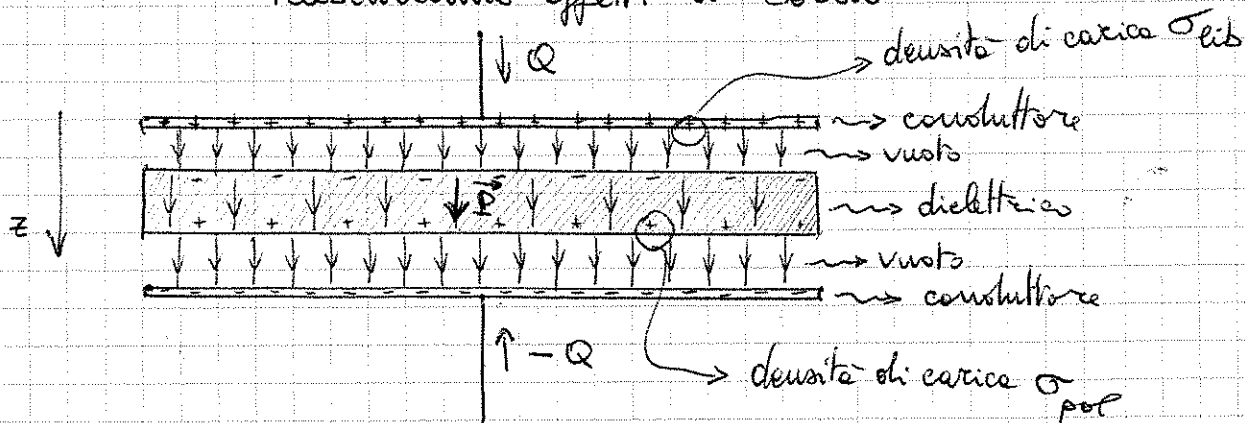
Tutte queste espressioni si riducono al caso dei gas nel limite $n\alpha \ll 1$, quando si trova $\chi = n\alpha$.

La legge di Clausius-Mossotti va bene per dielettrici liquidi.

Nel caso di dielettrici solidi le cose sono ancora più complicate e non esistono modelli classici altrettanto semplici ed efficaci. Si parla di ferro-elettrici, antiferro-elettrici, ecc... e serve la meccanica quantistica.

Alcuni esercizi

Esercizio Condensatore piano con dielettrico
Calcoliamo \vec{E} , \vec{E} , \vec{D} , σ_{pol}
Trascuriamo effetti di bordo



All'esterno del condensatore:

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{P} = 0, \quad \vec{D} = 0$$

All'interno del condensatore, nello spazio vuoto:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 = \frac{\sigma_{\text{cib}}}{\epsilon_0} \hat{z} \quad \leftarrow \text{basta applicare Gauss su un volume che racchiude } \sigma_{\text{cib}} \text{ soltanto}$$

$$\vec{P} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{P} \neq 0 \text{ solo nel dielettrico}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \sigma_{\text{cib}} \hat{z}$$

All'interno del dielettrico:

$$\vec{P} = \sigma_{\text{pol}} \hat{z} \quad \leftarrow \text{basta applicare Gauss alle piastre equivalenti, con carica } \sigma_{\text{pol}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_{\text{cib}} - \sigma_{\text{pol}}) \hat{z} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \chi \vec{E}$$

$$\text{da cui } \vec{E} \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} = \vec{E}_0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\sigma_{\text{cib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \hat{z}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \sigma_{\text{cib}} \hat{z}$$

(meglio, la sua versione integrale)
 $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = q_{\text{cib}} \text{ interne.}$

Notiamo che una procedura piú veloce consiste nel partire dalla $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{cib}}$, da cui si deduce che, nel caso di un condensatore piano $\vec{D} = \sigma_{\text{cib}} \hat{z}$ all'interno del condensatore, sia che sia vuoto o che ci sia il dielettrico. Poi si utilizza la relazione $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ con $\epsilon_r = 1$ nel vuoto e

$\epsilon_r \neq 1$ fissato nel dielettrico. Infine si calcola \vec{P} , uschi \vec{D} ed \vec{E} . I risultati di questa procedura sono ovviamente gli stessi dei precedenti.

