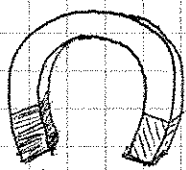


4 CARICHE IN MOTO E CAMPI MAGNETICI

Magnetismo, vecchia storia...

Magnesie, magnetite, calamite, ...



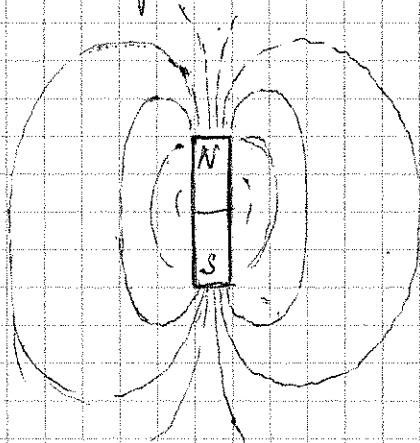
ferro, nichel, ...

Attrazione e/o repulsione tra poli magnetici (Nord, Sud)

Non esistono monopoli! Un magnete ha due polarità; se diviso in due ha ancora due polarità per ciascun pezzo...

Un ago magnetico si orienta puntando verso un luogo geografico (più o meno il Nord geografico)

Classico fenomeno: lamina di ferro che si dispone lungo linee di forza.



Queste forze non hanno nulla a che vedere con la gravitazione, né con il campo elettrostatico.

Le chiamiamo forze magnetiche. Ci serve un modo per definire operativamente un campo magnetico. Usiamo cariche elettriche.

Si può fare in quanto si osserva che:

- cariche elettriche risentono di forze magnetiche se sono in movimento
- le forze che agisce sulle cariche in moto è perpendico

lavora alla sua velocità e alle linee di forza del campo magnetico (quelle su cui si dispone la struttura di ferro, ad esempio).

→ l'intensità della forza è proporzionale al modulo della velocità della carica e al valore della carica.

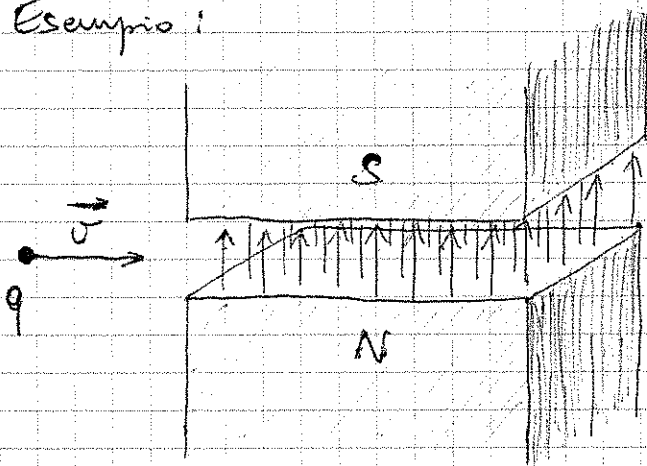
Possiamo definire un campo magnetico \vec{B} , esprimendo la forza su una carica in moto nel modo seguente

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

È una definizione operativa. Si può, in linea di principio, misurare \vec{B} usando una carica di prova q che si muove a velocità \vec{v} in un punto qualsiasi dello spazio. Se la carica è anche soggetta ad un campo elettrico \vec{E} , allora la forza totale sulla carica è

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Forza di Lorentz}$$

Esempio:



campo \vec{B} tra due magneti

Passando tra i due magneti la carica devia lateralmente

carica positiva, massa m

campo \vec{B} uscente dal foglio

$$|\vec{F}| = q v B$$

accelerazione \perp a \vec{v} e con modulo

$$|\vec{a}| = \frac{q v B}{m}$$

Produce un moto circolare!

La forza di Lorentz sintetizza una vasta classe di osservazioni empiriche: per spiegare il moto di una particella carica occorrono due campi, \vec{E} e \vec{B} , la cui definizione operativa è proprio la forza di Lorentz.

Unità di misura

Nel sistema SI il campo \vec{B} è dimensionalmente dato da

$$\frac{\text{Forza}}{\text{carica} \times \text{velocità}}$$

Si definisce l'unità tesla (T) come

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C m/sec}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}}$$

Se moltiplichiamo a destra e sinistra per un'area otteniamo una grandezza equivalente ad un flusso di campo magnetico

$$1 \text{ T m}^2 = 1 \frac{\text{N m sec}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \text{ sec} = 1 \text{ Volt} \cdot \text{sec}$$

questo è detto anche weber (Wb). Così:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Volt sec}$$

oppure
$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

In effetti, il campo magnetico è espresso anche in weber su m².

Nel sistema CGS la forza di Lorentz è scritta in forma leggermente diversa

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

c essendo la velocità della luce, $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/sec}$. In questo modo B viene ad essere una forza su una carica. Si definisce l'unità gauss (G) pari a $1 \text{ G} = 1 \text{ dyne/nes}$

Per ottenere la conversione da gauss a Tesla e viceversa, consideriamo la forza prodotta da un campo di 1T su una carica di 1C che si muove a 1m/sec in direzione perpendicolare a \vec{B} :

$$|\vec{F}| = 1C \cdot 1m/sec \cdot 1T = 1N$$

Questa forza è pari a 10^5 dyne. Per ottenere la stessa forza con la stessa carica e stesse velocità, quale campo \vec{B} , in unità CGS, serve?

$$B_{CGS} = \frac{Fc}{qv} = \frac{10^5 \text{ dyne} \times 2.998 \times 10^{10} \text{ cm/sec}}{2.998 \times 10^9 \text{ ues} \times 10^2 \text{ cm/sec}} = 10^4 \text{ G}$$

Quindi $1T = 10^4 \text{ G}$

Attenzione: il valore delle costanti numeriche che entrano nella definizione dei campi è convenzionale. Il fatto che un 2.998... compare nella relazione tra ues e C in modo da cancellarsi esattamente con la velocità della luce e nella relazione precedente non è casuale, ma è frutto di un'opportuna scelta (convenzionale) delle costanti, che risulta ragionevole e posticori, una volta formulate le teorie complete dell'elettromagnetismo.

Chi produce il campo magnetico \vec{B} ?

Finora abbiamo accennato alla fenomenologia del magnetismo e abbiamo visto come si può introdurre un campo \vec{B} operativamente usando cariche in moto, ma non ci siamo ancora occupati di quali siano le origini di \vec{B} .

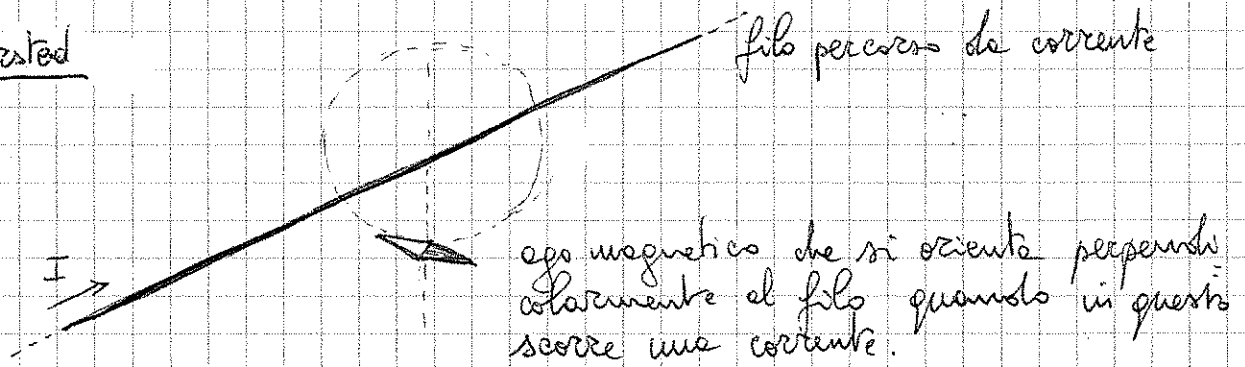
Nel caso dei magneti (calamite, bussole, ...) possiamo immaginare che il \vec{B} sia dovuto a proprietà del materiale, che originano su scala microscopica (atomica) e si manifestano su scala macroscopica. Ciò pone dei problemi seri alla meccanica classica: servono modelli di struttura della materia!

Per questo motivo, tra l'elettricità e magnetismo sono rimasti separati per secoli nella storia della scienza.

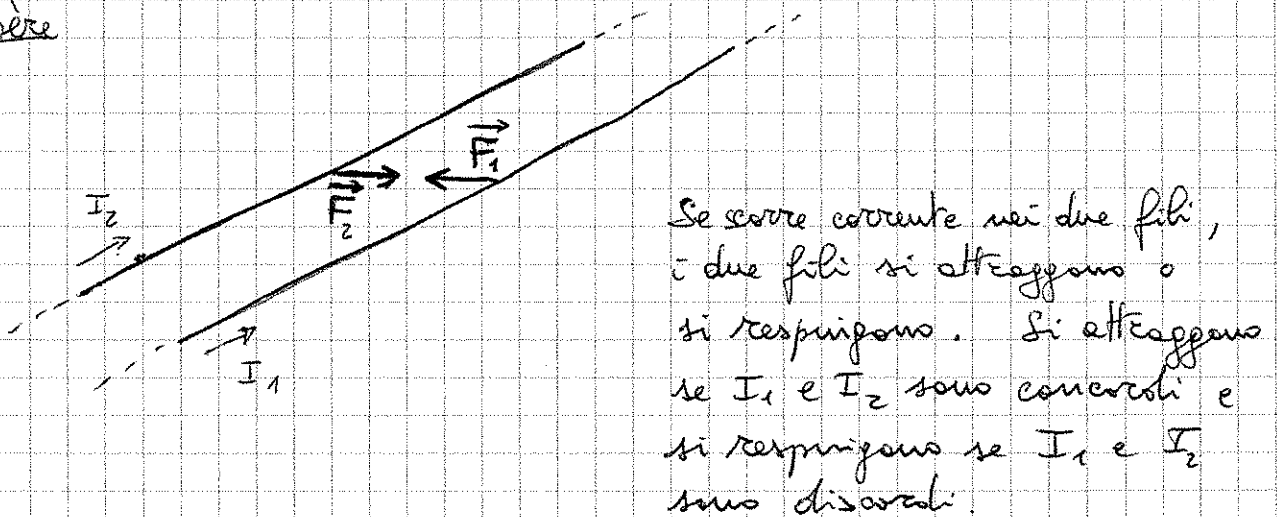
Per una comprensione più pulita e quantitativa delle origini

di \vec{B} occorre un approccio diverso. Il punto di svolta: esperimenti di Oersted e Ampère.

Oersted



Ampère



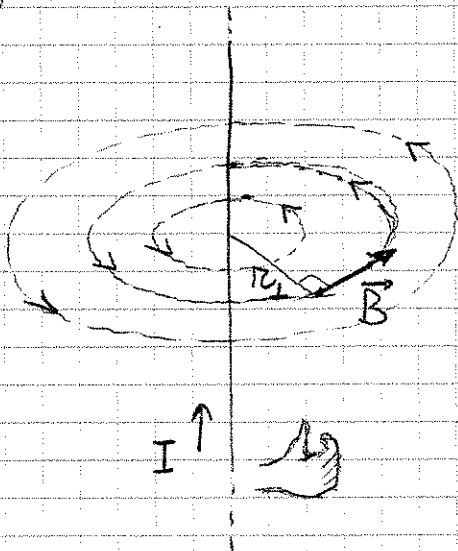
Se ne deduce che correnti elettriche generano campi magnetici (Oersted) e che correnti elettriche risentano di campi magnetici (Ampère).

