

5 FENOMENI DI INDUZIONE ED EQUAZIONI DI MAXWELL

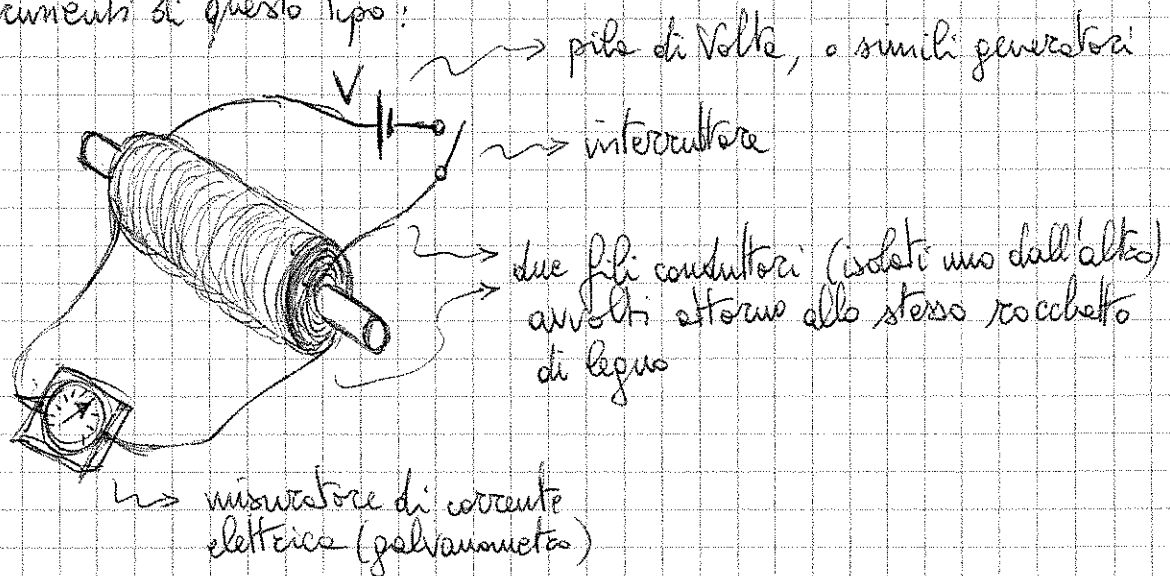
Faraday e le correnti indotte

Punto di partenza:

cariche in moto $\rightarrow$ forze magnetiche

magneti in moto $\rightarrow$ forze elettriche?

Esperimenti di questo tipo:



Si osserva che:

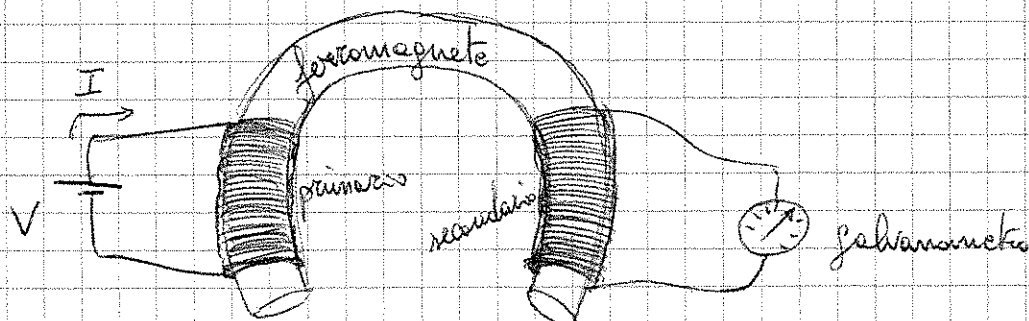
i) se V è costante e l'interruttore è chiuso nel circuito primario (quello con il generatore) scorre corrente costante, ma nel secondario non si misura alcuna corrente.

$\Rightarrow$ una corrente stazionaria non induce correnti in fili vicini

ii) se V varia nel tempo, oppure se V è costante ma si apre o si chiude l'interruttore, allora il galvanometro sul circuito secondario segue un passaggio di corrente.

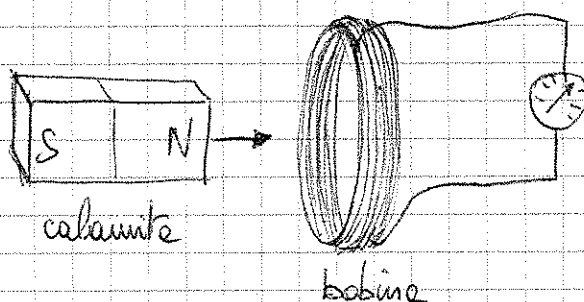
$\Rightarrow$ una corrente che varia nel tempo induce corrente in fili vicini!

Stesse osservazioni anche se i due circuiti non sono avvolti sullo stesso rocchetto, ma così:



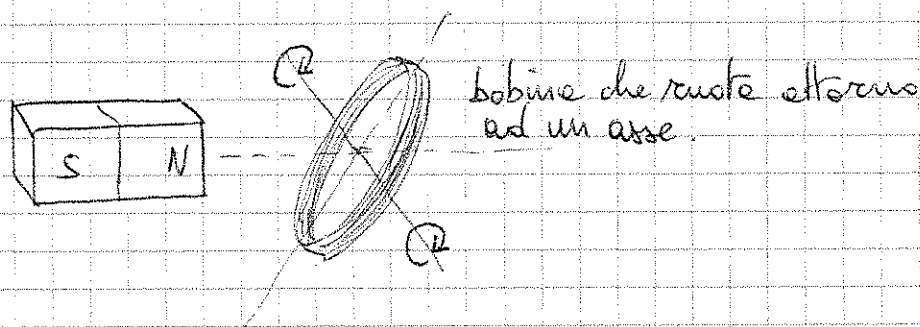
$V(t) \rightarrow I(t)$ nel primario $\rightarrow$ corrente indotta nel secondario

Oppure questo:



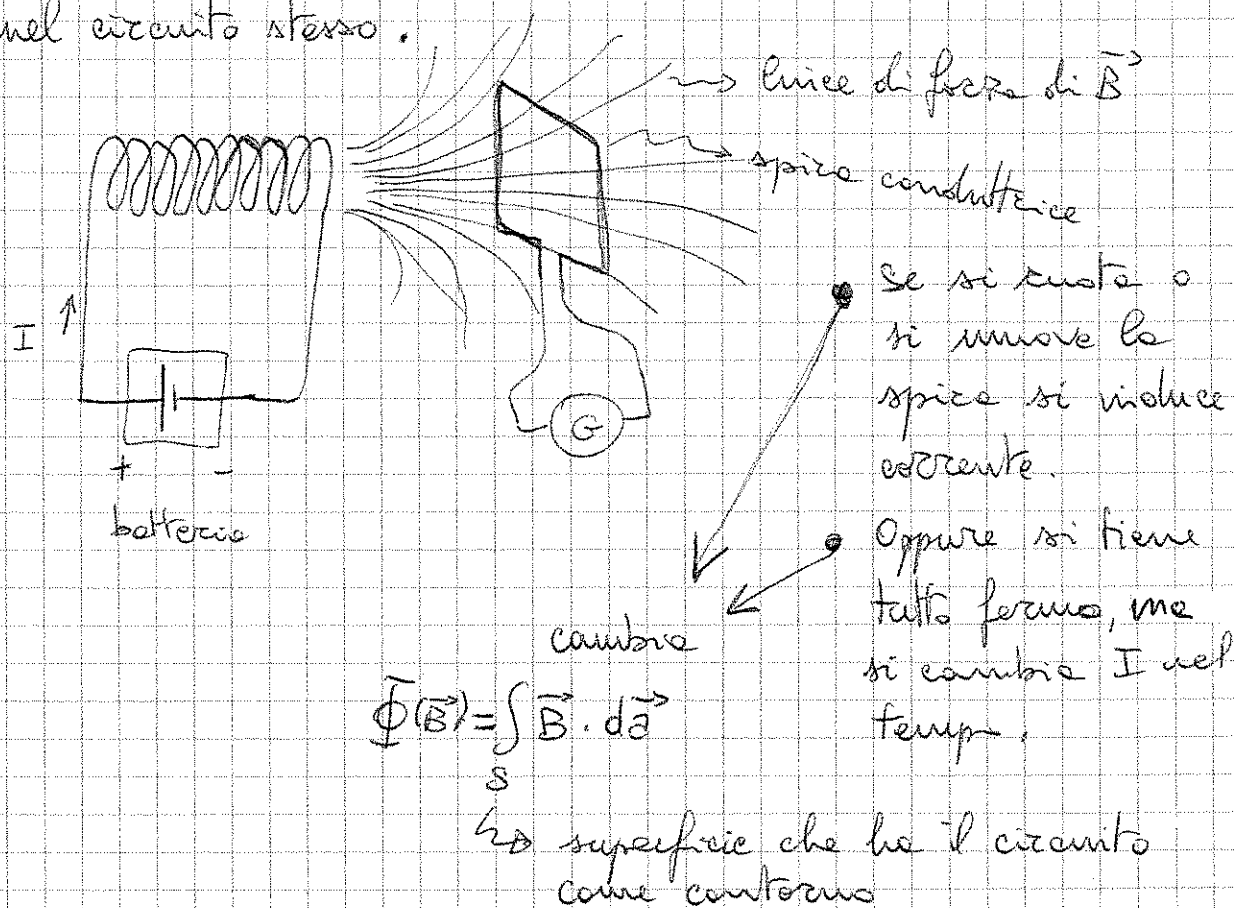
- i) se la distanza tra calamite e bobina è tenuta costante, allora il galvanometro non registra alcuna corrente
- ii) se la calamite si avvicina alla bobina (o la bobina alla calamite) allora il galvanometro segna un passaggio di corrente durante il movimento
- iii) la corrente indotta cambia verso se si inverte il senso del movimento, oppure se si inverte la polarità delle calamite.

Anche questo:



Tenendo fissa la distanza tra calamite e centro della bobina, ma facendo ruotare la bobina si trova una corrente indotta che varia sinusoidalmente nel tempo (corrente alternata).

Tutte le osservazioni sono compatibili con l'ipotesi che una variazione ^{nel tempo} del flusso del campo magnetico $\vec{B}$ concatenato al circuito (prodotto da altre correnti o da calamite) genera una corrente indotta nel circuito stesso.



Se $\Phi(\vec{B})$ varia nel tempo $\Rightarrow$ corrente indotta.

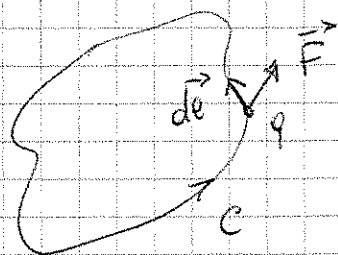
Per essere più quantitativi ci serve il concetto di forza elettromotrice, f.e.m.

Fissato un tempo t , consideriamo il campo elettrico e/o magnetico in quell'istante e/o qualsiasi altra forza agente su una ipotetica ^{carica q} ~~carica q~~ ^{muovibile} lungo un percorso chiuso C assegnato. Sia $\vec{F}$ la forza che agisce punto per punto sulla carica.

Il lavoro compiuto ^{per unità di carica} da $\vec{F}$ per far percorrere il circuito alla carica è detto forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

f.e.m.

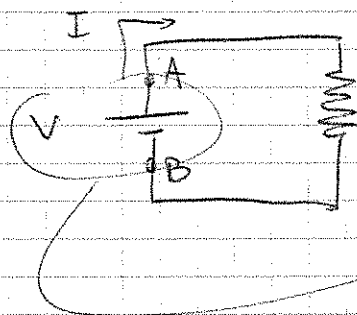


Notiamo che $\mathcal{E}$ ha le dimensioni di una differenza di potenziale.

Notiamo anche che se $\vec{F}$ è dovuto ad un campo elettrostatico $\vec{E}$ (cioè $\vec{F} = q\vec{E}$), allora

$\mathcal{E} = 0$, dato che per $\vec{E}$ elettrostatico vale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ per qualsiasi percorso chiuso.

Per avere f.e.m. in un circuito elettrico, quindi, occorrono forze diverse da un campo $\vec{E}$ elettrostatico. Si ricorre a generatori (batterie, pile, ...) in cui ci sono forze in grado di "separare" cariche compiendo lavoro.



qui dentro si intende che esiste una qualche $\vec{F}$ tale che

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

se A e B sono l'ingresso e l'uscita del generatore

$\mathcal{E}$ è quella che indichiamo con V , per un generatore ideale (si veda Focardi p. 149)

Dato questa definizione di $\vec{E}$, possiamo enunciare la legge di Lenz per le correnti indotte:

$$\boxed{\vec{E} = - \frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})}$$

Tutti gli esperimenti sono compatibili con questa legge, indipendentemente dal processo fisico che cambia il flusso Φ e indipendentemente dal percorso scelto (che sia un circuito reale, fatto con conduttori, o una linea chiusa qualsiasi nello spazio).

Per coprire questa legge è utile procedere distinguendo due classi di processi:

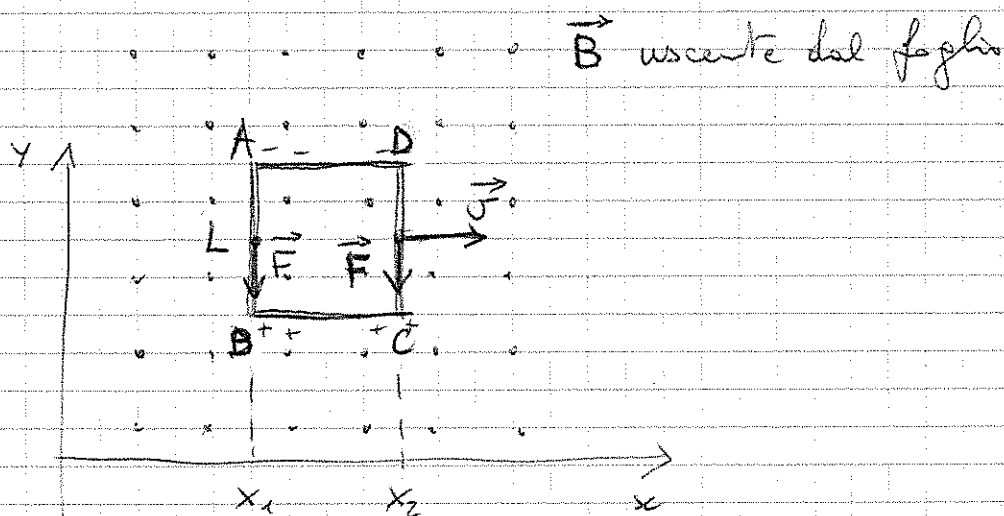
- i) casi in cui si ha un circuito fatto con elementi conduttori che si muovono in presenza di campi magnetici stazionari;
- ii) casi in cui si hanno circuiti (o percorsi) fermi in presenza di campi magnetici che dipendono dal tempo.