All'interno del dielettrico si ha

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \hat{z} \left(\sigma_{\text{cib}} - \frac{\sigma_{\text{cib}}}{\epsilon_r} \right) = \hat{z} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \sigma_{\text{cib}}$$

e ricordando che $\vec{P} = \sigma_{pol} \hat{e}$, si può scrivere

$$\sigma_{pol} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_{lib} = \frac{\chi}{\epsilon_r} \sigma_{lib}$$

Dato che le superfici del dielettrico hanno la stessa area delle armature del condensatore, questo risultato si traduce nel fatto che, avendo caricato con $\pm Q$ le armature, le facce del dielettrico si caricano con

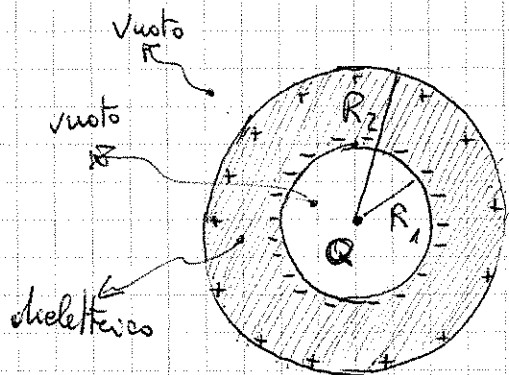
$$Q_{pol} = \frac{\chi}{\epsilon_r} Q$$

La carica di polarizzazione è piccola se ϵ_r è poco più grande di 1 e cresce al crescere di ϵ_r , senza ~~per~~ mai eguagliare Q . Se al posto del dielettrico fosse inserito un conduttore, sulle sue facce sarebbe indotta esattamente una carica Q in modo da annullare \vec{E} al suo interno. Un dielettrico tende a fare qualcosa di simile, ma lo fa solo parzialmente dato che le sue cariche non sono libere di muoversi su scale microscopica. Così $Q_{pol} < Q$.

Esercizio

Suscio sferico dielettrico con carica Q al centro della cavità.

Calcoliamo \vec{P} , \vec{E} , \vec{D} , σ_{pol}



Dentro la cavità sferica basta applicare la legge di Gauss.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{P} = 0$$

Dentro il dielettrico \vec{D} continua ad essere quello di prima

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

ed \vec{E} si calcola da $\vec{E} = \vec{D} / \epsilon \epsilon_r$:

Energia elettrostatica in presenza di dielettrico

Prendiamo un condensatore e lo carichiamo con una carica Q . Se il condensatore è vuoto, la capacità sia C_0 . L'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore è $U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$ e può essere vista come posseduta dal campo elettrico, tramite la densità di energia $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ integrata sul volume del condensatore. Tutto questo lo abbiamo visto a p. 2.26.

Ora prendiamo lo stesso condensatore e lo riempiamo di dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r . Supponiamo di caricarlo con la stessa carica Q . La nuova capacità sarà

$$C = \epsilon_r C_0 \quad \text{per definizione di } \epsilon_r \quad (\epsilon_r > 1)$$

Nulla cambia al calcolo dell'energia elettrostatica, essendo

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

salvo che qui c'è C e non più C_0 . Essendo $C > C_0$, l'energia elettrostatica nel condensatore, a carica Q fissa, diminuisce inserendo il dielettrico. Diminuisce di un fattore ϵ_r .

A parità di Q il campo elettrico è diverso nei due casi. In particolare \vec{E} diminuisce in modulo nel dielettrico rispetto al vuoto per effetto delle cariche di polarizzazione. Diminuisce esattamente di un fattore ϵ_r . Altrettanto fa la differenza di potenziale tra le armature.

Possiamo usare ancora come densità di energia la $\frac{\epsilon_r}{2} |\vec{E}|^2$?

No, perché in tal caso l'energia del condensatore con il dielettrico, a parità di Q , diminuirebbe di un fattore ϵ_r^2 e non ϵ_r .