Approfondiamo il primo aspetto, per cominciare.

Campo \vec{B} generato da un filo in cui scorre corrente

Esperimenti più quantitativi, rispetto a quello di Oersted, mostrano che le linee di forza del campo \vec{B} generato da un filo rettilineo in cui scorre una corrente I sono cerchi concentrici al filo, nel piano perpendicolare allo stesso. Il verso di \vec{B} , consistente con la definizione di \vec{B} nella forza di Lorentz, è fissato dalle regole della mano destra. Il

modulo di \vec{B} è proporzionale alla corrente, I , e inversamente proporzionale alle distanze dal filo, r_{\perp} .



$$|\vec{B}| \propto \frac{I}{r_{\perp}}$$

La costante di proporzionalità dipende dal sistema di unità di misura adottato convenzionalmente.

Nel sistema SI si scrive

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_{\perp}} \quad \text{Legge di Biot-Savart}$$

dove μ_0 è detta permeabilità magnetica del vuoto, il cui valore è fissato in

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

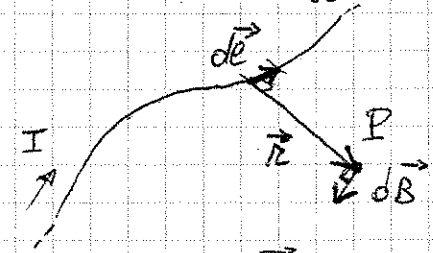
Il fatto che la costante sia esattamente 10^{-7} , senza incertezze sperimentali, discende dal fatto che l'unità di misura della corrente, ampere, è stata fissata convenzionalmente in base alla relazione tra corrente elettrica e campo magnetico (precisamente come, lo vedremo più avanti). In altri termini, la corrente di 1A per definizione è la corrente che produce un campo di $2 \times 10^{-7} T$ ad una distanza di un metro (per un filo rettilineo).

La legge di Biot-Savart gioca un ruolo simile alle legge di Coulomb. Ci possiamo chiedere se val un principio di sovrapposizione. Nel caso delle correnti il problema ha due facce

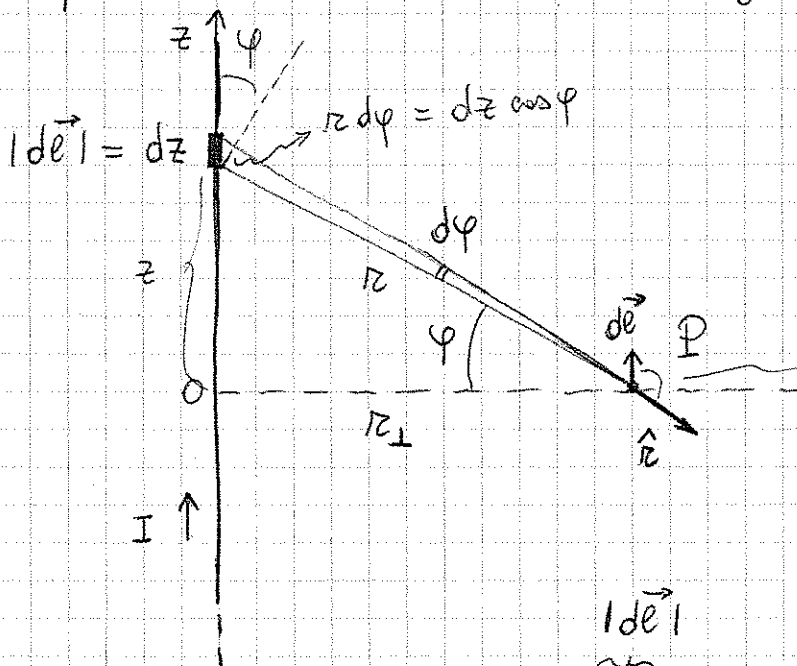
- i) - il campo \vec{B} prodotto da un filo in un punto dello spazio può essere visto come la somma dei contributi dovuti a singoli pezzi dello stesso filo?
- ii) - il campo \vec{B} prodotto da più fili è la somma dei campi dovuti a ciascun filo?

Le risposte alle domande (i) e ii. Risulta vero (nel senso di verificato in tutte le sue implicazioni sperimentali) che il campo \vec{B} prodotto da un filo qualsiasi percorso da corrente I è pari alla somma di contributi elementari, dovuti ai tratti elementari di filo $d\vec{e}$, pari a

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2}$$



dove \vec{r} è il vettore che congiunge il tratto di filo $d\vec{e}$ al punto in cui si calcola il campo. Anche questa legge è nota come legge di Biot-Savart. Mostriamo che, per un filo rettilineo infinito, porta allo stesso risultato delle pagine precedenti.



La distanza dal filo è

$$r_{\perp} = r \cos \varphi$$

L'angolo compreso tra $d\vec{e}$ e \hat{r} è $\frac{\pi}{2} + \varphi$

Inoltre vale la relazione

$$dz \cos \varphi = r d\varphi$$

Dunque

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \cos \varphi}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\varphi}{r}$$

Conviene riscriverlo in termini di r_{\perp} , dato che tutti gli elementi del filo danno lo stesso r_{\perp} :

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{r_{\perp}}$$

L'unica cosa che cambia lungo il filo è l'angolo φ . Basta integrare.

$$|\vec{B}| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \frac{\mu_0 I}{4\pi r_{\perp}} \cos y$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_{\perp}} \int_{-1}^1 ds \sin y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_{\perp}}$$

come si voleva.

Notiamo che è stata fatta la somma dei moduli, dato che tutti i $d\vec{B}$ dovuti ai singoli $d\vec{l}$ hanno la stessa direzione e verso, perpendicolare al piano su cui stiamo il filo (ovvero i $d\vec{l}$) e il vettore \vec{r} . Dunque \vec{B} è tangente ai cerchi concentrici al filo, con il verso fissato dalle regole della mano destra.

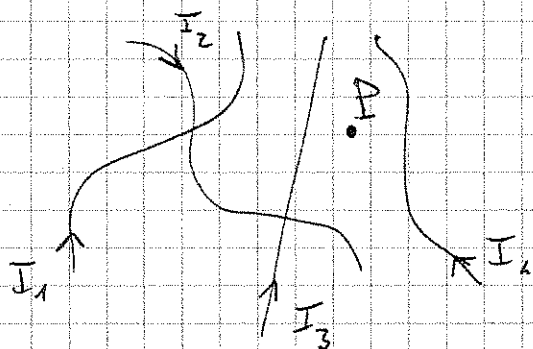
Dunque la legge $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ implica la $|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_{\perp}}$ per un filo rettilineo. Se lo usiamo per un percorso (filo) generico abbiamo

$$\vec{B} = \int_{\text{filo}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{filo}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Questa è anche nota come legge di Ampère-Laplace. Risulta verificata negli esperimenti (almeno quelli, come supposto in questo capitolo, in cui I è costante e il campo \vec{B} pure magnetostatico).

Notiamo che la legge di Ampère-Laplace è una legge fisica, di cui è possibile eseguire verifiche sperimentali dirette, mentre la legge di Biot-Savart $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$, che fornisce l'integrando dell'Ampère-Laplace, è una legge più "formale" (benché altrettanto valida dal punto di vista teorico), nel senso che non si presta ad alcune verifiche sperimentali dirette. Non è possibile, infatti, isolare in pratica un tratto $d\vec{l}$ di filo mantenendo in esso una corrente costante. Il circuito deve rimanere "chiuso" per mantenere la corrente stazionaria. In altri termini, i contributi $d\vec{B}$ non sono misurabili separatamente.

La risposta alla domanda (ii) è ancora sì. Se prendiamo più fili, percorsi da correnti I_1, I_2, \dots , il campo \vec{B} complessivo generato in un punto P dello spazio risulta essere la somma dei campi prodotti da ciascun filo.



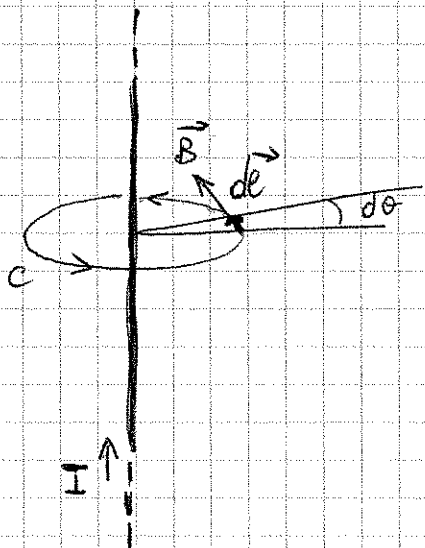
$$\vec{B}(P) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots$$

e si possono calcolare i \vec{B}_i con la legge di Ampère - Laplace.

In sintesi, abbiamo individuato una sorgente del campo \vec{B} , la corrente elettrica, abbiamo scritto una legge di forza (o un'espressione per il campo in funzione della distanza...) e abbiamo visto che vale il principio di sovrapposizione. Nel caso dei campi elettrici si trovava una legge importante per il flusso: la legge di Gauss. C'è qualcosa di analogo per \vec{B} ?

La legge di Ampère

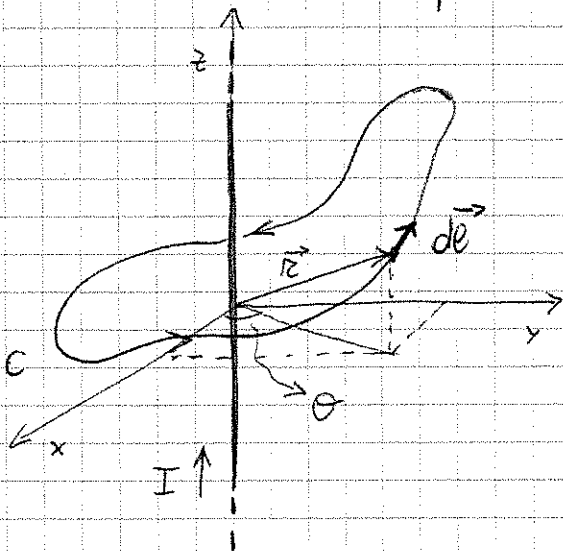
Partiamo dalla legge di Biot-Savart per un singolo filo rettilineo percorso da corrente e calcoliamo la circolazione di \vec{B} lungo una circonferenza concentrica di raggio r_1



$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_C B dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C \frac{dl}{r_1} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \underbrace{\oint_C dl}_{2\pi r_1} \end{aligned}$$

Infinite $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I$

La stessa relazione vale per un percorso qualsiasi che racchiuda il filo.



$$d\vec{e} = \hat{r}_\perp dr_\perp + \hat{\theta} r_\perp d\theta + \hat{z} dz$$

\swarrow \hat{r}_\perp $\hat{\theta}$ \hat{z}
 Vettore \perp al filo vettore tangenziale (θ è l'angolo attorno all'asse)

Il campo è tangenziale

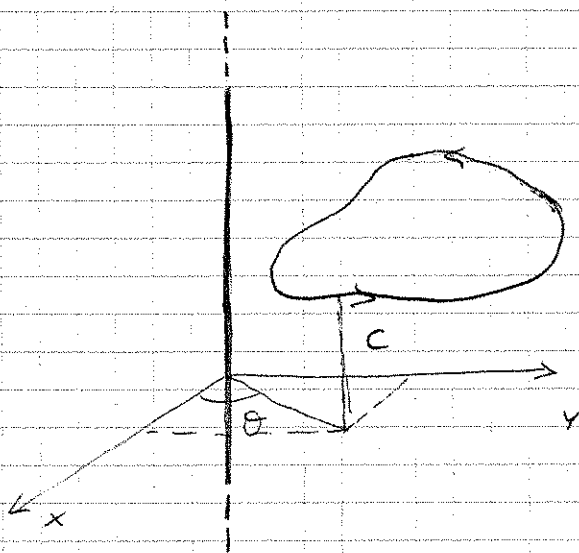
$$\vec{B} = \hat{\theta} B = \hat{\theta} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp}$$

Percorso

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\theta = \mu_0 I$$

$2\pi \rightarrow$ la somma su tutti: $d\theta$ dà l'angolo giro.

