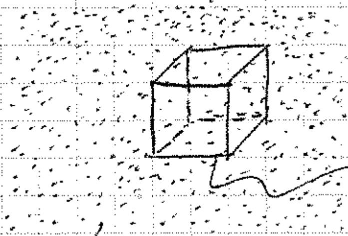
3 CARICHE IN MOTO, CORRENTE ELETTRICA

Le cariche che possono muoversi in un materiale le chiamiamo "portatori di carica". Esempi: elettroni di conduzione nei metalli, ioni + e − nei liquidi o nei gas, oppure nei plasmi, ecc.

Trattiamo i portatori di carica come un insieme di MOLTE cariche elementari di cui non ci interessa la localizzazione di ciascuna, ma solo la densità e il loro moto "medio".



portatori di carica

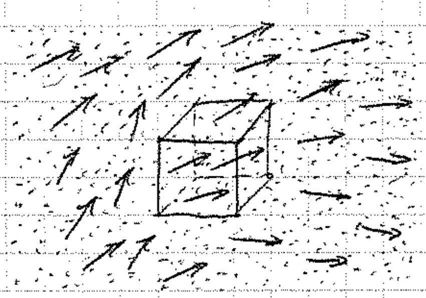
Volumetto dV contenente MOLTI portatori, sufficientemente piccolo da considerarlo infinitesimo rispetto a tutte le scale rilevanti al problema, tranne la scala atomica (in altri termini, $(dV)^{1/3}$ è molto maggiore della distanza media tra i portatori, ma è molto minore di tutte le altre distanze in gioco nel problema)

Si può, al solito definire una densità di carica dei portatori, ρ, essendo

$$dq_{port} = \rho \, dV$$

↳ carica dei portatori in dV

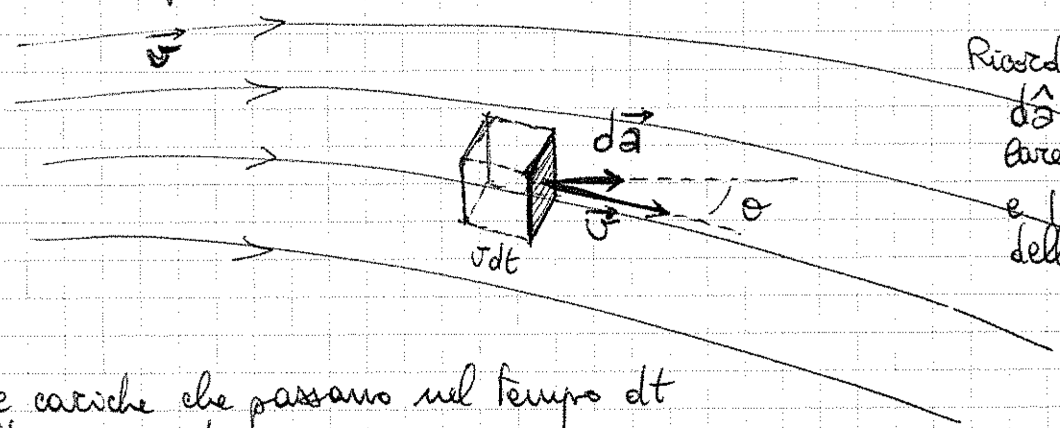
↳ ρ è costante in dV per definizione, essendo dV infinitesimo. ρ varia su scale più grandi.



Se le particelle si muovono, ciascuna con una certa velocità, si potrà definire una velocità media (in senso statistico) dei portatori entro un certo volume, $\vec{v}$. Se il volume è infinitesimo, la velocità media è costante al suo interno (ed ogni dV possiamo associare una velocità media $\vec{v}$)

I valori di $\vec{v}$ in funzione di $\vec{r}$ rappresentano un campo di

velocità, che può essere disegnato con linee di flusso, tangenti in ogni punto a $\vec{v}$, come per le particelle di un fluido.
Consideriamo un elemento di superficie $d\vec{a}$ che interseca le linee di flusso.



Ricordiamo che $d\hat{a}$ è perpendicolare alla superficie e $|d\vec{a}|$ è l'area della superficie.

Le cariche che passano nel tempo dt attraverso da sono:

$$dq = \rho\, v\,dt\, da \cos\theta = \rho\, \vec{v}\cdot d\vec{a}\, dt$$

Definiamo un vettore $\vec{j}$ così:

$$\vec{j} = \rho\,\vec{v}$$

$\vec{v}$ → velocità media locale dei portatori

ρ → densità media locale di carica dei portatori

Dalla relazione precedente risulta che

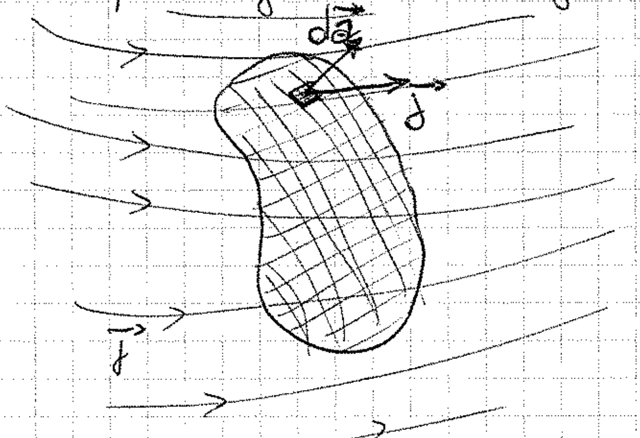
$$\frac{dq}{dt} = \rho\,\vec{v}\cdot d\vec{a} = \vec{j}\cdot d\vec{a}$$

è la carica che attraversa la superficie $d\vec{a}$ nell'unità di tempo. Se $d\vec{a}$ è nella direzione di $\vec{v}$, e quindi di $\vec{j}$, questo significa che

$$\frac{dq}{dt} = j\,|d\vec{a}|$$

è la carica che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie ortogonale al campo di velocità. Perciò $|\vec{j}|$ è interpretabile come la carica che fluisce, per unità di tempo e unità di area, attraverso una superficie perpendicolare al campo di velocità delle cariche (cioè perpendicolare a $\vec{j}$). È analogo ad un flusso di particelle, con in più la carica. Lo chiamiamo <u>densità di corrente elettrica</u>!