I casi (i) richiedono solo di explicitare la f.e.m. in termini della forza di Lorentz $q \vec{v} \times \vec{B}$, dove $\vec{v}$ è determinato dal moto dei conduttori.

I casi (ii) portano a definire un campo elettrico indotto, rotazionale ($\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$).

Cominciamo con casi del tipo (i).

Spira conduttrice quadrata in un campo $\vec{B} \perp$ alla spira stessa. La spira è trascinata a velocità $\vec{v}$ nel piano $\perp$ a $\vec{B}$.



Le cariche di conduzione risentono delle forze di Lorentz $q \vec{v} \times \vec{B}$, dove il $\vec{v}$ è quello di trascinamento della spira. Come nell'effetto Hall, ciò produce una forza che spinge lateralmente le cariche in direzione $\perp$ sia a $\vec{v}$ che a $\vec{B}$. Una carica q (positiva) risente della forza diretta come in figura. In una situazione stazionaria questo porta ad un eccesso di carica $+$ in basso e un eccesso di carica $-$ in alto.

Ora, se $\vec{B}$ non dipende da x e y ($\vec{B}$ uniforme), la differenza di potenziale misolta tra A e B e tra C e D è la stessa, dato che $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ è identica a destra e sinistra $\Rightarrow$ non si ha corrente. D'altra parte

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_{ABCD} q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{e} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{e} + \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{e}$$

e i due contributi sono uguali in modulo ma di segno opposto, così che $\mathcal{E} = 0$.

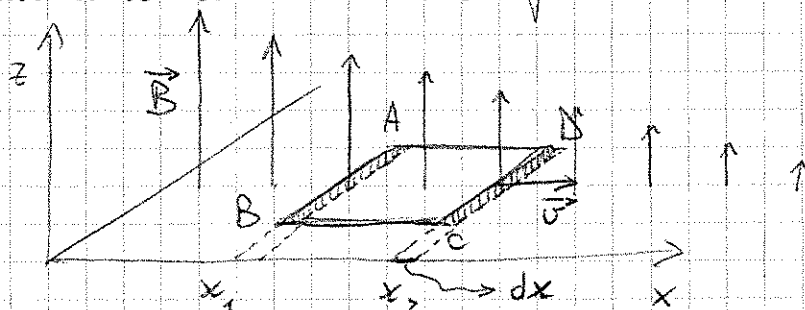
Se invece $\vec{B}$ non è uniforme le cose cambiano. Supponiamo che dipenda solo da x ; allora la $\vec{F}$ a destra e sinistra è diversa e il risultato netto è quello di produrre una f.e.m. non nulla. Infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}(x_1)) \cdot d\vec{e} + \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}(x_2)) \cdot d\vec{e} \\ &= vB(x_1)L - vB(x_2)L \\ &= vL [B(x_1) - B(x_2)]\end{aligned}$$

Questo è ciò che ci aspettiamo dalla conoscenza delle forze di Lorentz.

E il flusso di $\vec{B}$?

Consideriamo la variazione di flusso attraverso la spira nel tempo dt .



A sinistra (lato AB) si

perde un flusso pari a $B(x_1)Ldx$, mentre a destra (lato CD) si guadagna un flusso pari a $B(x_2)Ldx$. Dunque la variazione netta è

$$d\Phi(B) = [B(x_2) - B(x_1)] L dx$$

ovvero

$$-\frac{d\Phi(B)}{dt} = vL [B(x_1) - B(x_2)] \quad \text{come prima!}$$

Abbiamo quindi verificato che la legge di Lenz $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ è consistente con l'applicazione delle forze di Lorentz nel caso di conduttori in moto in campi magnetici costanti nel tempo e non uniformi nello spazio. Quest'ultima condizione non è nemmeno necessaria. Possiamo avere il caso di campo $\vec{B}$ uniforme ma una spira che si deforma in modo che la superficie aumenti o diminuisca

nel tempo. Anche in questo caso è sufficiente la forza di Lorentz per interpretare la legge di Lenz.

Tornando alla spira quadrata indeformabile notiamo che la corrente indotta, nel caso della figura precedente, è antioraria (f.e.m. positiva, con circuito orientato secondo l'ordine ABCD). Tale corrente indotta produce a sua volta un campo magnetico diretto verso l'alto in modo da opporsi alla variazione del flusso di $\vec{B}$ esterno, che diminuisce spostando il circuito verso zone con $\vec{B}$ minore.

Si tratta di una regola generale: la corrente indotta tende sempre ad opporsi alla variazione del flusso di $\vec{B}$. Questo è il significato del segno - che compare nella legge di Lenz.

L'andamento nel tempo della f.e.m. nel caso della spira quadrata dipende dall'andamento di $|\vec{B}|$ con x . Supponiamo per semplicità che

$$|\vec{B}(x)| = B_0 - bx$$

con B_0 e b costanti.

Allora

$$\mathcal{E} = vL[B(x_1) - B(x_2)]$$

$$= vLb(x_2 - x_1)$$

$$= vL^2b \quad \text{costante}$$

Se la spira è fatta di un comune materiale ohmico (es. metallo) con conducibilità σ e sezione S uniforme, allora la resistenza della spira è

$$R = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{4L}{S} \right)$$

e la corrente indotta è

$$I_{\text{indotta}} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{costante.}$$

Ci sarà allora anche una potenza dissipata per effetto Joule

pari a $P = I \mathcal{E} = \sigma L^2 b I$

Chi ci mette queste energie?

Il campo $\vec{B}$ no. Non compie mai lavoro, dato che esercita sulle cariche una forza perpendicolare alla velocità. Qualcun altro deve compiere lavoro.

Notiamo che se σ è costante e $|\vec{B}|$ è lineare in x , allora sia $\mathcal{E}$ che I sono costanti.