Se il circuito non racchiude il filo:



come prima si trova

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\theta$$

Ma stavolta l'angolo totale $\oint d\theta$ è nullo. Partendo da un punto del circuito ad un certo angolo θ_0 si torna allo stesso punto con lo stesso angolo, senza girare attorno all'origine. Dunque

$$\oint_C d\theta = \theta_0 - \theta_0 = 0$$

Quindi $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = 0$ se la corrente non è "concatenata" al

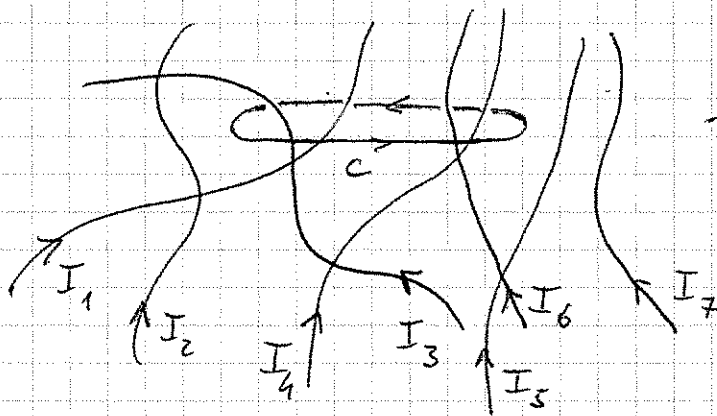
percorso C . Inoltre, dato che vale il principio di sovrapposizione, si potrà scrivere

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_n I_n$$

Legge di Ampère

→ somma sulle correnti concatenate a C

Questa è vera per fili di forma qualsiasi!



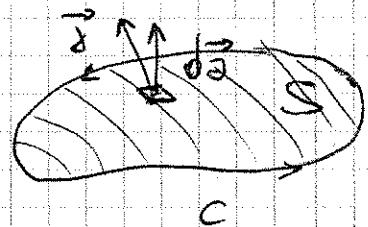
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 + I_3 - I_4 + I_6)$$

la somma è algebrica; ogni corrente va presa con il segno giusto, fissato dalle regole della mano destra.

La legge di Ampère è per \vec{B} quello che la legge di Gauss è per \vec{E} . Come la legge di Gauss anche la legge di Ampère permette di semplificare il calcolo di \vec{B} generato da un insieme di correnti, quando il problema ha simmetrie evidenti. Vedremo esempi più avanti.

Come la legge di Gauss anche la legge di Ampère ammette una forma locale. Nel caso della legge di Gauss si trattava di passare da cariche puntiformi ad una distribuzione continua ρ ed applicare il teorema delle divergenze. Nel caso della legge di Ampère si tratta di passare da correnti I nei fili (sorgenti discrete) ad una distribuzione continua di corrente con densità \vec{j} ed applicare il teorema di Stokes.

Consideriamo un contorno C e una superficie S che ha C come contorno. Se S è attraversata da una corrente elettrica con distribuzione continua, la



corrente elettrica che attraversa S e

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\alpha}$$

(può essere vista come somma delle correnti elementari concatenate)

per definizione della densità di corrente \vec{j} . La legge di Ampère ci dice che

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\alpha}$$

A questo punto possiamo applicare il Teorema di Stokes a \vec{B} :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{\alpha}$$

e mettere assieme le due relazioni così:

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{\alpha} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{\alpha}$$

ovvero
$$\int_S (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) \cdot d\vec{\alpha} = 0$$

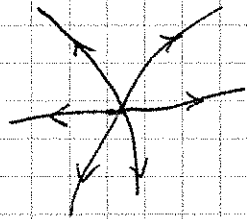
che dev'essere vera per qualsiasi S . Ciò è possibile solo se l'integrandò è nullo punto per punto nello spazio:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad \text{legge di Ampère in forma locale.}$$

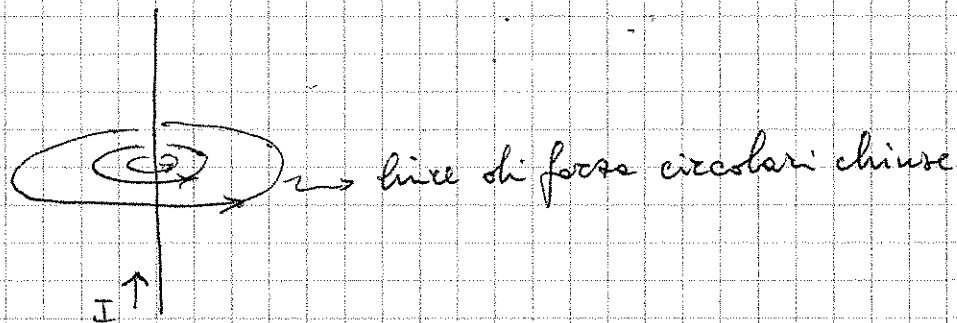
Rotore e divergenza di \vec{B} in magnetostatica

La legge di Ampère è una legge fondamentale della magnetostatica. Ci basta per calcolare univocamente \vec{B} per una distribuzione di correnti assegnate? NO. Ci occorre anche una legge per la divergenza di \vec{B} . Il problema è analogo a quello per il campo elettrostatico \vec{E} dove occorrono le due leggi $\nabla \times \vec{E} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ (oppure, equivalentemente,

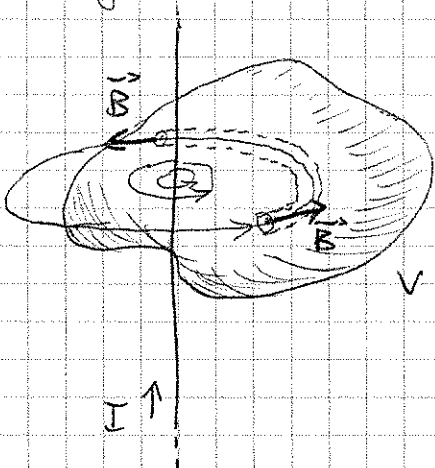
la definizione del potenziale φ e la legge di Poisson). Ricordiamo che la divergenza di un campo è diversa da 0 solo quando le linee di forza hanno "sorgenti" o "pozzi" del tipo



Nel caso di campi \vec{B} prodotti da correnti elettriche il campo ha linee di forza che "girano" attorno alla corrente chiudendosi sempre su se stesse. Il caso più semplice è quello della legge di Biot-Savart per un filo rettilineo



Campi del genere hanno divergenza nulla. Possiamo anche convincerci di questo usando il teorema della divergenza applicato ad un generico volume V racchiuso da una superficie S .



Calcoliamo il flusso di \vec{B} .
 Le linee che si chiudono all'interno del volume, senza uscire, danno contributo nullo al flusso.
 Le linee di forza che escono e rientrano danno due contributi al flusso uguali in modulo e di segno opposto. La somma di questi è nulla per ogni "tubo" circolare come in figura. Dunque

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

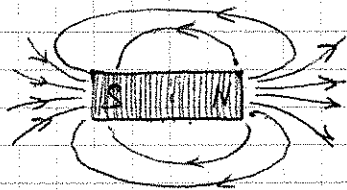
Per il teorema della divergenza questo implica che

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0$$

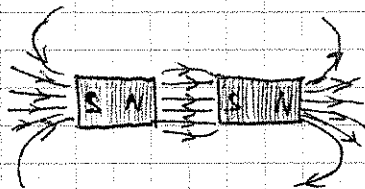
per qualsiasi V . Dunque $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ovunque.

È vero per il campo generato da qualsiasi filo di corrente e, grazie al principio di sovrapposizione, anche da un insieme di fili o da una distribuzione continua di corrente.

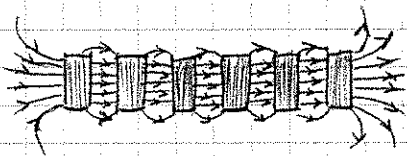
È meno ovvio per i campi prodotti dalle calamite dove non è facile dedurre la forma del campo \vec{B} all'interno delle calamite da misure sperimentali. Quello che sappiamo però, è che il campo attorno ad una calamite ha, più o meno, queste forme



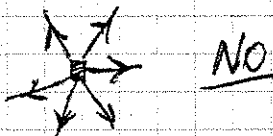
e che spezzando la calamite in due parti diventa



e spezzando ulteriormente



Per quanto si procede non si trova mai un frammento che produce un campo uscente ovunque, o entrante ovunque



Un oggetto del genere si chiamerebbe monopolo magnetico. Un monopolo magnetico non è mai stato osservato! Le linee di forza di \vec{B} si chiudono sempre su se stesse. In sintesi: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ sempre.

Combinando le leggi per la divergenza e il rotore:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

abbiamo un sistema di equazioni differenziali per il campo magnetico $\vec{B}(\vec{r})$. Date la distribuzione di corrente \vec{j} il campo \vec{B} è calcolabile univocamente (a meno di un campo \vec{B}_0 uniforme non significativo).

Esempio: ricaviamo la legge di Biot-Savart per il filo rettilineo a partire dalle due equazioni precedenti.

Conviene lavorare in coordinate cilindriche: $\vec{B} = (B_\perp, B_\theta, B_z)$

Per simmetria dev'essere

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho_\perp)$$

$$\text{ovvero } B_\perp = B_\perp(\rho_\perp); \quad B_\theta = B_\theta(\rho_\perp); \quad B_z = B_z(\rho_\perp).$$

Non ci può essere dipendenza da θ o z .

Inoltre, la \vec{j} è diversa da zero solo nel filo ed è diretta lungo z . Dunque la

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

implica che $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ è diretto lungo z e, di conseguenza, \vec{B} dev'essere \perp a z . $\Rightarrow B_z = 0$

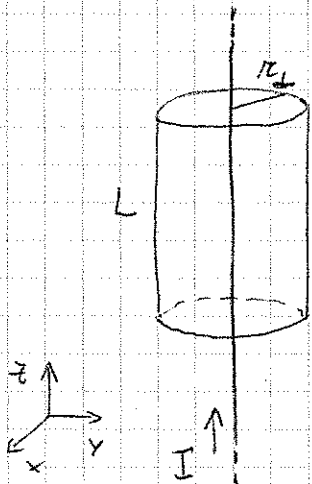
Dunque \vec{B} ha la forma $\vec{B} = \hat{r}_\perp B_\perp(\rho_\perp) + \hat{\theta} B_\theta(\rho_\perp)$

Supponiamo che per un certo valore di ρ_\perp si abbia $B_\perp(\rho_\perp) \neq 0$. Allora prendiamo una superficie di Gauss cilindrica di raggio ρ_\perp come in figura e calcoliamo il flusso di \vec{B}

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = B_\perp(\rho_\perp) 2\pi\rho_\perp L \neq 0$$

Per il teorema della divergenza questo implica che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$ nel cilindro. Ciò viola una delle nostre leggi di partenza. Quindi B_\perp dev'essere nullo sempre: $B_\perp = 0$.