Mentre la densità di portatori ρ è un campo scalare, la densità di corrente è un campo vettoriale. Data una superficie S finita qualsiasi è possibile calcolare la carica che la attraversa nell'unità di tempo integrando le singole correnti elementari



$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

questa la chiamiamo <u>corrente elettrica</u> attraverso S.
Coincide con il flusso del campo $\vec{J}$ attraverso la superficie S.

I è la carica che passa nell'unità di tempo. Si misura in ampère (A). Il legame tra A e C (coulomb) è

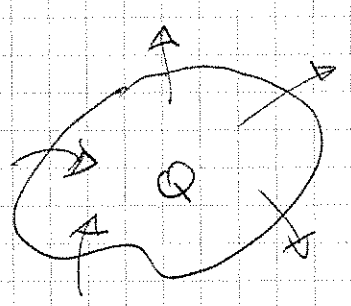
$$1\,A = 1\,\frac{C}{sec}$$

Vedremo più avanti qual è il campione di ampère. Come già detto a suo tempo, il coulomb è una unità di misura derivata da quella di corrente. La carica di 1C è quella che fluisce attraverso S ~~[illegible]~~ in un secondo, quando la corrente è di 1A.

In generale le densità ρ e $\vec{J}$ possono dipendere sia dalle coordinate $\vec{r}$ che dal tempo t. Nel caso particolare in cui dipendono solo da $\vec{r}$ e non da t, si dice che la corrente è <u>stazionaria</u>.

Conservazione della carica ed equazione di continuità

Sappiamo che la carica si <u>conserva</u>. Vediamo come questo si traduce in termini di ρ e $\vec{J}$.
Consideriamo un generico volume V e facciamo il bilancio della carica che entra e che esce in un dato tempo dt.



Quella che esce possiamo calcolarla così

$$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{a}$$

↳ S superficie che racchiude V

La stessa espressione contiene anche l'eventuale carica che entra. Basta che $\vec{j}\cdot d\vec{a}$ cambi segno in qualche zona di S. L'integrale scritto sopra esprime proprio la carica netta che passa per S. Se è positivo vuol dire che carica positiva è uscita da V più di quanta ne è entrata, e viceversa. Se chiamo $Q(t)$ la carica presente in V al tempo t, avrò quindi

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{a}$$

in modo che Q diminuisce quando il flusso uscente è positivo. Il teorema della divergenza dice che

$$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{a} = \int_V dV\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$$

D'altra parte la carica Q in V può essere anche scritta così

$$\int_V \rho\, dV = Q$$

Dunque la relazione sopra diventa

$$-\frac{d}{dt}\int dV\,\rho = -\int dV\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$$

Il membro di sinistra può essere rimaneggiato così:

$$-\frac{d}{dt}\int dV\,\rho = -\int dV\,\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

dato che la variabile d'integrazione non dipende da t, mentre ρ può dipendere sia da $\vec{r}$ che da t. Dunque:

$$-\int_V dV\,\frac{\partial\rho}{\partial t} = \int_V dV\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$$

ovvero $$\int dV \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho \right) = 0$$

che dev'essere vero per qualsiasi V. Ciò è possibile solo se l'integrando stesso è ovunque nullo:

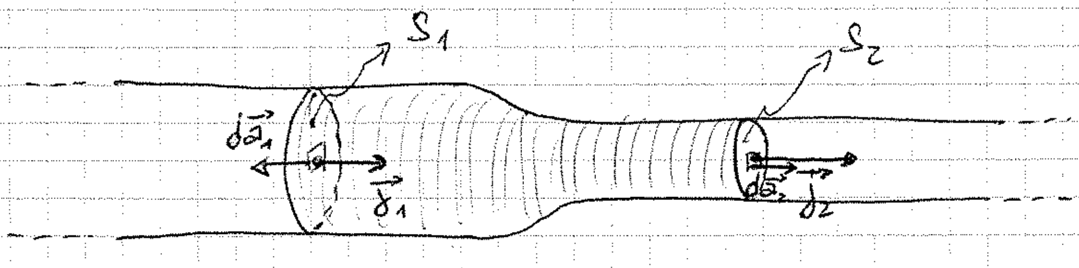
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad \text{in ogni punto dello spazio,}$$

Questa è detta "equazione di continuità", ed è una diretta conseguenza della conservazione della carica e della definizioni di ρ e di $\vec{j}$. È formalmente identica all'equazione di continuità per un fluido neutro in cui il numero di particelle si conserva.

Per una corrente stazionaria si ha, per definizione, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Ne segue che $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Questa può essere interpretata dicendo che in condizioni di corrente stazionaria non ci sono "pozzi" o "sorgenti" del campo $\vec{j}$. In tal caso il flusso di $\vec{j}$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

<u>Semplice applicazione</u>: conduttore cilindrico in cui fluiscono cariche, avente una strozzatura



ritagliamo una "bottiglia" con "base" S_1 e "tappo" S_2. Il campo $\vec{j}$ è parallelo alle pareti laterali e perpendicolare (entrante) alla base, e perpendicolare (uscente) al tappo. Quindi il flusso di $\vec{j}$ attraverso tutta la superficie della bottiglia è dato da

$$\int_{S_{TOTALE}} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \underbrace{\int_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{a}_2}_{\text{positivo}} + \underbrace{\int \vec{j}_1 \cdot d\vec{a}_1}_{\text{negativo}}$$

Dall'equazione di continuità per le correnti stazionarie il flusso totale di $\vec{j}$ dev'essere nullo, dato che è uguale all'integrale in tutta la bottiglia di $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$ che è nullo ovunque. Dunque

$$\underbrace{\int_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{a}_2}_{\substack{\text{questa è la}\\ \text{corrente } I_2\\ \text{che fluisce attraverso}\\ S_2 \text{ da sinistra verso}\\ \text{destra}}} = - \underbrace{\int_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{a}_1}_{\substack{\text{questa è la corrente } I_1 \text{ che}\\ \text{fluisce attraverso } S_1 \text{ da}\\ \text{sinistra verso destra}}}$$

sono uguali

$$I_1 = I_2$$

Perciò, qualsiasi sezione facciamo nel conduttore, la corrente sarà la stessa. Questo implica che sezioni di area minore corrispondono a densità di corrente j più grande e viceversa. Una strozzatura del conduttore produce necessariamente un aumento di j per mantenere costante I.