D'altra parte sappiamo già che un filo percorso da corrente e immerso in un campo magnetico risente di una forza. L'abbiamo vista a p. 4.16 e 4.17. Il tratto AB della spira, ad esempio, subisce una forza

$$\vec{F}_1 = I B(x_1) L \hat{n}$$

dove il versore $\hat{n}$ è individuato dalla direzione di $d\vec{l} \times \vec{B}$ su quel tratto. Dunque $\hat{n}$ è perpendicolare a $\vec{B}$ e $d\vec{l}$, ed è perciò lungo x , e la regola della mano destra mostra che coincide con $-\hat{x}$. Analogamente il tratto CD è soggetto ad una forza

$$\vec{F}_2 = I B(x_2) L \hat{n}$$

dove stavolta $\hat{n}$ coincide con $\hat{x}$ (il verso di $d\vec{l}$ è cambiato). Le forze che agiscono lungo i tratti BC e DA sono dirette lungo $-\hat{y}$ e $\hat{y}$ rispettivamente e si compensano a vicenda per simmetria (non occorre calcolarle); non producono alcun effetto se la spira è indeformabile. La risultante delle forze che agiscono sulla spira lungo $\hat{x}$ è quindi

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\hat{x} IL [B(x_1) - B(x_2)] \\ &= -\hat{x} IL b (x_2 - x_1) \\ &= -\hat{x} IL^2 b \end{aligned}$$

Questa forza si oppone allo spostamento della spira. Per mantenere la spira in moto a velocità costante occorre una forza meccanica esterna che compensi esattamente le forze appena calcolate. Una tale forza meccanica esterna, agendo su

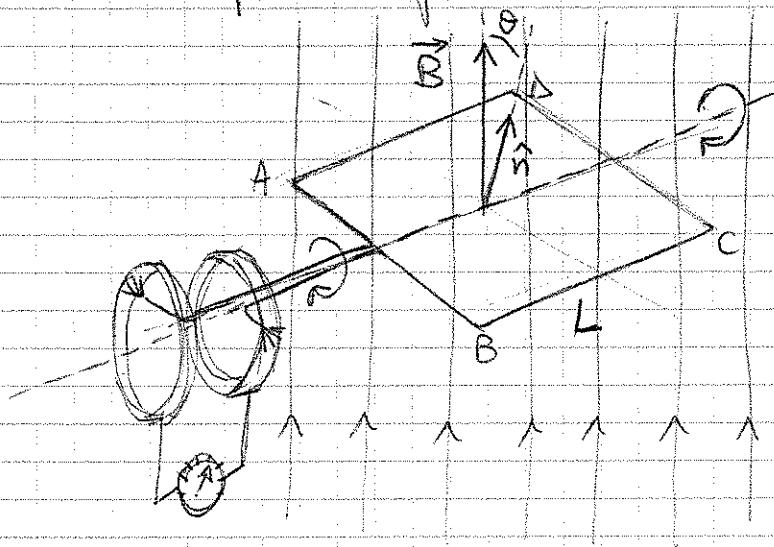
un corpo a velocità costante v , sviluppa una potenza pari a

$$P = Fv = IL^2 b v$$

questo è proprio la potenza che viene dissipata nella spira per effetto Joule, calcolato precedentemente.

Dunque abbiamo individuato chi compie lavoro.

Consideriamo un altro esempio di tipo (i): spira che ruota in un campo $\vec{B}$ uniforme



$$\theta(t) = \omega t$$

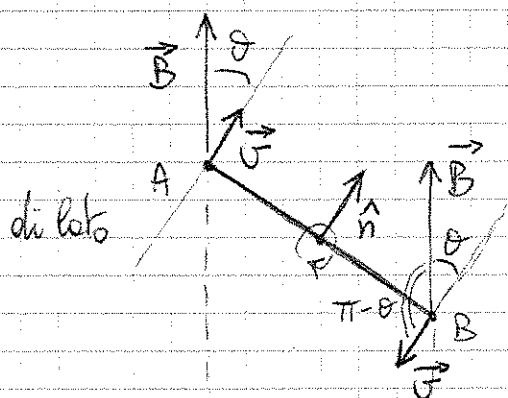
$$\omega = 2\pi\nu$$

$$\text{periodo } T = \frac{1}{\nu}$$

spira quadrata di lato L .

I lati AD e BC della spira ruotano a distanza $L/2$ dall'asse con velocità

$$|\vec{v}| = \omega \frac{L}{2}$$



$$|\vec{F}_1| = qvB \sin(\pi - \theta) \\ = qvB \sin \theta$$

Altrettanto per

$$|\vec{F}_2| = qvB \sin \theta$$

così che $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ contribuiscono concordemente alla f.e.m.:

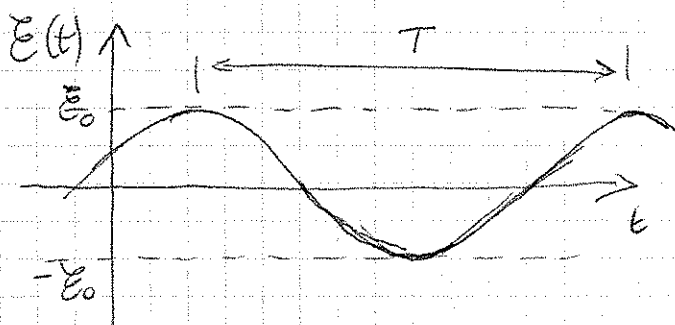
$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint \vec{F} \cdot d\vec{e} = \frac{2qvB \sin \theta L}{q} \\ = 2LvB \sin \theta$$

Infine $\mathcal{E} = L^2 \omega B \sin \omega t$

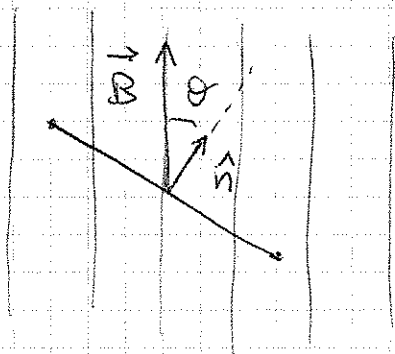
Possiamo scrivere

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \theta_0)$$

dove $\mathcal{E}_0$ è l'ampiezza della variazione periodica di $\mathcal{E}(t)$ e θ_0 è una fase costante che dipenderà dalle condizioni iniziali. Si tratta dunque di una f.e.m. "alternata".



La stessa f.e.m. può essere ricavata applicando la legge di Lenz. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso una spira quadrata orientata così:



è dato da $\Phi(B) = BL^2 \cos \theta = BL^2 \cos \omega t$

da cui

$$\mathcal{E}(t) = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = L^2 \omega B \sin \omega t$$

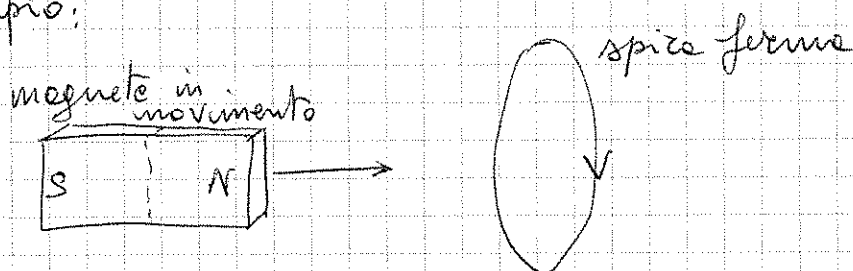
come prima.

Anche in questo caso, come per la spira che trasla, occorre lavoro meccanico per mantenere in rotazione la spira a ω costante. Questo lavoro, se disponibile, può essere convertito in lavoro da dissipare in un resistore o utilizzare in qualche dispositivo elettrico!! $\rightarrow$ vedi: dinamo, turbine, centrali.