Rimangono solo con $\vec{B} = \hat{\theta} B_\theta(\rho_\perp)$. Possiamo calcolare



B_θ con la legge per il rotore espressa in forma integrale su una superficie con contorno un cerchio di raggio r_\perp :

$$\mu_0 I = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\theta(r_\perp) 2\pi r_\perp$$

$\hookrightarrow \hat{\theta} d\ell$

da cui $B_\theta(r_\perp) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp}$

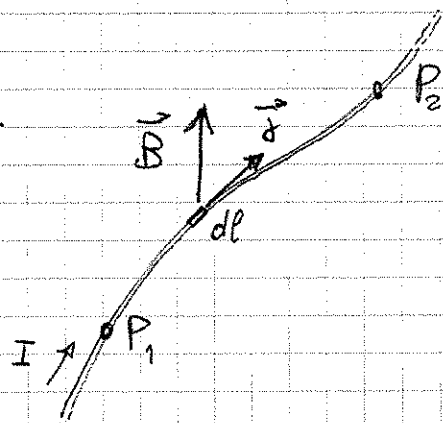
che è la legge di Biot-Savart cercata. Le leggi per la divergenza e il rotore di \vec{B} ci hanno dato la direzione, il verso e il modulo del campo in accordo con gli esperimenti. Questo è vero per qualsiasi campo magnetostatico prodotto da distribuzioni di densità di corrente $\vec{j}(\vec{r})$.

La forza prodotta da \vec{B} su un filo percorso da corrente

A pagina 4.5 avevamo citato due esperimenti chiave: Oersted e Ampère. Poi ci siamo concentrati sulle implicazioni di quello di Oersted. Ora ripartiamo dall'esperimento di Ampère e lo interpretiamo così: un filo percorso da corrente produce un campo \vec{B} nelle sue vicinanze; un altro filo contiene cariche in moto (un'altra corrente) che risentono del campo \vec{B} prodotto dal primo filo. La forza è perpendicolare alla velocità (di deriva delle cariche) e, quindi, perpendicolare al filo. Dato che le cariche non possono uscire dal filo, l'azione combinata delle forze sulle singole cariche si traduce in una forza sul filo stesso.

Cerchiamo di essere più quantitativi.

Consideriamo un filo percorso da corrente. Prendiamo un volumetto di lunghezza $d\ell$. Sia \vec{B} il campo magnetico (generato da altre correnti) nel punto in cui si trova il volumetto. La sezione del filo sia S .



Nel volumetto ci siano ρ portatori di carica per unità di volume, ciascuno con velocità medie (di deriva) \vec{v} . Risentano tutti della stessa forza di Lorentz perpendicolare a \vec{v} . La forza totale che agisce sul volumetto sarà quindi:

$$d\vec{F} = \underbrace{\rho}_{\text{carica nel volumetto}} dV \vec{v} \times \vec{B} = dV \underbrace{\rho \vec{v}}_{I \hat{dl}} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

La forza totale sul tratto di filo da P_1 a P_2 sarà:

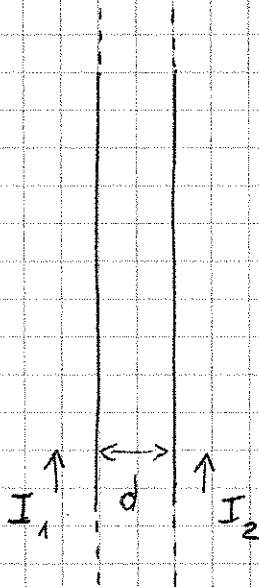
$$\vec{F} = I \int_{P_1}^{P_2} d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Se il filo è rettilineo e il campo è uniforme lungo il filo e perpendicolare ad esso, allora

$$\vec{F} = IBL \hat{n}_\perp$$

↪ vettore perpendicolare sia a \vec{B} che al filo.

Questa espressione è direttamente applicabile alla geometria dell'esperimento di Ampère con i due fili paralleli:



Calcoliamo la forza per unità di lunghezza che agisce sul filo 2 per effetto del campo magnetico prodotto dalle correnti nel filo 1.

Da Biot-Savart, il campo a distanza d dal filo 1 è

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d}$$

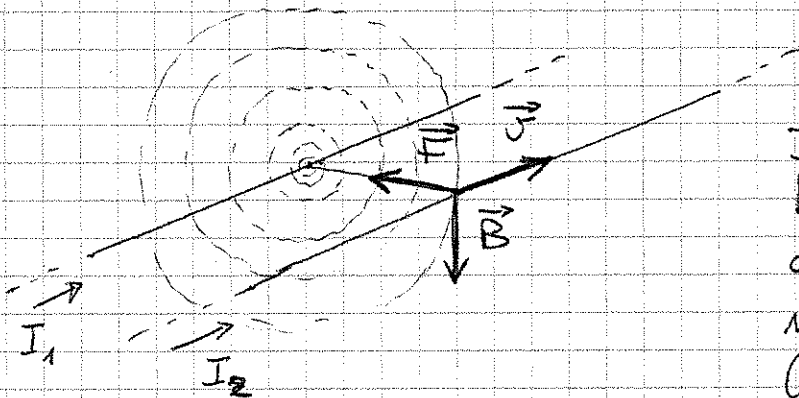
È uniforme lungo tutto il filo 2, è perpendicolare ad esso. Perciò produce una forza perpendicolare sia a \vec{B} (entrante nel foglio nel caso della figura e sinistra) che al filo. È una forza diretta verso

il filo 1 avente modulo

$$|\vec{F}| = I_2 B_1 L = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 L$$

La forza per unità di lunghezza è:

$$\left| \frac{\vec{F}}{L} \right| = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2$$



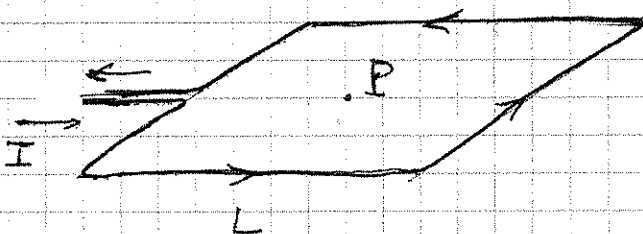
Il ruolo dei fili è interscambiabile. La forza sull'uno o sull'altro è la stessa in modulo e opposte in verso (vale il principio di azione-reazione).

Se cambio il verso di una delle due correnti, cambia il verso di \vec{F} oppure di \vec{B} , in modo che la forza cambia verso. Correnti concordi producono attrazione tra i fili e correnti discordi producono repulsione.

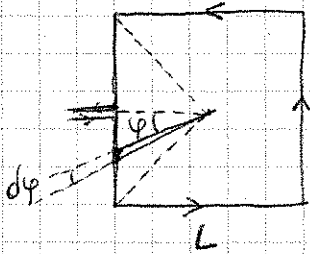
La forza tra fili è facilmente misurabile, con precisione. Per questo motivo nel sistema SI si è scelto di fissare il campione di corrente elettrica sfruttando tali forze. Si definisce la corrente di 1 A come la corrente che circola in due fili paralleli posti ad una distanza di 1 m quando la forza per unità di lunghezza su ciascun filo è 2×10^{-7} N/m.

Il campo \vec{B} prodotto da spire e solenoidi

i) spira quadrata di lato L percorsa da corrente I .



Calcoliamo il campo \vec{B} al centro delle spire.



Ciascun lato contribuisce in modo uguale al campo \vec{B} al centro, con un campo sempre perpendicolare al piano della spira (uscire dal foglio, secondo la regola della mano destra).

Per calcolare il contributo di ciascun tratto di spira basta seguire la procedura di calcolo di p. 4.7 e 4.8, salvo che gli angoli estremi, invece di essere $\pm \frac{\pi}{2}$, valgono $\pm \frac{\pi}{4}$.

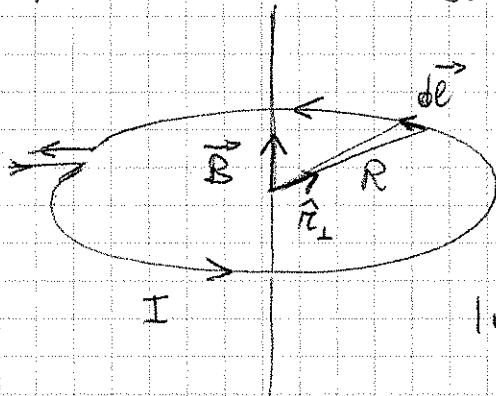
Dunque

$$|\vec{B}| = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi r_{\perp}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dl \cos\varphi = \frac{2\mu_0 I}{\pi L} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} ds \sin\varphi$$

\swarrow
 4 lati
 \swarrow
 $r_{\perp} = \frac{L}{2}$

$$= 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{\pi L}$$

ii) spira circolare di raggio R percorsa da corrente I



Calcoliamo \vec{B} al centro.

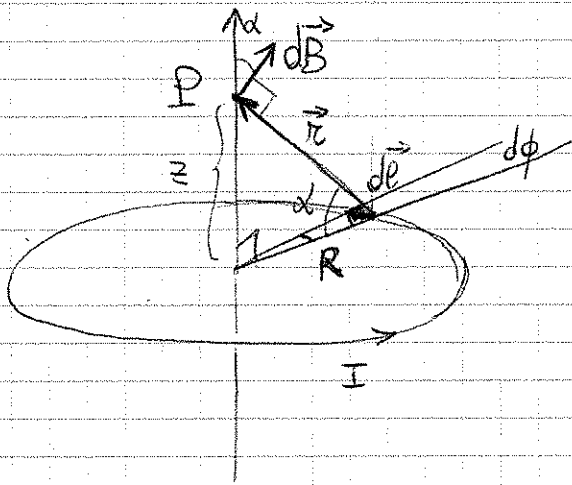
Di nuovo il campo \vec{B} sarà perpendicolare al foglio. Il contributo del tratto dl è

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}_{\perp}|}{R^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}$$

È lo stesso per tutti i dl lungo la circonferenza. Dunque

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint_{\text{circonf.}} dl = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Il campo \vec{B} può essere calcolato facilmente anche lungo tutta l'asse verticale passante per il centro.



Calcoliamo il campo \vec{dB} nel punto P dovuto al tratto di spira $d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

Qui \vec{r} è il vettore che va da $d\vec{l}$ fino a P; \vec{r} e $d\vec{l}$ sono perpendic.

Il campo $d\vec{B}$ è perpendicolare sia a \vec{r} che a $d\vec{l}$, come in figura. Il modulo è

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(R^2 + z^2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{R^2 + z^2} d\phi$$

essendo $dl = R d\phi$ e $r^2 = R^2 + z^2$.