Risultato più corretto prendere come densità di energia $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$, che si riduce a $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ nel vuoto. Con questa nuova definizione i conti tornano: a parità di cariche libere Q , il campo \vec{D} non varia, il campo \vec{E} diminuisce di un fattore ϵ_r e l'energia U diminuisce di un fattore ϵ_r , come sopra. OK.

Il conto torna anche se il riempimento del condensatore lo facciamo tenendo costante $\Delta\varphi$ anziché Q . In tal caso \vec{E} rimane lo stesso prima e dopo il riempimento, essendo legato a $\Delta\varphi$ da una derivazione spaziale, mentre \vec{D} deve aumentare di un fattore ϵ_r (la carica libera deve aumentare per compensare la carica di polarizzazione e tenere lo stesso $\Delta\varphi$). In questo modo U aumenta di un fattore ϵ_r eseguendo il riempimento a $\Delta\varphi$ costante. E' consistente con questo calcolo:

condensatore vuoto: $Q = C_0 \Delta\varphi$

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{2} C_0 (\Delta\varphi)^2$$

condensatore pieno: $Q' = C \Delta\varphi$ (stesso $\Delta\varphi$!)

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q'^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2$$

$$= \epsilon_r \left(\frac{1}{2} C_0 (\Delta\varphi)^2 \right)$$

$$= \epsilon_r U_0$$

Dunque nello spazio occupato da un materiale dielettrico si può scrivere

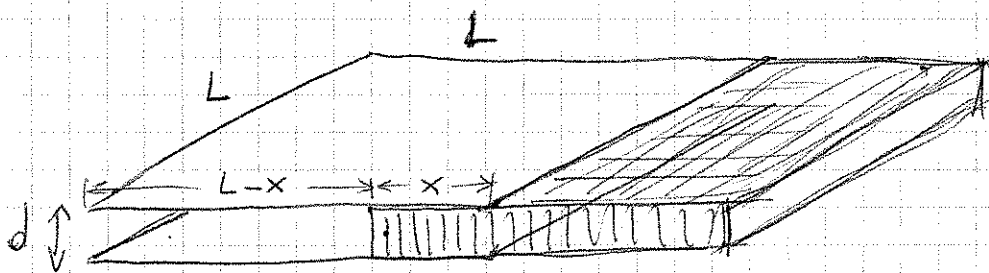
$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV \vec{D} \cdot \vec{E}$$

che si riduce a

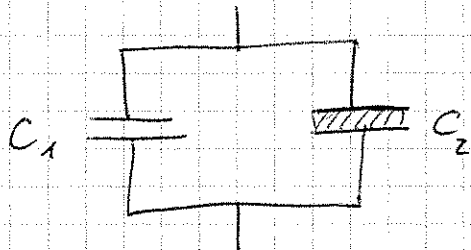
$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV |\vec{E}|^2$$

quando $\epsilon_r = 1$ (nel vuoto).

Esercizio Condensatore piano, parzialmente riempito di dielettrico (trascurando effetti di bordo)



↓ equivalente e



$$C = C_1 + C_2$$

$$\text{con } C_1 = \frac{\epsilon_0 (L-x)L}{d}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r x L}{d}$$

quindi
$$C = \frac{\epsilon_0 L}{d} [x(\epsilon_r - 1) + L]$$

Energia elettrostatica

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 L} \frac{1}{[x(\epsilon_r - 1) + L]}$$

oppure
$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = \frac{\epsilon_0 L (\Delta\varphi)^2}{2d} [x(\epsilon_r - 1) + L]$$

Fissiamo Q e riempiamo il condensatore :

$$x=0 \rightarrow U_0 = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 L^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \quad \swarrow \text{stessa } Q$$

$$x=L \rightarrow U = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 \epsilon_r L^2} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{\epsilon_r} U_0$$

$$(\Delta U)_Q = U - U_0 = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) U_0 = - \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} U_0 < 0$$

l'energia diminuisce.