In sintesi: se si hanno dei conduttori in movimento (traslazione e/o rotazione) in campi magnetici stazionari, la forza elettromotrice indotta si spiega come diretta conseguenza del contributo magnetico alla forza di Lorentz, $q \vec{v} \times \vec{B}$, dove $\vec{v}$ è la velocità del conduttore. In tali casi la legge di Lenz è una conseguenza della definizione stessa di $\vec{B}$ (in termini di forza sulle cariche in moto) e delle proprietà dei conduttori.

Nei gli esperimenti di Faraday sulle correnti indotte non riguardano solo casi di tipo (i), nella lista di p. 5.5, ma anche quelli di tipo (ii) in cui non ci sono conduttori in movimento.

Ad esempio:



In questo caso si osserva una f.e.m. indotta lungo le spire. Questa non può essere ricondotta alla componente magnetica delle forze di Lorentz, $q \vec{v} \times \vec{B}$, perché non c'è alcuna componente $\vec{v}$ della velocità perpendicolarmente al filo.
delle cariche

Se scriviamo l'espressione generale della forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

e assumiamo che qualunque f.e.m. nella spire debba essere riconducibile a queste, siamo portati a concludere che ci deve essere un campo elettrico $\vec{E}$ lungo le spire tale da produrre la f.e.m. osservata. In tal caso si avrà

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint \vec{F} \cdot d\vec{e} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\sigma}$$

dove abbiamo usato il Teo. di Stokes, essendo S una qualsiasi superficie avente le spire come contorno. D'altra

parte gli esperimenti mostrano che

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{\alpha}}_{\vec{\Phi}(B)} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\alpha}$$

dove abbiamo considerato il caso di una spira che non cambia forma nel tempo. Combinando le due espressioni precedenti di $\mathcal{E}$ otteniamo la relazione

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{\alpha} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\alpha}$$

che deve essere vera per qualsiasi spira ferma e indeformabile. Ciò è possibile solo se gli integrandi sono uguali in ogni punto dello spazio, indipendentemente dall'esistenza concreta delle spire. Possiamo scrivere

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{Legge di Faraday}$$

Abbiamo così ottenuto un campo elettrico $\vec{E}$ con rotore non nullo. Questo campo elettrico è diverso da quello elettrostatico, generato da una distribuzione di cariche stazionarie e per il quale si aveva $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Un campo $\vec{E}$ rotazionale, prodotto da una variazione di $\vec{B}$ nel tempo, è quanto basta per spiegare la legge di Lenz (empirica) riconducendola a proprietà più basilari dei campi elettrici e magnetici.

Il senso dell'induzione di Faraday è che possiamo mantenere la definizione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ espresso dalla forza di Lorentz, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, e patto di considerare un campo elettrico più generale di quello elettrostatico, includendo una componente rotazionale prodotta da variazioni di $\vec{B}$ nel tempo.

Ribadiamo ancora che la legge scritta sopra, e indicata come legge di Faraday, è da intendersi valida punto per punto nello spazio, così come $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possono essere definiti punto per punto senza che in un dato punto sia necessario mettere concretamente cariche, correnti o materiali...

Inoltre notiamo che in tutte le espressioni in cui compare il flusso di $\vec{B}$ attraverso una superficie che abbia un certo contorno non è necessario specificare la scelta della superficie. Questo è vero perché $\vec{B}$ è un campo a divergenza nulla ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) e cui si applica il teorema già fatto a p. 1.66: il flusso è lo stesso per qualsiasi superficie avente lo stesso contorno.

Equazioni di Maxwell

Facciamo un riassunto della situazione, nella forma delle 4 leggi fin qui scritte per i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

Mancava qualcosa !!

Prima osservazione

Nel vuoto, in assenza di cariche e correnti, le equazioni sopra diventano così:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

C'è un'evidente asimmetria: variazioni nel tempo di $\vec{B}$ producono un $\vec{E}$, ma variazioni di $\vec{E}$ nel tempo non danno effetti! L'accoppiamento tra $\vec{E}$ e $\vec{B}$ è a senso unico? Se fosse a doppio senso ci aspetteremmo un $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ nell'equazione per $\vec{\nabla} \times \vec{B}$.

Seconda osservazione.

L'equazione $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ implica che

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Ma il membro di sinistra è sempre nullo, perché la divergenza del rotore di qualsiasi campo vettoriale è nulla (vedi p. 1.65). Ne segue che la stessa equazione implica che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

sempre. Ma questo non può essere vero! La conservazione della carica impone che sia vero l'eq. di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dunque, ogni volta che la distribuzione di carica cambia nel tempo in modo da avere $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ si avrà anche $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \neq 0$.

Ne concludiamo che la legge di Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ è incompatibile con la conservazione della carica!!

Questo problema fu evidenziato da Maxwell, che lo risolse aggiungendo un termine in più proporzionale a $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \text{cost} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La costante deve avere le dimensioni dell'inverso del quadrato di una velocità, dato che

$$[\mu_0 j] = \frac{N}{A^2} \frac{A}{m} = \frac{N}{Am^2} = \frac{N \text{sec}}{Cm^2}$$

e che $\left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \frac{N}{c \text{ sec}}$

e il rapporto tra i due dà $\frac{1}{\left(\frac{m}{\text{sec}}\right)^2}$.

Chiamiamo c la velocità definita da $1/(\text{cost})^2$, in modo che

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

È consistente con l'equazione di continuità? Basta applicare la divergenza a entrambi i membri. A sinistra dà sempre zero, perciò risulta

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Ora ricordiamo la legge di Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$:

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Questa coincide con la legge di continuità se

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

La nuova legge di Ampère, che ora chiamiamo legge di Ampère-Maxwell, può essere scritta così:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

In questo modo si risolve anche l'asimmetria delle equazioni per $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nel vuoto.

Raccogliendo assieme le leggi chiave per $\vec{E}$ e $\vec{B}$, avendo aggiunto la legge di Ampère nella nuova forma di Ampère-Maxwell, abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 & (\text{Gauss}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{Faraday}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (\text{no monopoli magn.}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & (\text{Ampère-Maxwell})\end{aligned}$$

Equazioni
di Maxwell

→ Rappresentano le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

Aggiunte alle definizioni di $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{forza di Lorentz})$$

alla conservazione della carica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

e al principio di sovrapposizione, esse costituiscono tutto ciò che serve per spiegare le osservazioni nell'ambito dell'elettromagnetismo classico.

Commento sul ruolo di Maxwell:

- opera di sintesi teorico-formale delle conoscenze empiriche
- congettura nuova, giustificata da esigenze di simmetria, con potere predittivo nuovo oltre gli esperimenti noti.