Per simmetria le componenti perpendicolari all'asse z si annullano quando si fa la somma dei contributi dei vari $d\vec{l}$ sulle circonferenze. Rimangono solo le componenti z di $d\vec{B}$, che si sommano così:

$$B_z = \int dB_z = \int |d\vec{B}| \cos\alpha$$

$$\text{Ma } \cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Quindi

$$B_z = \int |d\vec{B}| \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int d\phi$$

angolo giro = 2π

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Per $z=0$ si ottiene $B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$ come prima.

Invece per $z \gg R$ si ha

$$B_z \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 I A}{2\pi z^3}$$

dove $A = \pi R^2$ è l'area del cerchio. Questo risultato è interessante

perché ci permette di sviluppare un'analogia con il dipolo elettrico. Torniamo a p. 1.13, dove avevamo il campo elettrico asintotico prodotto da un dipolo lungo il suo asse

$$E_z \cong \frac{2Qd}{4\pi\epsilon_0 z^3}$$

A p. 1.44 poi avevamo definito un momento di dipolo elettrico

$$\vec{p} = Qd \hat{z}, \text{ in modo che}$$

$$E_z \cong \frac{2|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0 z^3}$$

In modo analogo definiamo qui un momento di dipolo magnetico

$$\vec{m} = IA \hat{n}$$

\hat{n} → vettore normale alla spira
 A → area della superficie avente la spira come contorno.

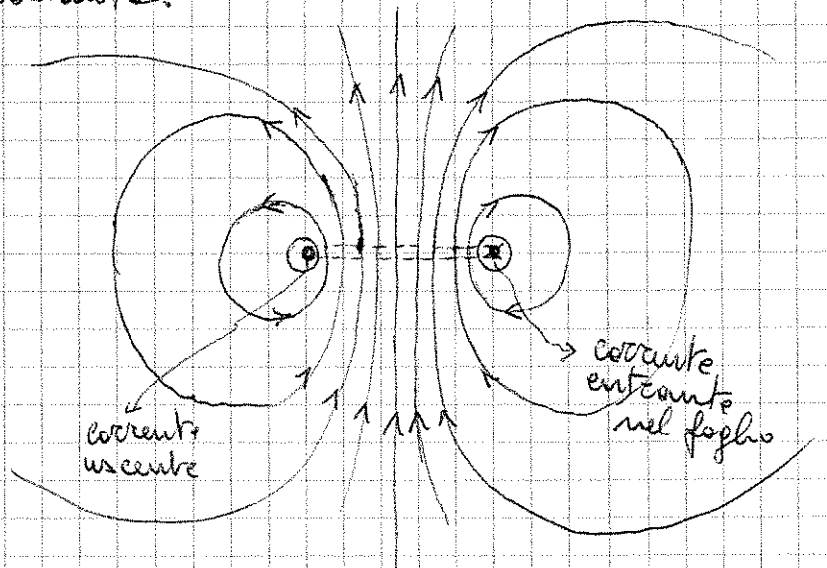
In questo modo possiamo scrivere

$$B_z \cong \frac{\mu_0 2|\vec{m}|}{4\pi z^3}$$

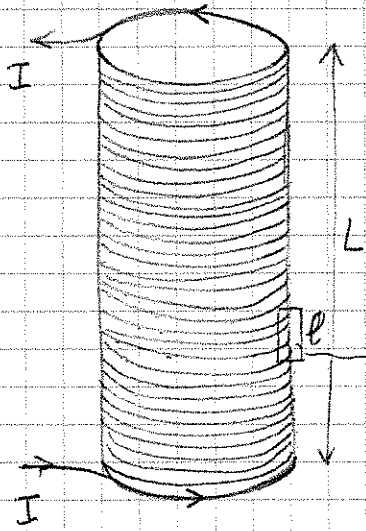
Le due espressioni per E_z e B_z hanno la stessa forma, salvo sostituire $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$ e $\vec{p} \leftrightarrow \vec{m}$.

Torneremo più avanti su questa analogia quando parleremo di magnetizzazione di una sostanza.

Il campo \vec{B} prodotto dalla spira circola in tutto lo spazio e fatto qualitativamente come nella figura a destra, dove la spira è rappresentata in sezione essendo posta \perp al foglio. Il campo ha simmetria assiale.



iii) mettendo una spira sopra l'altra si ottiene un solenoid

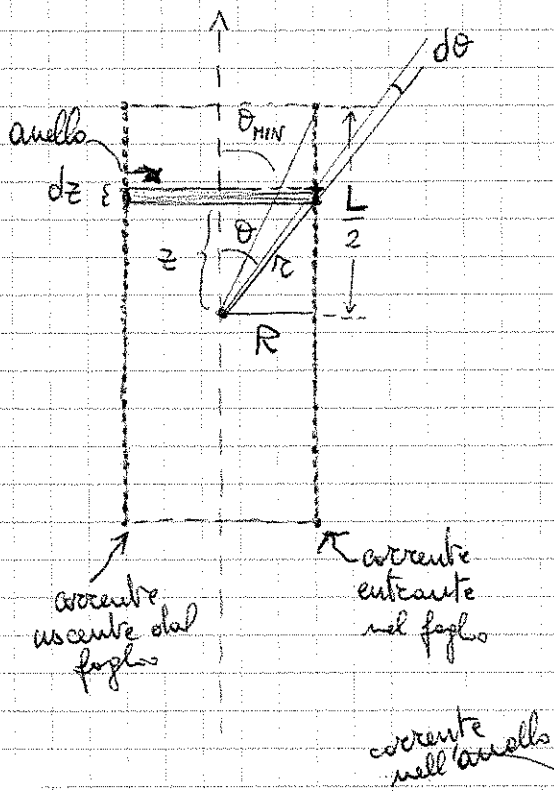


N spire consecutive

$$n = \frac{N}{L} \text{ spire per unit\`a di lunghezza}$$

in questo tratto di lunghezza l ci sono nl spire e passa una corrente pari a I volte il numero di spire, cos\`e nlI .

Calcoliamo prima il campo \vec{B} al centro del solenoide.



Per ragioni di simmetria il campo al centro \`e diretto lungo z . \`E la somma dei campi prodotti dalle spire. Possiamo considerare l'anello di spessore dz come un'unica spira in cui fluisce la corrente $ndzI$

se n \`e la densit\`a di spire. Il suo contributo al campo B_z totale puo\` essere scritto usando il risultato di p. 4.20 per il campo sull'asse di una spira:

contributo dell'anello $\rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I dz n}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I n R^2}{2R^3} dz$

Si tratta di sommare i contributi degli anelli con z compreso tra $-L/2$ e $+L/2$. Notiamo che, per simmetria, il contributo per $z < 0$ \`e uguale a quello per $z > 0$. Dunque il B_z totale \`e

$$B_z = 2 \int_0^{L/2} dz \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \mu_0 I n \int_0^{L/2} \frac{dz}{r} \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Abbiamo scelto l'integrale in questo modo perché ora è semplice vedere che

$$\frac{R}{r} = \sin \theta \quad \text{e} \quad dz \sin \theta = -r d\theta$$

↳ θ crescente implica z decrescente

Quindi

$$B_z = -\mu_0 I n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{\text{MIN}}} d\theta \sin \theta = \mu_0 I n \cos \theta_{\text{MIN}}$$

con $\cos \theta_{\text{MIN}} = \frac{L/2}{\sqrt{R^2 + (L/2)^2}}$

Un limite molto interessante si ottiene per solenoidi infiniti ($L \gg R$).
In tal caso il campo al centro vale

$$B_z = \mu_0 I n$$

dato che $\theta_{\text{MIN}} \rightarrow 0$ e $\cos \theta_{\text{MIN}} \rightarrow 1$. Notiamo anche che, se il solenoide è infinitamente lungo, non ha alcun senso specificare la posizione del "centro" lungo l'asse z . Il sistema è invariante per traslazioni lungo z e anche per rotazioni attorno ad esso. Il campo \vec{B} può solo dipendere dalla distanza dall'asse. Quindi, lungo l'asse z il campo è costante, e detto come \vec{z} e vale $B_z = \mu_0 I n$.

Possiamo dire molto di più sul campo \vec{B} del solenoide infinito.

Prendiamo ad esempio la $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Dato che \vec{j} è un vettore non nullo solo sulla superficie cilindrica del solenoide ed è diretto nel piano delle spire, perpendicolare all'asse z , allora

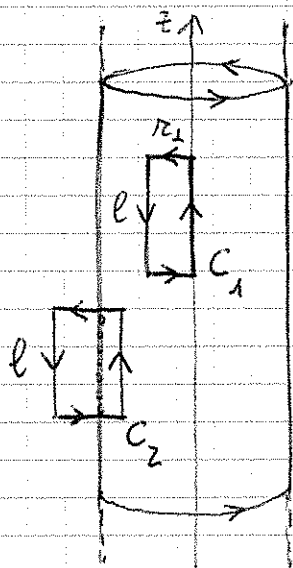
$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = 0$$

e questo è vero se \vec{B} è diretto lungo z ovunque!

$$\vec{B} = \hat{z} B_z$$

non solo lungo l'asse del solenoide. Inoltre già sappiamo che

B_z non può dipendere da altro se non dalla distanza dall'asse, r_\perp .
 Per fissare tale dipendenza usiamo la legge di Ampère con questi due circuiti, C_1 e C_2 :



Per il circuito C_1 si ha

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{e} = 0$$

dato che non ci sono correnti concatenate.
 La circuitazione è semplice da esprimere, dato che \vec{B} è \perp ai lati orizzontali e costante lungo quelli verticali:

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{e} = l(B_z(0) - B_z(r_\perp))$$

La legge di Ampère ci dice quindi che $B_z(r_\perp) = B_z(0) = \mu_0 n I$

Questo è vero per qualsiasi r_\perp minore del raggio R del solenoide.

già calcolato prima.

Concludiamo che all'interno del solenoide il campo \vec{B} è uniforme, diretto lungo z e con modulo $\mu_0 n I$.

Ora usiamo il circuito C_2 . Stavolta c'è una corrente concatenata pari a $n l I$, essendo n la densità di spire. Quindi

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 n l I$$

D'altra parte $\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{e} = l (B_{z \text{ interno}} - B_{z \text{ esterno}})$

perciò $B_{z \text{ interno}} - B_{z \text{ esterno}} = \mu_0 n I$

Ma avevamo già calcolato $B_{z \text{ interno}} = \mu_0 n I$. Se ne deduce che

$$B_{z \text{ esterno}} = 0$$

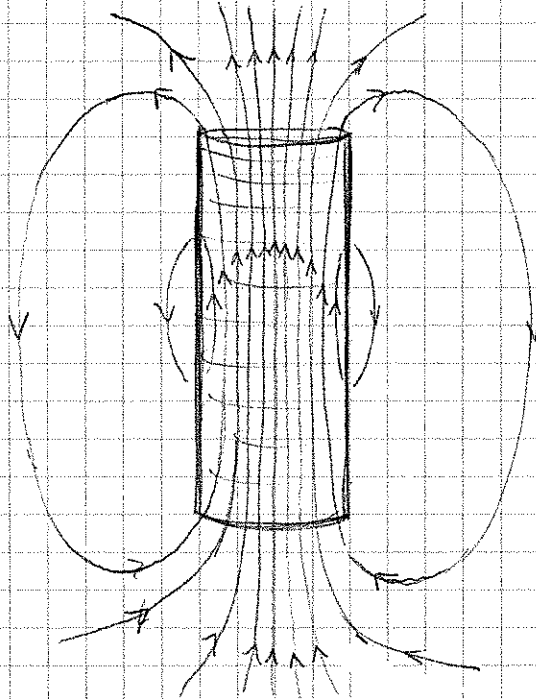
ovunque all'esterno del solenoide!