Il condensatore è isolato elettricamente dall'ambiente. L'unico lavoro che si può compiere è quello meccanico per inserire il dielettrico. Il lavoro ^{esterno} fatto è quello contro le forze con cui il dielettrico è attratto dal condensatore

$$F_x = - \left(\frac{dU}{dx} \right)_{Q \text{ cost}} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \frac{(\epsilon_r - 1)}{[(\epsilon_r - 1)x - L]^2}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} (\Delta U)_Q &= - \int_0^L F_x dx = - \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \int_0^L \frac{(\epsilon_r - 1) dx}{[(\epsilon_r - 1)x - L]^2} \\ &= - \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \int_L^{\epsilon_r L} d\eta \frac{1}{\eta^2} \\ &= \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{\epsilon_r L} - \frac{1}{L} \right) = - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) U_0 \quad \text{come prima!} \end{aligned}$$

Situazione diversa: fissiamo $\Delta\varphi$ e riempiamo.

$$x=0 \quad \rightarrow \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 L^2}{d} (\Delta\varphi)^2 \quad \swarrow \text{stesso } \Delta\varphi$$

$$x=L \quad \rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 L^2}{d} (\Delta\varphi)^2$$

$$\text{da cui} \quad (\Delta U)_\varphi = (\epsilon_r - 1) \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 L^2}{d} (\Delta\varphi)^2 = \frac{(\epsilon_r - 1) U_0}{\epsilon_r} > 0$$

diversa da prima

Notiamo che in questo secondo caso la carica finale è diversa da quella iniziale

$$Q_f = C_f \Delta\varphi = \epsilon_r C_0 \Delta\varphi = \epsilon_r Q$$

$\underbrace{C_0}_{Q \text{ iniziale}}$

Per tenere $\Delta\varphi$ costante occorre caricare ulteriormente le armature per compensare l'effetto delle cariche di polarizzazione.

Attenzione: il sistema non è più isolato!! Occorre un collegamento con un generatore di potenziale che separa le cariche e le porta sulle armature. Il generatore compie lavoro! Dunque il lavoro compiuto sul sistema non è solo meccanico e non può essere imputato solo ad una forza F_x meccanica.

Esempio: otteniamo la stessa configurazione in due passaggi:

- i) riempiamo a Q costante
- ii) carichiamo il condensatore pieno da Q a Q_f

Il sistema è lo stesso all'inizio e alla fine \Rightarrow dobbiamo ottenere lo stesso ΔU

$$(\Delta U)_\varphi = (\Delta U)_Q + \int_Q^{Q_f} dq \frac{q}{C_f} \quad \rightarrow \text{lavoro compiuto dal generatore}$$

$$= -U_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) + \frac{1}{\epsilon_r C_0} \frac{1}{2} (Q_f^2 - Q^2)$$

lavoro meccanico (F_x)

$$= -U_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \left(\frac{\epsilon_r^2 - 1}{\epsilon_r} \right)$$

$$= -U_0 \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} - \frac{(\epsilon_r + 1)(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \right] = \frac{(\epsilon_r - 1) U_0}{\epsilon_r}$$

OK!

Procedura diversa tra gli stessi stati iniziale e finale

- i) carichiamo da Q a Q_f il condensatore vuoto
- ii) riempiamo di dielettrico e Q_f costante

Allora

$$(\Delta U)_\varphi = \int_Q^{Q_f} dq \frac{q}{C_0} + (\Delta U)_{Q_f}$$

con $Q_f = \epsilon_r Q$ e $(\Delta U)_{Q_f}$ uguale a $(\Delta U)_Q$ volte ϵ_r^2

essendo

$$\begin{aligned} (\Delta U)_{Q_f} &= \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{\epsilon_r C_0} - \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C_0} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r^2 Q^2}{C_0} \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) \\ &= - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \epsilon_r^2 U_0 \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} (\Delta U)_\varphi &= \frac{1}{2} \frac{Q_f^2 - Q^2}{C_0} - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \epsilon_r^2 U_0 \\ &= (\epsilon_r^2 - 1) U_0 - (\epsilon_r - 1) \epsilon_r U_0 \\ &= (\epsilon_r - 1) U_0 \end{aligned}$$

OK

ma il lavoro meccanico è diverso da prima. È più grande di un fattore ϵ_r^2 .

Il lavoro totale (meccanico + generatore) è lo stesso, perché ΔU dipende solo dagli stati iniziale e finale.