La legge di Ampère - Maxwell può essere scritta così:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s)$$

queste Maxwell la chiamano
corrente di spostamento

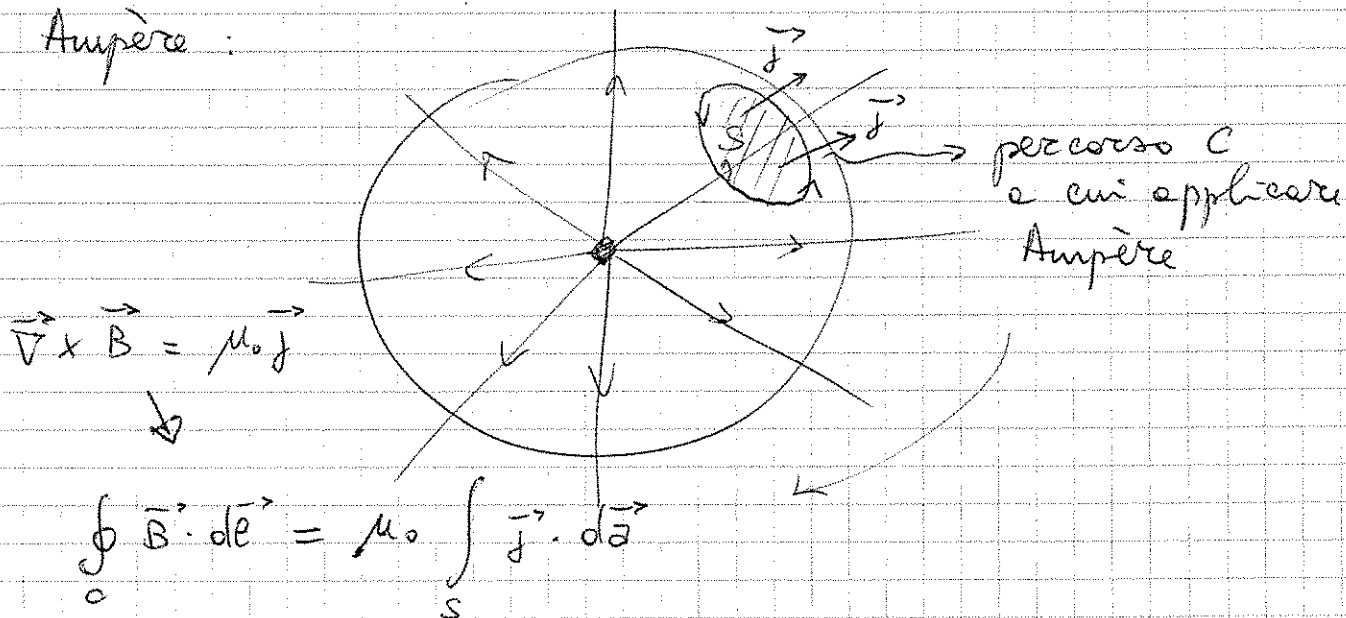
$$\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cos'è la corrente di spostamento?

Se ne possono misurare gli effetti? (e poteva Faraday misurarla con i suoi strumenti?)

Consideriamo due esempi.

Una sferetta con carica totale Q al centro di una superficie sferica di raggio R . Ad un certo istante le cariche della sferetta vengono "liberate" e si espandono isotropicamente per mutua repulsione. Fissiamo un tempo t durante l'espansione e calcoliamo $\vec{B}$ sulla sfera di raggio R usando la legge di Ampère:



Prendiamo un percorso circolare. Per simmetria il campo $\vec{B}$ risulta non nullo e con componente tangenziale positiva nel verso di C antiorario.

Bello! Ma sbagliato! Una corrente isotropa non può produrre un campo $\vec{B}$ orientato in una "certa" direzione su una sfera. Non c'è alcuna direzione privilegiata. Avremmo potuto scegliere un C' tangente a C ;

avremmo ottenuto $\vec{B}$ nella direzione opposta nello stesso punto!

Abbiamo dimenticato il fatto che $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ prende un contributo anche dalle correnti di spostamento $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Infatti, il campo $\vec{E}$ calcolato sulla superficie sferica cambia nel tempo per effetto del flusso di cariche verso l'esterno. De Gauss si ha che

$$|\vec{E}(t)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(t)}{R^2} \rightarrow \text{carica nella sfera al tempo } t$$

sulla sfera

Quindi

$$\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{R} \vec{j} = -\vec{j}$$

Quindi, in questo caso, la corrente di spostamento è uguale e opposta alla corrente delle cariche. Nel calcolo di $\vec{B}$, con la legge di Ampère - Maxwell si ha perfetta cancellazione.

$\vec{B} = 0$ come si voleva.

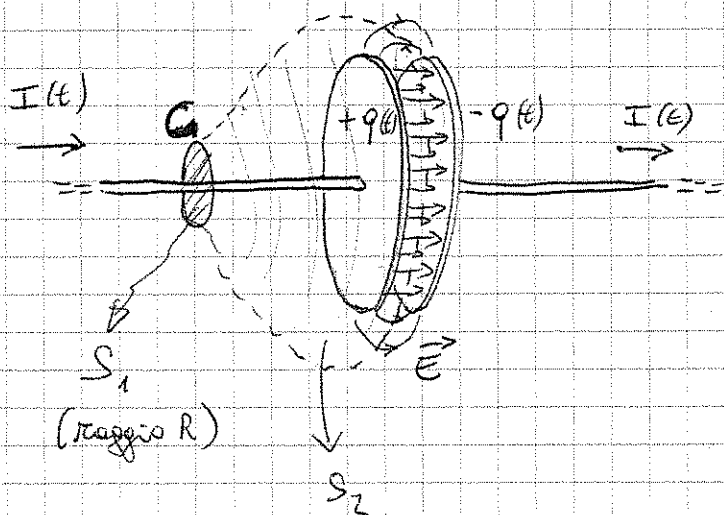
$$\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dq}{dt} = -j \quad \text{corrente vera}$$

(cariche che escono nell'unità di tempo dall'unità di superficie)

j positive significa $\frac{dq}{dt}$ negative

Nota: se uso un filo per iniettare carica al centro rendendo stazionario $\vec{E}$ e $\vec{j}$, allora $j_s = 0$ e $\vec{B}$ diverso da zero sulla sfera. Corretto: esiste una direzione privilegiata quella del filo!

Altro esempio: condensatore che si carica



S_1 e S_2 hanno lo stesso contorno C .

C è vicino al filo e lontano dalle armature, in modo che $\vec{E} = 0$ su S_1 , e $\vec{B}$ lungo C è determinato dalla corrente del filo, come fosse infinito.

dunque $\vec{B}$ su C è tangente e $|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}$

da cui $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$.

Se il condensatore si carica $I(t) > 0$ e $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} > 0$
Questo è consistente con

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

essendo $\vec{j}$ positivo all'interno del conduttore che interseca la superficie S_1 (è concatenato), così

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 I \quad \text{OK}$$

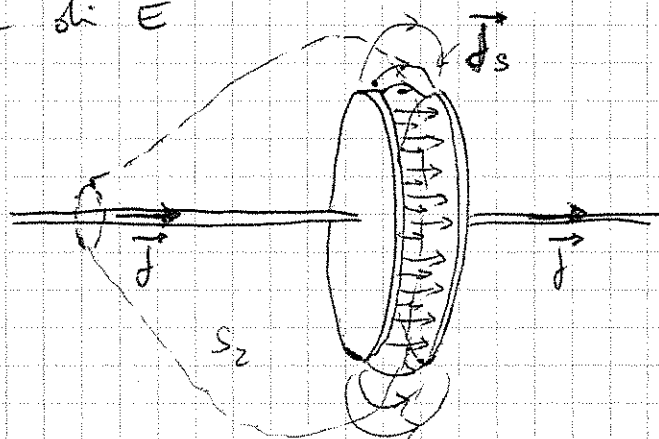
Ora però prendiamo una superficie S_2 diversa, come in figura. $\vec{B}$ su C deve rimanere lo stesso (non può dipendere dalla scelta arbitraria della superficie S).

dunque $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ continuerà ad essere $\mu_0 I > 0$.