Velocità dei portatori di carica

Sottolineamo di nuovo che la velocità $\vec{v}$ che compare nella definizione $\vec{j} = \rho\vec{v}$ <u>non</u> è la velocità istantanea di ciascun portatore di carica, ma è la velocità <u>media</u> (in senso statistico) di MOLTI portatori contenuti in un volumetto elementare. Questa distinzione è fondamentale per capire i meccanismi di conduzione elettrica nei materiali.

Esempio: consideriamo come portatori di carica gli elettroni di conduzione in un metallo. Supponiamo di poterli considerare come un gas classico di particelle libere all'equilibrio termico con il materiale. Ad una data temperatura T, la meccanica statistica dice che ogni particella del gas possiede un'energia cinetica media pari a $3/2\, k_B T$.

Dunque

$$\frac{1}{2} m_e \langle v_e^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

dove $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ Kg è la massa dell'elettrone, $\langle v_e^2 \rangle$ è la sua velocità quadratica media e $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K è la costante di Boltzmann. A temperatura ambiente si ha

$$\sqrt{\langle v_e^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} \simeq \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{9.11 \times 10^{-31}}}\ \frac{m}{sec} = 1.17 \times 10^{5}\ m/sec$$

Dunque la velocità media dell'elettrone nel metallo è dell'ordine di 10^5 m/sec (100 Km/sec !!). E' una velocità molto grande. Si potrebbe obiettare che il modello classico non si applica ad un gas di elettroni, oppure che gli elettroni di conduzione non sono trattabili come un gas. In realtà, anche facendo i conti con modelli più raffinati e usando la meccanica quantistica al posto di quella classica si scopre che: il sistema è effettivamente trattabile come un gas di particelle libere, in buona approssimazione, e la velocità media è perfino maggiore (circa 10^6 m/sec) per effetti quantistici.

La velocità media di ciascun elettrone è dell'ordine di 10^6 m/sec per agitazione termica. Ma la velocità termica è totalmente disordinata; non ha alcuna direzione privilegiata. Se calcoliamo la media delle $\vec{v}_e$ su molti elettroni troveremo $\langle \vec{v}_e \rangle = 0$. Mediamente gli elettroni stanno nello stesso posto. Sono solo molto agitati.

La velocità $\vec{v}_e$ non è la velocità che entra nella densità di corrente. Quest'ultima è immaginabile come una velocità di deriva, indotta da forze esterne.

Facciamo una stima della velocità di deriva per elettroni in un filo di rame di diametro 2 mm, percorso da una corrente di 5A:

densità del rame: circa 9 g/cm³

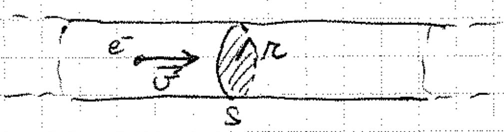
peso atomico: 64
elettroni di conduzione per atomo: 1
numero di Avogadro 6×10^{23}
un numero di Avogadro di atomi pesa 64g. Allora la massa di un atomo è $\frac{64g}{6 \times 10^{23}} \cong 10^{-22} g$

e la densità di atomi è $\frac{8 g/cm^3}{10^{-22} g} \cong 10^{23} \frac{atomi}{cm^3}$

che è anche uguale alla densità di portatori di carica. La densità di carica (dei portatori) è

$$\rho \cong \underbrace{-1.6 \times 10^{-19} C}_{\text{carica di 1 elettrone}} \times 10^{23} cm^{-3} = -1.6 \times 10^{4} \frac{C}{cm^3} = -1.6 \times 10^{10} C/m^3$$

E' una densità di carica enorme, ma ricordiamo che il materiale è globalmente neutro perché c'è una ρ altrettanto grande e positiva che non partecipa alla corrente.



supponiamo che $\vec{J}$ sia uniforme nel filo.

Allora $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \pi r^2 |\vec{J}| = \pi r^2 \rho |\vec{v}|$

dove $\vec{v}$ è la velocità media (di deriva) degli elettroni di conduzione. Possiamo ribaltare l'equazione così:

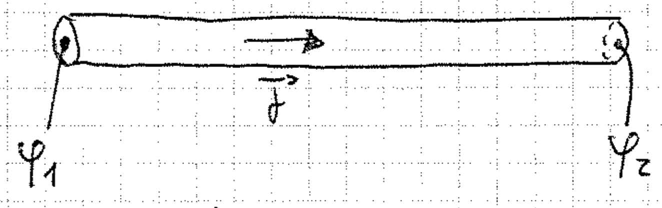
$$|\vec{v}| = \frac{I}{\pi r^2 \rho} = \frac{5 C/sec}{\pi \times 10^{-6} m^2 \times 1.6 \times 10^{10} C/m^3} \cong 10^{-4} \frac{m}{sec}$$

Dunque la velocità di deriva è dell'ordine di 0.1 mm/sec!
È 10 ordini di grandezza più piccola della velocità media termica $\sqrt{\langle v_e^2 \rangle}$. Non è il caso di confondere le due velocità.

Legge di Ohm e materiali ohmici

Supponiamo di avere un conduttore "ideale" in cui le cariche sono totalmente libere di muoversi. In un tale conduttore è impossibile applicare una differenza di potenziale in punti diversi della superficie del conduttore, ad esempio agli estremi di un filo; appena si tenta di produrre la differenza di potenziale, le cariche del conduttore si spostano per annullarla e rendere l'intera superficie equipotenziale.

In realtà questa situazione ideale non si realizza nei conduttori usuali (qualcosa di simile e ancor più sorprendente si realizza nei superconduttori, ma questa è un'altra storia). I conduttori reali oppongono sempre una qualche resistenza al moto dei portatori di carica. Tale resistenza permette di applicare una differenza di potenziale tra due punti (gli estremi del filo, ad esempio) e di osservare una corrente elettrica stazionaria.