Un solenoide infinito produce un campo uniforme

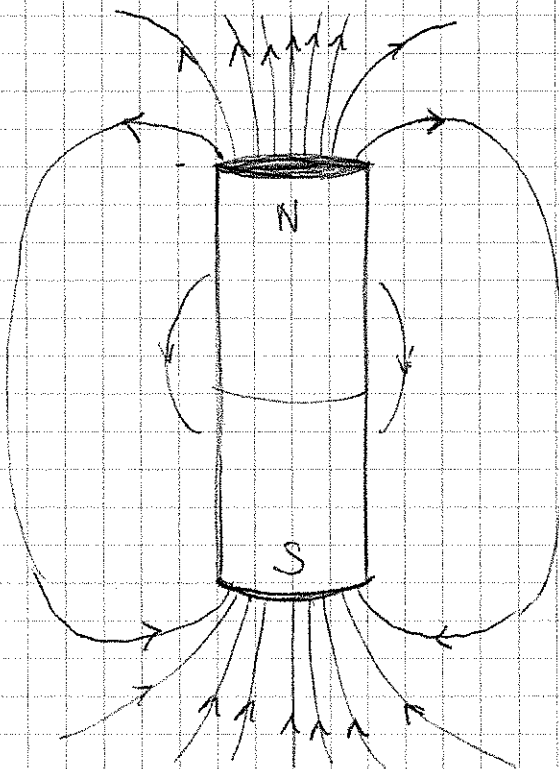
$$B = \mu_0 I n$$

al suo interno, mentre all'esterno $B = 0$.

Se il solenoide è di lunghezza finita si avrà una situazione simile a quella del solenoide infinito, almeno nella parte centrale, lontana dai bordi, con linee di forza che escono ai bordi, più o meno così:

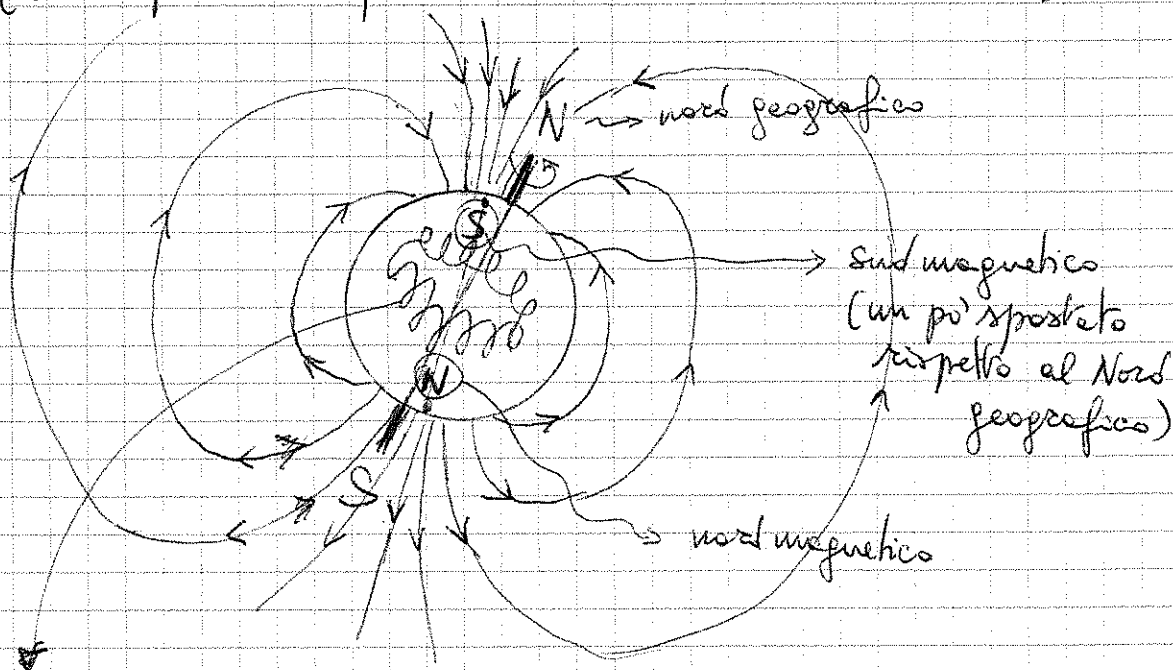


È molto simile alla forma del campo prodotto da un magnete permanente (calamita) al suo esterno.



Questo fa pensare che i materiali magnetici con cui si producono le calamite possano manifestare correnti elettriche simili a quelle del solenoide. Sono strane correnti. Ne parleremo più avanti ma già si intuisce dove si va e parare...

Infine notiamo che anche il pianeta terra, come la maggior parte dei pianeti, produce un suo campo magnetico. La forma è simile, ma non coincidente, con quella di un dipolo magnetico (una specie di spirale di corrente interne alla terra).



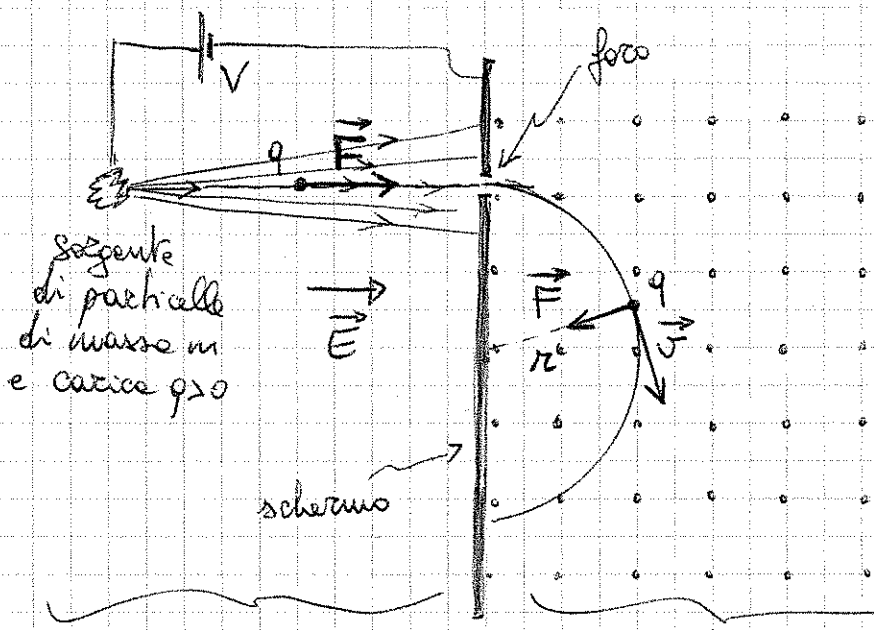
Le correnti elettriche all'interno della terra sono associate e mosse su vaste scale dalle parti fluide interne (nucleo fluido e mantello) contenenti miscele di metalli, con coriche elettriche trascinate su orbite complicate per effetto combinato di moti discendenti-ascendenti e forze di Coriolis.

Moto di una particella carica in un campo magnetico

Abbiamo già detto che una particella carica, con carica q , in un campo elettrico \vec{E} e un campo magnetico \vec{B} risente delle forze di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

dove \vec{v} è la velocità della particella. Note la massa m , si può calcolare l'accelerazione e risolvere l'equazione del moto. Vediamo un esempio significativo.



In questa zona vi sia un campo \vec{E} che accelera le particelle, da velocità quasi nulla fino ad una velocità v . La differenza di potenziale tra sorgente e foco sia V .

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

moto uniformemente accelerato
Velocità al foco; si può trovare con la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

$$\text{ovvero } v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

In questa zona vi sia un campo magnetico (uscite dal foglio) che le devia.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

perpendicolare a \vec{v} e \vec{B} .
Si ha accelerazione centripeta.
 $|\vec{v}|$ non cambia. Il moto è circolare uniforme.

$$a_c = \frac{qvB}{m}$$

$$\text{essendo } a_c = \frac{v^2}{r} \rightarrow \text{raggio dell'orbita}$$

$$\text{Da cui } r = \frac{mv}{qB}$$

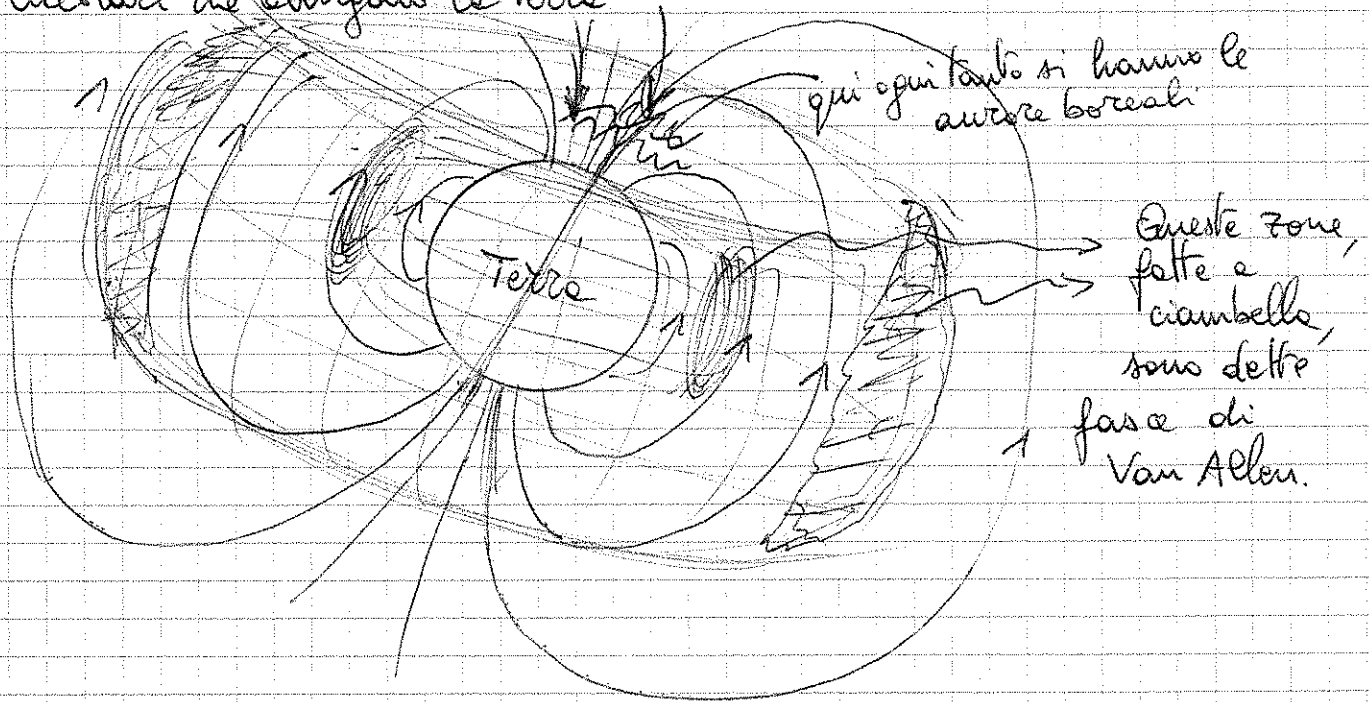
Possiamo esprimere il raggio dell'orbita in termini di V e B :

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2V}{B^2} \left(\frac{m}{q}\right)}$$

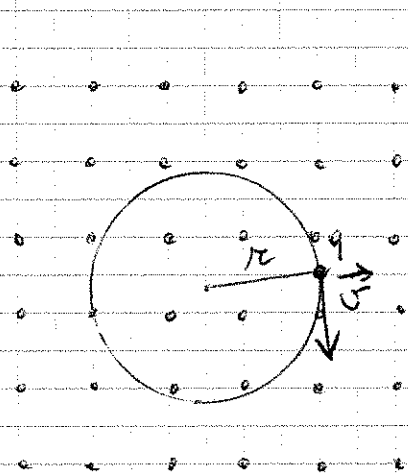
Assoguai V e B il raggio dell'orbita dà informazioni dirette sul rapporto carica/massa delle particelle.