Ma stavolta il conduttore non interseca la superficie

(non c'è corrente concatenata). Per questo la legge di Ampère ci darebbe circolazione di $\vec{B}$ nulla! Di nuovo, si esce dal guio invocando la corrente di spostamento. Nel condensatore c'è un $\vec{E}$ che varia nel tempo.

Se il condensatore si carica si ha un campo di corrente di spostamento $\vec{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ diretto come $\vec{E}$ e quindi, con linee di flusso coincidenti con le linee di forza di $\vec{E}$



La superficie S_2 interseca le linee di flusso di $\vec{J}_s$, in modo tale che

$$\mu_0 \int_{S_2} \vec{J}_s \cdot d\vec{\alpha} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{\alpha}$$

$$\text{Gauss} \rightarrow \left| = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{\alpha} \right.$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q(t)}{\epsilon_0} \right) \rightarrow \text{carica che entra nel condensatore}$$

$$= \mu_0 \frac{d}{dt} q = \mu_0 I \quad \text{come prima!!}$$

Vale ancora $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I$ se si include $\vec{J}_s$ in modo appropriato.

Potere Faraday misurare $\vec{j}_s$?

Sono effetti piccoli. Se si misura $\vec{j}_s$ con galvanometro, si misura in realtà il campo $\vec{B}$ in un dato punto dello spazio, generato da tutte le correnti in gioco. Il campo $\vec{B}$ dovuto alle $\vec{j}_s$ è molto più piccolo di quello dovuto alle $\vec{j}$ vere in un tipo esperimento a la Faraday, e i due contributi non sono separabili in singole misure di $\vec{B}$.

Gli effetti concreti e misurabili di $\vec{j}_s$ si vedono nei processi che coinvolgono la propagazione di onde elettromagnetiche, come vedremo.

Commento: nell'esempio precedente serve una grande distanza tra le armature e/o un grande $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$...

Cosa sono le onde elettromagnetiche? Sono possibili soluzioni delle eq. di Maxwell.

Consideriamo le eq. di Maxwell nel vuoto ($\rho=0$; $\vec{j}=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Applichiamo un $\vec{\nabla} \times$ alla legge di Faraday:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Il membro di sinistra sappiamo che può essere scritto così:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

mentre al secondo membro possiamo scambiare l'ordine delle derivate. Otteniamo

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Usiamo la legge di Ampère - Maxwell per il rotore di $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

e usiamo la legge di Gauss (nel vuoto), $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, da cui

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

o, in forma equivalente

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Queste sono tre equazioni differenziali al secondo ordine nello spazio e nel tempo, per ciascuna componente del campo elettrico. Ad esempio, per la componente x :

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = 0$$

che si può scrivere anche così:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_x = 0$$

Altrettanto per le altre componenti. Questo tipo di equazione si chiama equazione delle onde. Il nome si giustifica dal fatto che, se $f(x;t)$ è una soluzione di

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0$$

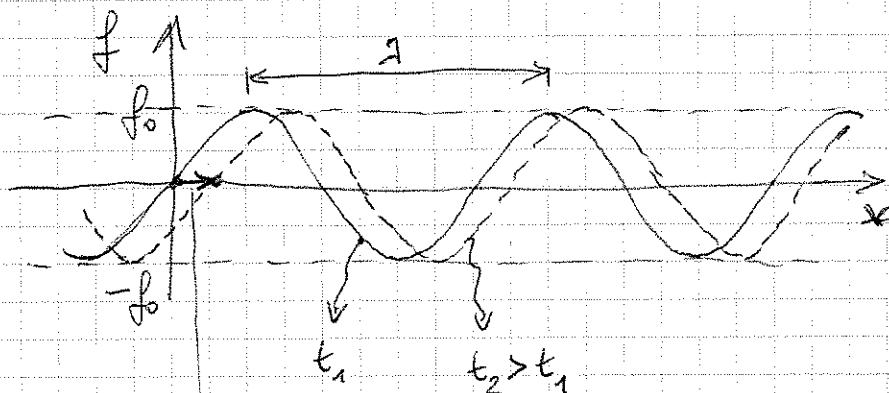
allora ha la forma

$$f(x;t) = f_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

dove f_0 e φ_0 sono un'ampiezza e una fase costante, fissate dalle condizioni iniziali (o al contorno), mentre

$k =$ vettore d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ lunghezza d'onda

$\omega =$ pulsazione $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ frequenza $T = \frac{1}{\nu}$ periodo



il nodo si sposta con la legge oraria fissata dalla fase = costante, ovvero

$$x = \underbrace{\left(\frac{\omega}{k}\right)}_{\text{velocità di fase}} t + x_0$$

↳ questa è la velocità di fase dell'onda

La verifica che si tratta di una soluzione è semplice:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2 f_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0) = \omega^2 f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k^2 f_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0) = k^2 f$$

$$\text{Da cui } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) f$$

e l'equazione delle onde è soddisfatta se

$$c = \frac{\omega}{k}$$

c è la velocità (di fase) dell'onda.

Dunque le equazioni di Maxwell nel vuoto ammettono soluzioni in forma di onde per le componenti del campo $\vec{E}$. In realtà potevamo fare lo stesso per $\vec{B}$ applicando il rotore alla legge di Ampère-Maxwell e usando la $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Si trova:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

come per $\vec{E}$. Ovviamente le varie componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ non sono indipendenti tra loro, le equazioni di Maxwell, oltre a fornire 2 equazioni delle onde, per $\vec{E}$ e $\vec{B}$, forniscono altre relazioni tra i due campi. Per vedere quali sono e come si ottengono tratteremo ora il caso particolare di onde elettromagnetiche piane, polarizzate linearmente.

Propagazione di onde elettromagnetiche piane

Scopo: trovare le soluzioni di:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

aventi la forma

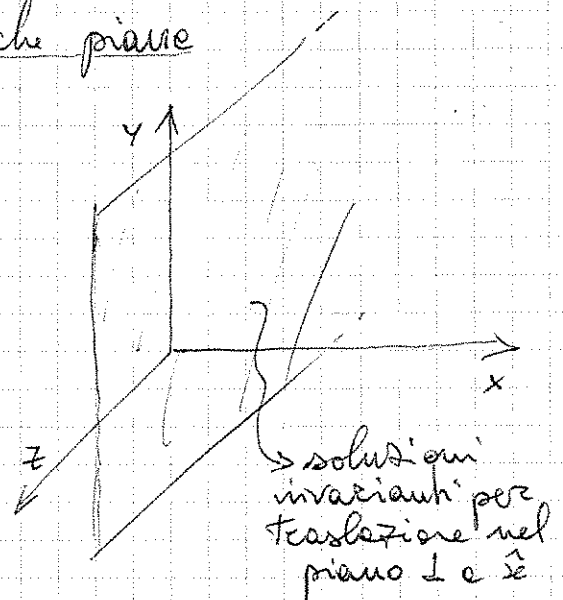
$$E_x(x,t), E_y(x,t), E_z(x,t)$$

$$B_x(x,t), B_y(x,t), B_z(x,t)$$

cioè costanti in tutti i piani paralleli al piano yz

Inoltre, escludiamo anche campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ statici (costanti nel tempo), dovuti ad eventuali sorgenti stazionarie, che supporremo assenti.