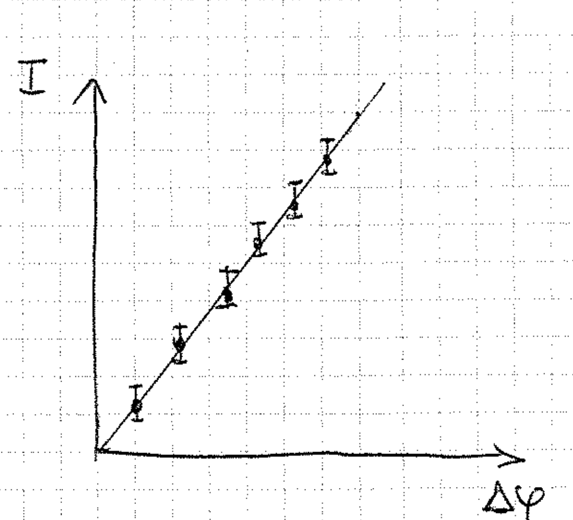


$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$I = \int_{\text{sezione}} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

In molti materiali che conducono corrente elettrica si verifica che

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R}$$



dove R è una costante propria del materiale, detta <u>resistenza</u> elettrica. La legge qui sopra è detta <u>legge di Ohm</u>. Si tratta di una legge empirica. I materiali che la soddisfano sono detti <u>materiali ohmici</u>. La resistenza R dipende dalla geometria, dalla temperatura, dal tipo di materiale, e/o da altri fattori, ma <u>non</u> dalla differenza di potenziale $\Delta\varphi$.

La resistenza R ha le dimensioni di Volt/A. Si introduce una unità di misura specifica, l'ohm (Ω), definita come

$$1\,\Omega = 1\ \frac{\text{Volt}}{A}$$

Per un conduttore cilindrico ohmico, omogeneo, di lunghezza L e sezione S, la resistenza R risulta essere proporzionale a L/S.
La costante di proporzionalità è detta resistività:

$$R = \underbrace{\rho}_{\text{resistività}} \frac{L}{S}$$ ⇝ questa è detta anche II^a^ legge di Ohm

La resistività esprime la tendenza di un materiale ohmico a resistere al passaggio di corrente, al netto dei fattori puramente geometrici. Si misura in Ωm. Varia a seconda del materiale e dipende in generale dalla temperatura.

Occhio alla notazione: stesso simbolo ρ che per la densità di carica. Non bisogna confondersi. Normalmente sono usate in contesti diversi.

La resistività è una grandezza che varia di vari ordini di grandezza dai buoni conduttori (ρ piccola) fino ai buoni isolanti (ρ molto grande) passando per situazioni intermedie (semiconduttori, cattivi conduttori o cattivi isolanti).

Tipici valori (a $T = 293\,K$):

Rame	1.678×10^{-8}	Ωm
Argento	1.586×10^{-8}	"
Oro	2.214×10^{-8}	"
Alluminio	2.655×10^{-8}	"
Platino	10.5×10^{-8}	"
Germanio	0.5	"
Acqua di mare	0.2	"
Acqua dolce	$\sim 2 \times 10^{5}$	"
Legno	$\sim 10^{8} - 10^{11}$	"
Vetro	$\sim 10^{10} - 10^{14}$	"

La legge di Ohm può essere anche espressa in forma locale. A tale scopo consideriamo un cilindretto di lunghezza infinitesima dL e sezione infinitesima dS, con l'asse orientato come la densità di corrente $\vec{j}$. Dato che il cilindretto è infinitesimo la $\vec{j}$ può essere considerata uniforme in esso, e si può scrivere

la corrente che fluisce: $dI = j\,dS$

la differenza di potenziale: $d\varphi = E\,dL$

dove $\vec{E}$ è il campo elettrico medio, locale, nel materiale conduttore, diretto come $\vec{j}$. Dato che il materiale è ohmico per ipotesi, si ha

$$dV = R\,dI$$

ovvero

$$E\,dL = R\,j\,dS$$

da cui

$$j = \underbrace{\frac{dL}{R\,dS}}_{\text{questo è } 1/\rho\text{, dove } \rho \text{ è la resistività}} E$$

Infine

$$j = \frac{1}{\rho} E$$

Normalmente si introduce una nuova grandezza $\sigma = \frac{1}{\rho}$, detta <u>conducibilità</u>, in modo da scrivere

$$j = \sigma E$$

e dato che $\vec{j}$ e $\vec{E}$ sono nella stessa direzione, allora

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

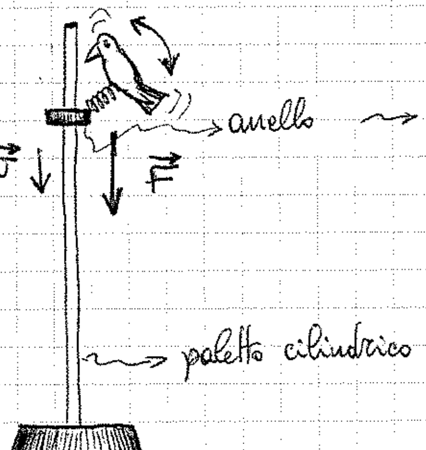
Questa è la legge di Ohm in forma locale. Lega la densità di corrente al campo elettrico punto per punto. Riassume il comportamento dei materiali ohmici su scala locale.

In generale si possono avere anche casi di conduttori anisotropi, in cui $\vec{j}$ è in direzione diversa da $\vec{E}$. In tal caso, la conducibilità dovrà essere espressa con un tensore a 9 componenti, come avevamo già visto per la polarizzabilità χ in dielettrici anisotropi.

Un modello (semplice) per la resistività

Vogliamo capire da dove può originare un comportamento ohmico del tipo $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

sulla base di un modello classico semplice. Notiamo dapprima che questa legge implica che una forza costante ($q\vec{E}$) produce una corrente costante e, quindi, una velocità media dei portatori di carica costante. Ciò sembra del tutto incompatibile con la meccanica Newtoniana in quanto questa prevede, a forza costante, una velocità che cresce linearmente nel tempo. L'incompatibilità è solo apparente e viene risolta assumendo che il moto delle cariche sia libero a tratti, ma le cariche subiscano urti frequenti. Per capire questo, ricorriamo ad un "toy model" (dove si intende proprio modello giocattolo): il picchio, l'asta e la molla.