È il meccanismo base degli spettrometri di massa, per la selezione di specie atomiche, isotopi, particelle varie...

Un processo simile avviene anche per il vento solare, composto da particelle cariche (protoni, elettroni e qualche ione) che il sole irradia in tutte le direzioni a grande velocità. Parte di queste particelle vengono intrappolate dal campo magnetico terrestre su orbite più o meno circolari che avvolgono la Terra.



Il moto circolare di una particella carica in un campo magnetico uniforme è detto moto ciclotronico.



→ campo \vec{B} uscente

Come abbiamo già visto, il raggio dell'orbita e^-

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La velocità angolare e^-

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

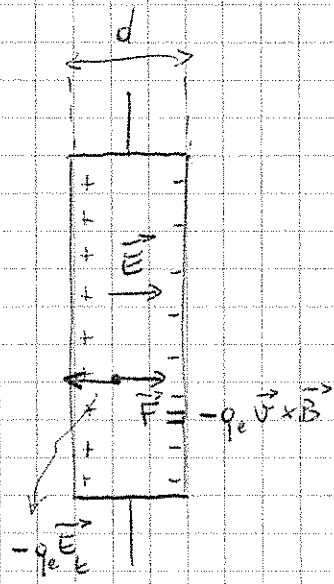
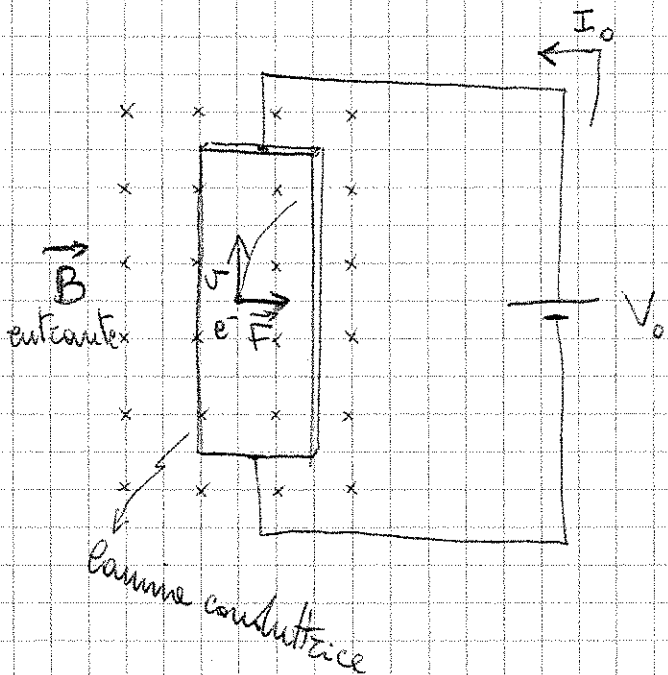
La frequenza $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$ è detta frequenza di ciclotrone.

Applicazioni: acceleratori di particelle
confinamento magnetico

Effetto Hall

$$q = -q_e \quad q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

I portatori di carica (elettroni) si muovono nel verso opposto a I_0 , avendo carica negativa, con velocità di deriva \vec{v} . \Rightarrow Risultano delle forze di Lorentz, che per la parte davanti a \vec{B} corrisponde ad una forza laterale (verso destra)



gli elettroni si spostano mediamente verso destra, provocando uno sbilanciamento di cariche + e - ai lati della lamina.

Cio produce un campo elettrico. All'equilibrio, in condizioni di corrente stazionaria, la forza laterale dovuta a \vec{B} dev'essere equilibrata dal campo \vec{E} indotto. $\Rightarrow |\vec{E}_E| = vB$
↳ trasverso

Un tale \vec{E} uniforme equivale ad una differenza di potenziale V , tra i lati della lamina, pari a

$$V_E = |\vec{E}_E| d = vBd$$

Ora ricordiamo che $v = \frac{|\vec{j}|}{nq}$
↳ densità di corrente
↳ carica dei portatori
↳ densità di portatori

e scriviamo il potenziale trasverso così

$$V_t = \frac{|\vec{j}| B d}{n q_e}$$

queste V_t è misurabile

Si tratta dell'effetto Hall!

Esercizio sull'effetto Hall

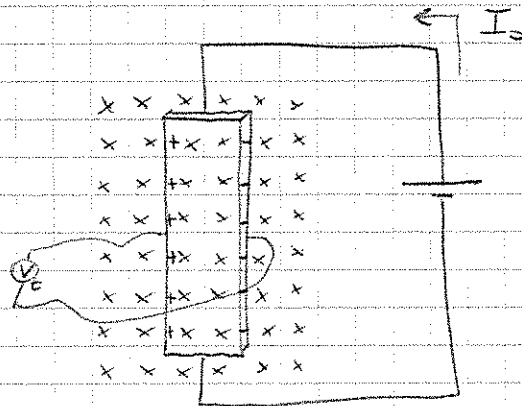
Stiscia di alluminio (2.7 g/cm³) di larghezza
d = 1 cm e spessore h = 0.5 mm

$$I_0 = 9.6 \text{ A}$$

$$B = 0.5 \text{ T}$$

Si misura

$$V_t = 1 \mu\text{V}$$



Determinare il numero di elettroni di conduzione
per atomo di Al. (noto il peso atomico = 27
e $N_A = 6.02 \times 10^{23}$)

Usiamo la relazione in alto per la differenza di
potenziale trasverso nell'effetto Hall

$$V_t = \frac{|\vec{j}| B d}{n q_e}$$

sapendo che la sezione della lamina è $h d$

e la corrente (assumendo \vec{j} uniforme) è

$$I_0 = |\vec{j}| h d$$

da cui

$$V_t = \frac{I_0 B d}{h d n q_e} = \frac{I_0 B}{n q_e h}$$

Riscritta per la densità dei portatori,

$$n = \frac{I_0 B}{q_e h V_t} = \frac{8.6 \times 0.5}{1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-4} \times 10^{-6}} \text{ m}^{-3} = 6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \\ = 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

Quanti atomi per cm^3 ? Si ricava dal peso atomico:

27g di Al sono pari a 6.02×10^{23} atomi (numero di Avogadro)

dunque 1 atomo: $m \approx \frac{27g}{6.02 \times 10^{23}}$

2.7 g/cm³ corrisponde a $1/10$ di mole per cm^3 , ovvero 6×10^{22} atomi per cm^3 .

Abbiamo così trovato che la densità di portatori è uguale alla densità di atomi. \Rightarrow ogni atomo fornisce 1 elettrone di conduzione.

Potenziale vettore

Finora, in estrema sintesi, abbiamo le forze di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

le leggi dell'elettostatica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

e le leggi della magnetostatica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Nel caso del campo elettrico \vec{E} avevamo visto che l'irrotazione
 del campo, espressa dalle $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, ci permette di
 introdurre un potenziale scalare φ tale che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

In tal modo il problema può essere riformulato come calcolo
 di φ data una distribuzione di cariche ρ , che è un problema
 spesso più semplice rispetto al calcolo di \vec{E} diretto.

Le proprietà di \vec{B} permettono di procedere in modo analogo?

Non del tutto. Il campo \vec{B} non è irrotazionale e, quindi non
 si può definire un potenziale magnetico scalare come φ . Si
 può procedere però in modo un po' diverso, definendo un poten-
 ziale vettoriale. Vediamo come.

Si parte da $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

e si nota che il rotore di qualsiasi campo vettoriale è un
 campo a divergenza nulla. Dimostriamo prima questo.

Sia \vec{A} un campo vettoriale generico. Dimostriamo che

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

Per componenti:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_z - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} A_y + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} A_x - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} A_z \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} A_y - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} A_x \end{aligned}$$

L'ordine di derivazione nelle derivate miste può essere scambiato
 e piacere (commutano le derivate). Annidati nelle somme

ci sono 3 coppie di derivate che si cancellano e viceversa, dimostrando così quanto si voleva.

Se scriviamo $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

siamo automaticamente sicuri che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ è zero sempre, indipendentemente dalla scelta di \vec{A} .

D'altra parte \vec{B} deve soddisfare anche la legge di Ampère. Questo ci dà un vincolo sulla natura del campo \vec{A} . Infatti dev'essere

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

Questa può essere riscritta in forma diversa sapendo che

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

valida per qualsiasi \vec{A} . Questa relazione si dimostra facilmente per tre vettori cartesiani generici \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Lo dimostriamo per componenti. La componente x :

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_x = a_y (b_x c_z) - a_z (b_y c_x)$$

$$= a_y (b_x c_z - b_z c_x) - a_z (b_y c_x - b_x c_z)$$

$$= a_y b_x c_z - a_y b_z c_x - a_z b_y c_x + a_z b_x c_z$$

$$= a_y b_x c_z - a_y b_z c_x - a_z b_y c_x + a_z b_x c_z$$

$$+ a_x b_x c_x - a_x b_x c_x$$

$$= b_x (a_y c_z + a_z c_y) - (a_y b_z + a_z b_y) c_x$$

$$= b_x (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_x$$

Risultato analogo per le componenti y e z . Se poi sostituiamo

$$\begin{aligned}\vec{a} &\rightarrow \vec{\nabla} \\ \vec{b} &\rightarrow \vec{\nabla} \\ \vec{c} &\rightarrow \vec{A}\end{aligned}$$

badando di mantenere l'ordine dei termini, ritroviamo proprio la relazione

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

e la legge di Ampère diventa

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

che va intesa come espressione sintetica di 3 equazioni per le componenti

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_x = \mu_0 j_x \\ \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_y = \mu_0 j_y \\ \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 A_z = \mu_0 j_z \end{cases}$$

Il problema appare ancora complicato. Tuttavia possiamo lavorare ancora sulla scelta di \vec{A} .

Ricordiamo che anche con il potenziale φ avevamo una certa libertà: possiamo aggiungere un potenziale costante

$$\varphi' = \varphi + c \quad c, \text{ costante}$$

senza modificare \vec{E} , dato che $\vec{E}' = -\vec{\nabla} \varphi' = -\vec{\nabla} \varphi = \vec{E}$ e $\vec{\nabla} c = 0$. Abbiamo una simile libertà per A . In particolare possiamo aggiungere ad \vec{A} il gradiente di una funzione scalare qualsiasi f :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

e il campo \vec{B} che si ottiene è lo stesso. Infatti:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)}_{\text{sempre zero}} = \vec{B}$$

Siamo liberi di scegliere \vec{A} come piace a noi. Questa libertà di scelta è detta scelta di gauge. Se ne possiamo fare diverse, senza che cambi la fisica (la fisica sta nel campo magnetico).