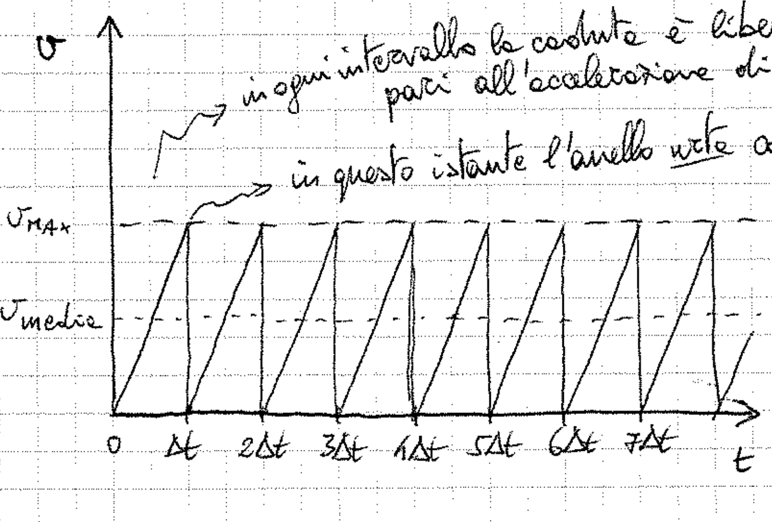


il diametro interno dell'anello è di poco superiore al diametro dell'asta. L'anello scorre liberamente lungo l'asta, con attrito trascurabile, quando l'angolo che forma rispetto all'asta è inferiore ad un certo angolo critico. Raggiunto l'angolo critico l'anello si blocca. La molla ha lo scopo di tenere in oscillazione periodica l'anello.

La forza di gravità che agisce sul picchio+anello è costante, ma la velocità v ha un andamento di questo tipo:

in ogni intervallo la caduta è libera con accelerazione "a" costante, pari all'accelerazione di gravità g

in questo istante l'anello urta contro l'asta, il picchio si ferma e poi riparte da velocità nulla per un'altra caduta. E così via.



L'intervallo Δt è fissato dal periodo di oscillazione, ovvero dalla molla (tramite la costante elastica) e la massa.

La velocità massima del picchio è $a\Delta t$, la velocità media è $\frac{1}{2}a\Delta t$.
Lo spazio percorso dopo n urti è dato da

$$S_n = n\left(\frac{1}{2}a\,\Delta t^2\right)$$

il tempo è $t = n\Delta t$; dunque

$$S_n = \left(\frac{1}{2}a\Delta t\right)n\Delta t = \left(\frac{1}{2}a\Delta t\right)t = v_{media}\,t$$

È un moto uniforme con velocità v_{media}, su scale di t più grandi di Δt. In effetti, se l'oscillazione della molla è sufficientemente rapida noi osserviamo una discesa del picchio a velocità quasi uniforme, malgrado la forza esterna attiva sia costante!

La velocità media qui sopra corrisponde alla media temporale della $\vec{v}$ del picchio. Non è quella che ci serve nel caso della corrente elettrica. Raffiniamo perciò il modello: consideriamo l'insieme di molti picchi. Immaginiamo di mettere mille aste con picchio in una stanza, mettere in moto ciascun picchio in istanti casuali e poi, ad un certo istante generico t, chiederci qual'è la velocità media dei picchi, intesa come media statistica delle velocità misurate al tempo t:

$$\langle v\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i \qquad \text{per } N \text{ picchi}$$

↳ velocità dell'i-esimo picchio al tempo t.

La velocità v_i dell'i-esimo picchio al tempo t sarà data da

$$v_i = a\,t_i$$

dove t_i è il tempo trascorso dall'ultimo urto dello stesso picchio.
Allora

$$\langle v\rangle = \frac{1}{N}a\sum_{i=1}^{N} t_i = a\tau$$

Definiamo $\displaystyle \tau = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$

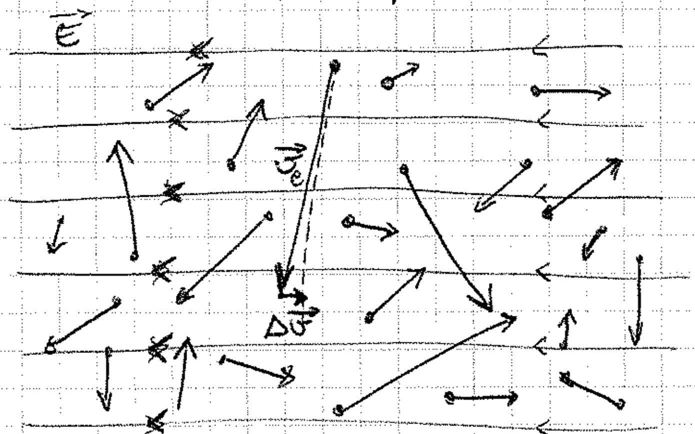
come il tempo <u>medio</u> trascorso dall'ultimo urto sull'insieme dei picchi. Essendo tutti i picchi uguali, ed essendo partiti in istanti casuali, il tempo t_i è distribuito con probabilità uniforme

tra 0 e Δt, così che il valor medio è $\tau = \Delta t/2$. È anche uguale al valor medio del tempo che manca ad ogni picchio all'urto successivo. Fissato un certo istante t, ogni picchio ha a disposizione un tempo medio di caduta libera pari a τ.
Dunque abbiamo trovato che

$$\langle v \rangle = a\tau$$

dove $\tau = \frac{\Delta t}{2}$, fissato dalle caratteristiche del picchio (con molle).
Il moto complicato dei mille picchi nella stanza, equivale in media ad un moto uniforme con velocità (di deriva) pari a $a\tau$.

Ora trasformiamo i picchi in elettroni, liberiamoli dalle aste, agitiamoli con il moto termico di grande velocità (casuale) e immergiamo il tutto in un campo uniforme e costante $\vec{E}$.