Nel nostro caso magnetostatico la scelta di gauge più conveniente consiste nel prendere \vec{A} tale che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Così facendo, semplifichiamo notevolmente le equazioni di prima, ottenute dalle leggi di Ampère. Abbiamo infatti:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Per componenti:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \end{cases}$$

Ognuna di queste ha la forma dell'equazione di Poisson che avevamo già scritto per il potenziale elettrico

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$$

In sintesi, un campo vettoriale \vec{A} tale che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{scelta di gauge})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

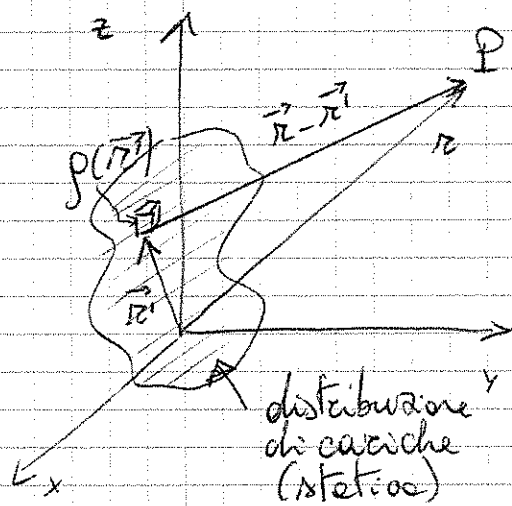
è detto potenziale vettore. Ha un ruolo analogo a quello di φ , salvo che si tratta di un campo vettoriale anziché scalare e il significato fisico è diverso.

Il fatto che si sia ottenute un'equazione (anzi, 3 equazioni) di tipo Poisson, permette di utilizzare soluzioni note dell'ele

tecnica per scrivere direttamente soluzioni delle magnetostatiche.

Esempio: distribuzione di correnti con densità $\vec{j}(\vec{r})$ limitata in una certa regione di spazio

Equivalente a: distribuzione di cariche di densità ρ



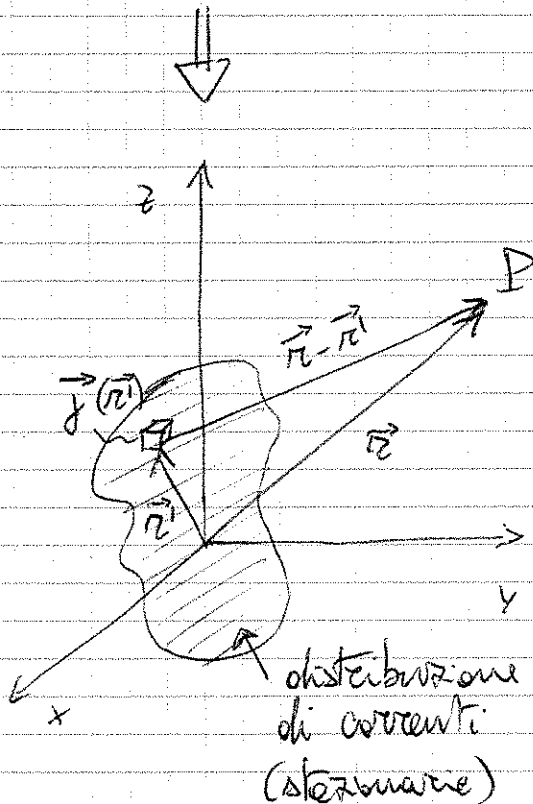
$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$$

con condizione al contorno

$$\varphi \rightarrow 0 \text{ per } |\vec{r}| \rightarrow \infty$$

Soluzione nota:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x$$

con condizione al contorno

$$A_x \rightarrow 0 \text{ per } |\vec{r}| \rightarrow \infty$$

Soluzione presa da sopra, con le sostituzioni

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu ; \rho \rightarrow j_x$$

Quindi

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{j_x(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Stessa forma anche per A_y e A_z .

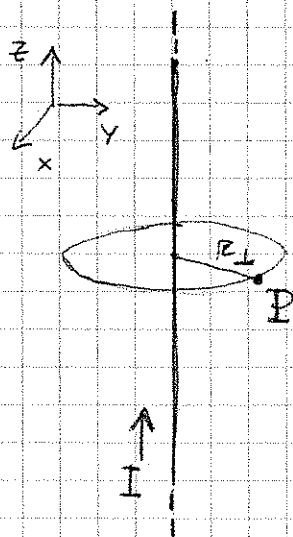
Abbiamo trovato \vec{A} senza fare calcoli.

Commento: ai fini pratici c'è una differenza rilevante. Il potenziale φ è uno scalare e l'equazione da risolvere è una sola. Poi basta prendere il gradiente per avere \vec{E} . Il potenziale vettore ha tre componenti scalari e le equazioni da risolvere sono 3. Poi c'è da prendere il rotore per ottenere \vec{B} . Non è una semplificazione riguardo al calcolo diretto di \vec{B} !

Tuttavia, l'uso di φ e \vec{A} al posto di \vec{E} e \vec{B} diventa importante in vista di formulazioni moderne dei problemi elettodinamici (meccanica quantistica, formulazioni Lagrangiane o Hamiltoniane, ecc.). Meglio tenersi pronti...

Esercizio

Calcoliamo il potenziale vettore \vec{A} per un filo rettilineo infinito percorso da corrente I .



La densità di corrente \vec{j} è diversa da 0 solo nel filo, dove lo possiamo considerare costante diretta lungo z e con modulo I/S se S è la sezione del filo.

Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Ma se \vec{j} è solo lungo z , possiamo limitarci alla soluzione di

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z$$

con la condizione $A_z \rightarrow 0$ per $r_\perp \rightarrow \infty$.

Questa equazione è formalmente identica alla legge di Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$$

per un filo uniformemente carico. La soluzione l'averanno già trovata a p. 1.51:

$$\varphi(r_\perp) = \varphi_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r_\perp$$

↪ costante arbitraria

con la densità lineare di carica, λ , che qui possiamo scrivere come $\lambda = \rho S$. Da cui

$$\varphi(r_{\perp}) = \varphi_0 - \frac{\rho S}{2\pi\epsilon_0} \log r_{\perp}$$

Ora, confrontando l'equazione per A_z e quella per φ , vediamo che le sostituzioni da fare sono

$$\varphi \rightarrow A_z$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j$$

Dunque

$$A_z(r_{\perp}) = A_{z0} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log r_{\perp}$$

Questo è il risultato. La corrente nel filo dà luogo ad una componente z del potenziale vettore, proporzionale al logaritmo della distanza dal filo.

Il risultato dev'essere consistente con la legge di Biot-Savart. Dimostreremo ricorrendo alla definizione

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{pmatrix}$$

$$\text{ovvero } B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} ; B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} ; B_z = 0$$

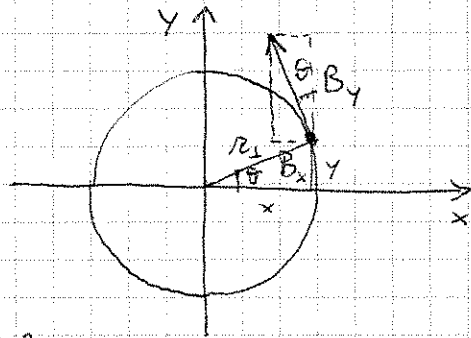
Dato che $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, si può scrivere

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial r_{\perp}}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r_{\perp}^2}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r_{\perp}^2}$$

$$\text{da cui } B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r_{\perp}^2} ; B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r_{\perp}^2}$$

Un campo con queste componenti è tangente al cerchio di raggio r_{\perp}



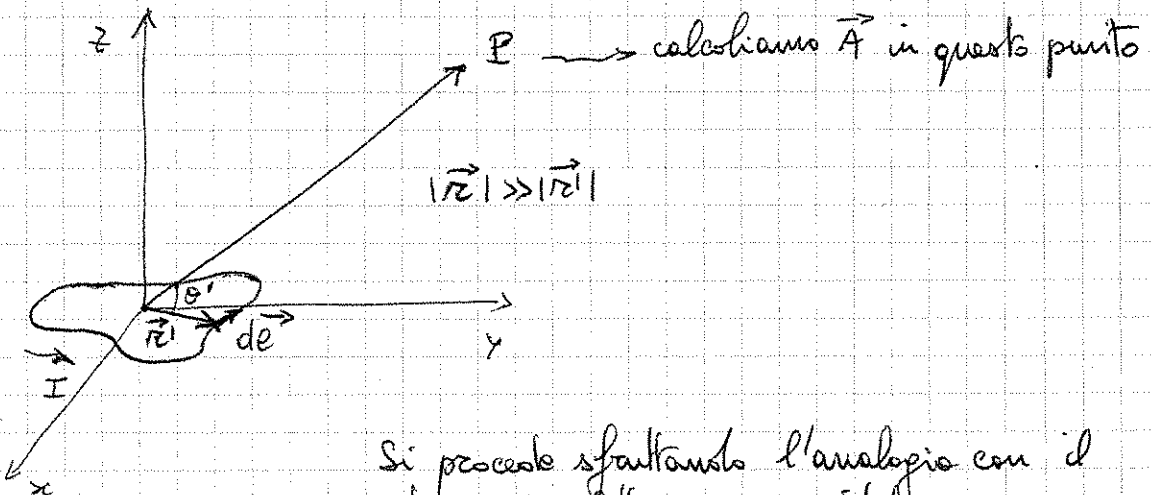
$$\cos \theta = \frac{x}{r_{\perp}} ; \quad \sin \theta = \frac{y}{r_{\perp}}$$

e il suo modulo è

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_{\perp}^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{\perp}} \rightarrow \text{è Biot-Savart come volevamo.}$$

Esercizio

Campo asintotico prodotto da una spira di forma qualsiasi. Sviluppo in multipoli.



Si procede sfruttando l'analogia con il potenziale elettrico φ asintotico per una distribuzione di carica di densità ρ uniforme nel filo. La soluzione deve avere le stesse forme.

Basta prendere φ generale, scatta a p. 1.40

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e sostituire $\frac{1}{\epsilon_0}$ con μ_0 , $\rho(\vec{r}')$ con $\vec{j}(\vec{r}')$. Inoltre il volume V è semplicemente il volume occupato dal filo. Se la sua sezione è S , allora si può scrivere

$$dV' \vec{j}(\vec{r}') = S d\vec{l}' j(\vec{r}') = I d\vec{l}'$$

Quindi si ha

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{spira}} \frac{d\vec{e}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ora ricordiamo lo sviluppo di $\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$ per $|\vec{r}'| \gg |\vec{r}'|$, già calcolato a p. 2.31.

Si evca:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint d\vec{e}'}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \oint d\vec{e}' r' \cos\theta'}_{\text{dipolo}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \oint d\vec{e}' \left(\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\right) r'^2}_{\text{quadrupolo}} + \dots \right]$$

Il primo addendo in parentesi, corrispondente al termine di monopolo magnetico, risulta sempre nullo (è la somma vettoriale dei $d\vec{e}'$ su un percorso chiuso), consistentemente con il fatto che non esistono monopoli magnetici. Il primo termine non nullo è il termine di dipolo magnetico.