Trattiamo gli elettroni come tante cariche libere soggette al campo $\vec{E}$ che ogni tanto urtano contro qualcosa (ostacoli da definire). Tra un urto e l'altro subiscono l'accelerazione $q\vec{E}/m$ nella direzione di $\vec{E}$ (verso opposto perché sono cariche negative) e variano la loro velocità in quella direzione di una quantità Δv. Supponiamo che Δv sia molto più piccola della velocità media di ciascun elettrone, $\sqrt{\langle v_e^2 \rangle}$, in modo che il tipo di urti e il tempo medio tra gli urti sia fissato dalle caratteristiche del materiale e dalla velocità v_e, ma non da Δv. Ad ogni urto gli elettroni perdono totalmente memoria del Δv acquisito prima dell'urto. Per quanto riguarda il moto di deriva degli elettroni nella direzione di $\vec{E}$ il problema è del tutto analogo a quello degli N picchi che partono in istanti casuali. Le velocità disordinate e casuali v_e, assieme alle proprietà del materiale, determina il tempo medio τ. La velocità media di deriva, calcolata come per i picchi, sarà dunque

$$\langle v \rangle = a\tau = \frac{qE}{m}\tau$$

con l'unica differenza che qui τ è un parametro empirico proprio del materiale e che può dipendere anche dalla temperatura (che è legata a $\langle v_e^2 \rangle$), mentre nel caso dei picchi τ poteva essere scritto in termini del periodo di oscillazione della molla.
La velocità di deriva $\langle v \rangle$ è quella che entra in $\vec{J}$. Perciò

$$\vec{J} = \rho \langle \vec{v} \rangle = \underbrace{n}_{\text{densità degli elettroni di conduzione}} q \frac{q\vec{E}}{m}\tau = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

ovvero

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

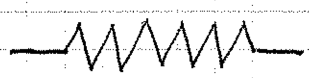
con

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}.$$

Abbiamo trovato un modello classico che giustifica la legge di Ohm. Si chiama <u>modello di Drude</u>.
Modelli più raffinati si basano sulla meccanica quantistica. Questa permette anche di caratterizzare meglio gli urti, in termini di interazioni degli elettroni con imperfezioni del reticolo cristallino. Ma questo va oltre gli scopi del corso.

<u>Materiali ohmici come elementi di circuiti elettrici: resistori</u>

Un materiale ohmico inserito in un percorso chiuso in cui fluisce una corrente è detto "resistore" o "resistenza" e si indica con il simbolo

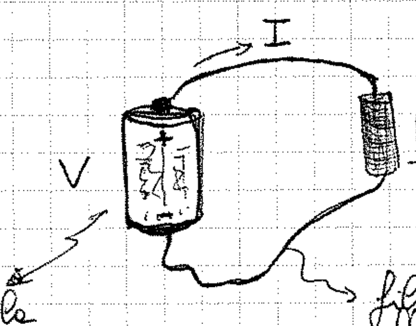


Se nel resistore, di resistenza R, fluisce una corrente I, allora per definizione ai suoi capi c'è una differenza di potenziale RI. La differenza di potenziale, nella notazione tipica della teoria dei circuiti elettrici, si indica con la lettera V, anziché $\Delta\varphi$. Dunque

$$V = IR$$

oppure $I = V/R$. La corrente può essere prodotta utilizzando dispositivi che creano una differenza di potenziale tra due punti per mezzo di forze non elettrostatiche (celle elettrolitiche, pile, ...). Chiamiamo generatore di differenza di potenziale un tale dispositivo e lo indichiamo con il simbolo

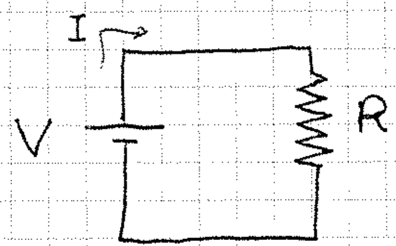
Un esempio:



materiale ohmico di resistenza R

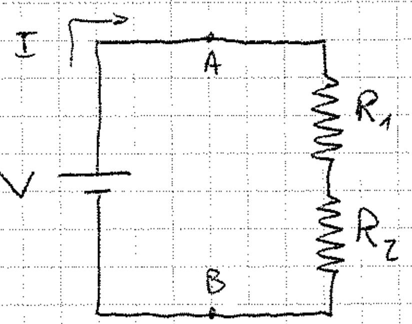
fili con resistenza trascurabile rispetto alla R del resistore

si schematizza così:



$$I = \frac{V}{R}$$

Le resistenze si possono mettere in serie



la corrente che circola in R_1 e in R_2 è la stessa. Dunque

$$V_1 = R_1 I \quad e \quad V_2 = R_2 I$$

Ma $V_1 + V_2$ dev'essere uguale a V, dato che la differenza di potenziale tra i punti A e B non può dipendere dal percorso. Perciò

$$V = (R_1 + R_2)\, I$$

resistenza totale

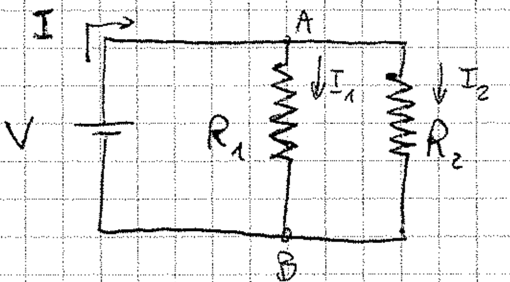
$$R = R_1 + R_2$$

Per resistenze in serie, la resistenza totale è la somma delle singole resistenze. È vero per un numero di resistenze qualsiasi:

$$R = \sum_i R_i$$

È consistente con la seconda legge di Ohm per un cilindro omogeneo, $R = \rho L / S$, dato che un cilindro intero può essere visto come una serie di fette di lunghezze $l_1, l_2, \ldots$, la cui somma dà L.

Le resistenze possono essere collegate in parallelo:



In questo caso la conservazione della carica impone che

$$I_1 + I_2 = I$$

Inoltre $V_1 = V_2 = V$, dato che i punti A e B devono avere una differenza di potenziale indipendente dal percorso.

Dunque

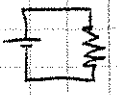
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{R_1} \\ I_2 &= \frac{V_2}{R_2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underbrace{I_1 + I_2}_{I} = \frac{\overset{V}{V_1}}{R_1} + \frac{\overset{V}{V_2}}{R_2} \longrightarrow I = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Il risultato finale è $I = \dfrac{V}{R}$

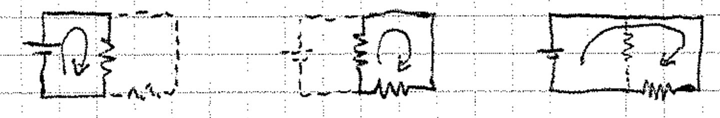
con $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, oppure $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Per più resistenze in parallelo si avrà:

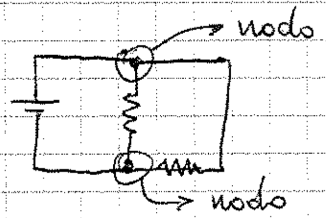
$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Nel gergo dei circuiti elettrici, un circuito così  è detto a una "maglia"; partendo da 1 punto qualsiasi si può ritornare a quel punto compiendo un solo tipo di percorso.

Invece, un circuito così:  ha tre maglie. Dato un punto si può tornare ad esso percorrendo tre diversi tipi di percorso

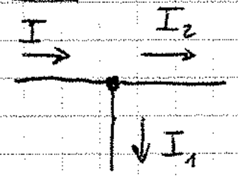


Si parla inoltre di "nodi" per indicare i punti d'incontro tra le maglie



Per la conservazione della carica deve essere sempre vero che la somma algebrica delle correnti entranti/uscenti da un nodo qualsiasi è nulla

esempio:



negativa se uscente

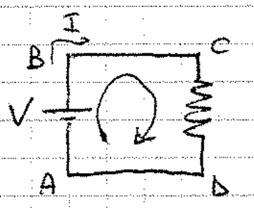
$$I - I_1 - I_2 = 0$$

positiva se entrante

le cariche non possono crearsi o distruggersi nel nodo.

Per quanto riguarda le maglie osserviamo che il potenziale elettrico in un punto del circuito non dipende da come si portano le cariche in quel punto. Perciò, data una maglia e stabilito un verso convenzionale di percorrenza (arbitrario), la somma algebrica delle differenze di potenziale lungo l'intera maglia deve essere sempre nulla

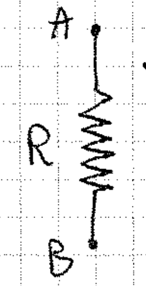
esempio:



$$\underbrace{V}_{\text{aumento di potenziale da A a B}} - \underbrace{IR}_{\text{caduta di potenziale da C a D}} = 0$$

Questa è la "legge delle maglie", quella di prima era la "legge dei nodi". Entrambe sono note come leggi di Kirchhoff. Sono uno strumento utile nel calcolo delle correnti nei circuiti. Forniscono un insieme di equazioni lineari per le correnti e i potenziali.

Energia dissipata in un resistore: effetto Joule



Nel tempo dt entrano $I dt$ cariche in A, al potenziale V_A, ed escono $I dt$ cariche da B, al potenziale V_B, con $V_A - V_B = V$.

Il lavoro fatto per mantenere in moto stazionario le cariche nel tempo dt è

$$\text{Lavoro} = W\,dt = \underbrace{I dt\, V_A}_{\text{energia potenziale delle cariche entrate}} - \underbrace{I dt\, V_B}_{\text{energia potenziale delle cariche uscite}} = I V dt$$

Il lavoro fatto per unità di tempo, cioè la potenza, è quindi

$$W = IV$$

Questa relazione è vera per qualsiasi elemento di circuito attraversato da una corrente costante I e ai cui capi c'è una differenza di potenziale costante V.

Nel caso specifico di un resistore con resistenza R possiamo anche scrivere $V = RI$ e dunque

$$W = RI^2$$

Questa è la potenza dissipata nel resistore. L'energia viene dissipata a seguito degli urti dei portatori di carica all'interno del materiale. Il materiale, infatti, si riscalda.

Può essere un effetto indesiderato (dissipazione in un processo di trasporto di energia elettrica) oppure desiderato (lampade a incandescenza, stufe elettriche, ...). Si chiama effetto Joule.

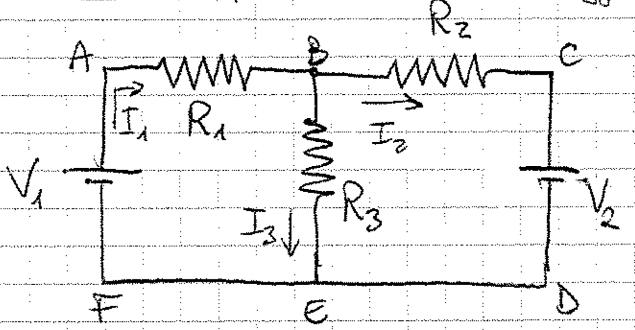
Chi ci mette l'energia per contrastare la dissipazione e mantenere la corrente costante? Il generatore di differenza di potenziale, che sfrutta processi non elettrostatici (chimici, meccanici, ...).

La potenza, ricordiamo, si misura in Watt:

$$1\ \text{Watt} = 1\ \frac{J}{sec} = 1\ \text{Volt}\,A \quad \text{(voltampere)}$$

e l'energia può essere misurata, ad esempio, in Kilowattore.

$\boxed{\text{Esercizio}}$ Applicazione delle leggi di Kirchhoff.



dati R_1, R_2, R_3, V_1, V_2

calcolare I_1, I_2, I_3

Si possono usare le leggi delle maglie e dei nodi. Bastano tre equazioni.

nodo in B : $\quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$

maglia ABEF : $\quad V_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$

maglia BCDE : $\quad -R_2 I_2 - V_2 + I_3 R_3 = 0$ $\rightsquigarrow$ occhio al verso di percorrenza per i segni!

Le possiamo riscrivere così:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = V_1 \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 = V_3 \end{cases}$$

o in forma matriciale

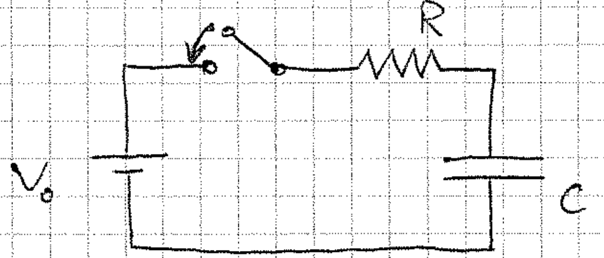
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

e le soluzioni si trovano con i determinanti, così:

$$I_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ V_1 & 0 & R_3 \\ V_2 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}} = \frac{R_3 V_1 - R_3 V_2 + R_2 V_1}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$$

e analogamente per I_2 e I_3.

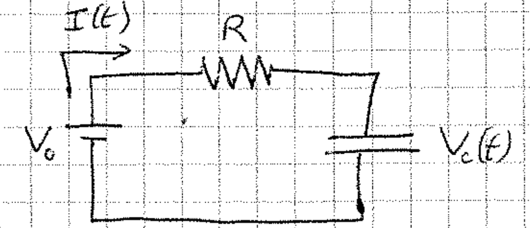
$\boxed{\text{Esercizio}}$ <u>Carica e scarica di un condensatore</u>



carica sul condensatore : q
diff. di potenziale ai capi del condensatore : V_c

A interruttore aperto : $q = 0$, $V_c = 0$ e corrente $I = 0$.
Si chiude l'interruttore a $t = 0$. Cosa succede? Il condensatore si carica e una corrente fluisce nel circuito. Vogliamo calcolare $I(t)$ e $V_c(t)$.

Commento: possiamo applicare le leggi di Kirchhoff anche se I varia nel tempo? Sì, se varia lentamente, cioè su tempi lunghi rispetto al tempo necessario al "segnale" (perturbazione di $\vec{E}$ in un punto del circuito) a propagarsi sull'intero circuito. La velocità di propagazione, come vedremo, è la velocità della luce.



Dunque applico la legge delle maglie:

$$V_0 - RI - V_c = 0$$

la applico istante per istante sapendo che

$$V_c = \frac{q}{C}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \rightsquigarrow I \text{ positiva quando } q(t) \text{ aumenta.}$$

Dunque $$V_0 - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

è un'equazione differenziale per la funzione incognita $q(t)$. Si risolve per separazione di variabili:

$$(CV_0 - q)\, dt = RC\, dq \implies \frac{dt}{RC} = \frac{dq}{CV_0 - q}$$

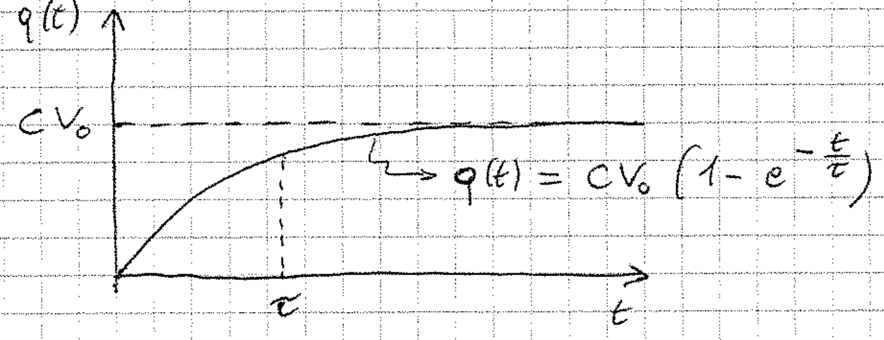
ora basta integrare entrambi i membri. Si ottiene:

$$\log\left(\frac{CV_0 - q}{CV_0}\right) = -\frac{t}{RC}$$

ovvero

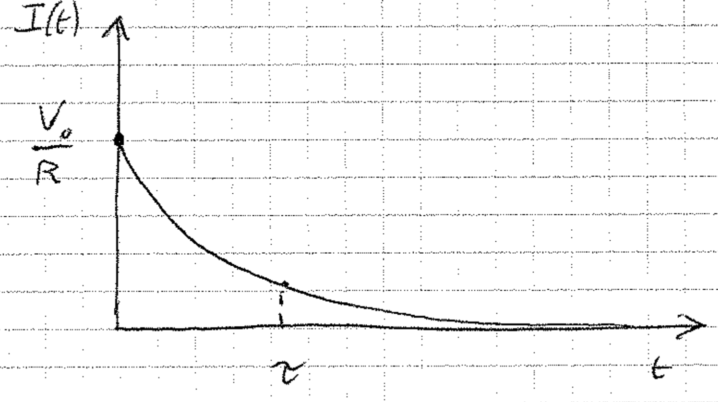
$$q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Chiamiamo $\tau = RC$. È il tempo tipico del circuito. Si capisce plottando $q(t)$



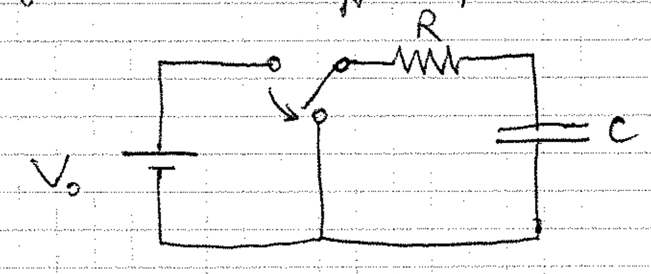
e la corrente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/\tau}$$



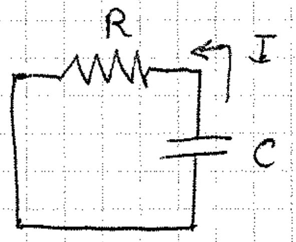
Per $t \gg \tau$ il condensatore è carico e $V_c = V_0$.

Il processo opposto è quello di scarica. Si ottiene togliendo il generatore di diff. di potenziale e chiudendo il circuito così:



Supponiamo che il condensatore sia stato caricato come prima. Riassumiamo $t=0$ il tempo in cui muoviamo l'interruttore come a sinistra, escludendo il generatore.

Consideriamo la nuova "maglia"



Il condensatore si scarica in modo che

$$V_c - IR = 0$$

stavolta però abbiamo scelto convenzionalmente il verso di I in modo tale che

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

cioè I è positiva (nel verso della freccia) quando $q(t)$ sul condensatore diminuisce. Dunque la legge per la maglia può essere scritta così:

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

ovvero $$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \; ;$$

integrando si ha $$q(t) = q(0)\, e^{-t/\tau}$$ con $\tau = RC$ e $q(0) = V_0 C$

La corrente è

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/\tau}$$

come per la "carica", salvo che il verso è opposto.

Notiamo che a $t=0$ c'era nel condensatore un'energia elettrostatica $U_0 = \frac{1}{2} C V_0^2$

Alla fine del processo di scarica tale energia non c'è più. Dov'è finita? È stata dissipata dalla resistenza per effetto Joule.

Infatti, la potenza dissipata è $RI^2(t)$. Integrandola si ottiene

$$U_{dissipata} = \int_0^\infty dt\, R I^2(t) = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty dt\, e^{-\frac{2t}{RC}}$$

Si integra cambiando variabili:

$$U_{dissipata} = \frac{1}{2} C V_0^2 \underbrace{\int_0^\infty d\left(\frac{2t}{\tau}\right) e^{-\frac{2t}{\tau}}}_{1} = \frac{1}{2} C V_0^2 = U_0$$

come si voleva