Soluzioni di questo tipo sono onde piane. Vediamo ora che forme hanno.



Primo passo

Cominciamo con usare la legge di Gauss nel vuoto: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
Nel nostro caso diventa

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_x(t)$$

non dipende da x

E usiamo anche la legge di Ampère - Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
che si scrive, nel nostro caso, così

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = c^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow E_x = \text{costante}$$

Dunque E_x non dipende né da x né da t. È un campo statico.
Non lo consideriamo. Se c'è qualche sorgente statica che l'ha
prodotto, la buttiamo via. Quindi $E_x = 0$ ovunque.

Secondo passo

Facciamo una cosa analoga per $\vec{B}$

La $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ci dice che

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow B_x(t)$$

non dip. da x

La $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ci dice che

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow B_x = \text{costante}$$

Anche qui abbiamo un campo B_x statico che possiamo porre
uguale a 0: $B_x = 0$.

Terzo passo

Abbiamo così scoperto che, con la nostra geometria, i campi $\vec{E}$
e $\vec{B}$ ammettono soluzioni con sole componenti lungo $\hat{y}$ e
lungo $\hat{z}$

Ora scegliamo la polarizzazione, fissando l'orientazione dei
campi. Ad esempio, vediamo se esistono soluzioni event'è
il campo $\vec{E}$ diretto lungo $\hat{y}$ in tutto lo spazio. Chiameremo

reino una tale soluzione "onda piana polarizzata linearmente lungo $\hat{y}$ ". Come si produce una tale onda è un altro problema di cui ora non ci preoccupiamo. Ora vediamo solo se una tale soluzione esiste.

Quindi poniamo $E_z = 0$

e cerchiamo le $E_y(x,t)$, $B_y(x,t)$ e $B_z(x,t)$ che risolvano le equazioni di Maxwell nel vuoto.

Quarto passo

Explicitiamo le due equazioni $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ usando le informazioni dei passi precedenti.

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})_x = c^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})_y = c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = c^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

Dalla (2) si ha $\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$

Dalla (6) si ha $\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$

Quindi B_y non dipende né da x né da t . È un campo statico. Lo mettiamo uguale a 0. $B_y = 0$ ovunque

Questo è un risultato interessante: se $\vec{E}$ è lungo $\hat{y}$ allora $\vec{B}$ è lungo $\hat{z}$. I due campi sono perpendicolari, ed entrambi perpendicolari a $\hat{x}$.
 tre l'ora

Dalla (3) si ha $-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$

e dalla (5) si ha $\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x}$

Derivando la prima in x e la seconda in t :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

ovvero $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \leftarrow \text{eq. delle onde!}$

soluzione: $E_y = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$

con $c = \frac{\omega}{k}$

Se invece si derivava la prima in t e la seconda in x :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} &= -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} &= -c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

soluzione: $B_z = B_0 \cos(kx - \omega t + \varphi'_0)$

con la stessa velocità di fase, $c = \frac{\omega}{k}$

Abbiamo trovato le soluzioni. Ci manca una relazione tra le ampiezze E_0 e B_0 . Le possiamo trovare usando ancora la (3), $-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$, inserendo le soluzioni già

trovate. Si ha

$$\omega B_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0') = k E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

Se le onde sono in fase ($\varphi_0' = \varphi_0$), le ampiezze sono legate da

$$\omega B_0 = k E_0$$

ovvero

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Conclusione : Abbiamo trovato la soluzione che cercavamo :

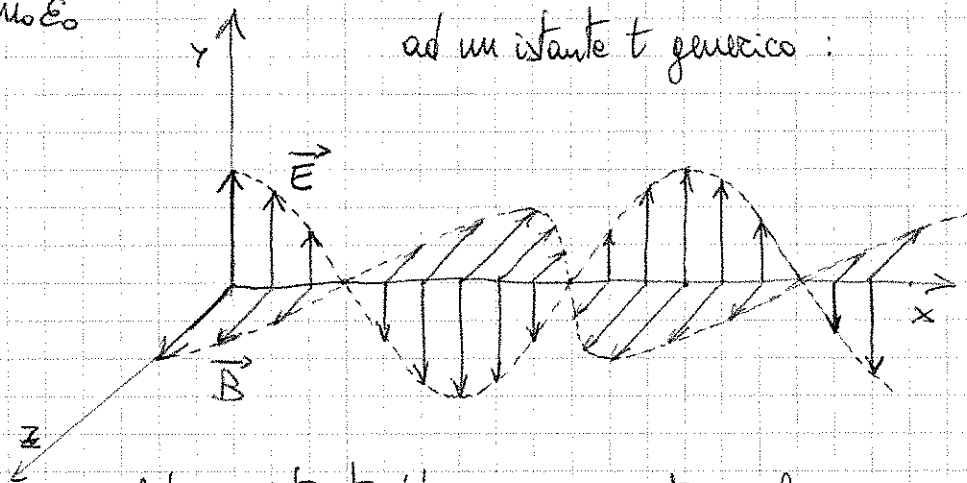
$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_0 \cos[k(x - ct)] \\ B_z(x, t) = B_0 \cos[k(x - ct)] \end{cases}$$

$$\text{con } B_0 = E_0/c$$

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari tra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda, $\hat{x}$. La velocità di fase dell'onda è

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

ad un istante t generico :



Ad un istante t' successivo: stessa forma, ma traslate a destra di una distanza $c(t' - t)$

È una soluzione possibile, non la sola! Ne esistono di altri tipi: diverse polarizzazioni lineari, polarizzazione circolare, varie combinazioni lineari di onde, onde sferiche, ecc.

Nota sul valore numerico di c .

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

dove $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ per definizione di A

e $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ dalla legge di Coulomb

$$\text{Dunque } \mu_0 \epsilon_0 = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{4\pi \times 8.9875 \times 10^9} \frac{sec^2}{m^2}$$

da cui $c = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{sec} \longleftrightarrow$ è la velocità della luce!!

Fin qui non avevamo mai parlato di luce, ma solo di onde elettromagnetiche, soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto. È una bella sorpresa.

Lo stesso Maxwell si accorse, malgrado le stime imprecise dell'epoca sui valori di ϵ_0 e μ_0 , che la velocità di fase delle onde e.m. era dell'ordine della velocità della luce. Ipotezzo allora che la luce stessa fosse un tipo di onde elettromagnetiche.

Si tratta di una grande unificazione concettuale!! Fenomeni apparentemente diversi convergono in un unico quadro teorico.

Esperimenti sulle onde elettromagnetiche furono compiuti da Hertz una quindicina d'anni dopo che Maxwell scrisse le sue equazioni.

Breve digressione sulla fenomenologia delle onde e.m. ---

onde radio, lunghe, medie, corte, VHF, UHF

microonde

IR, visibile, UV

raggi X

raggi γ

Le equazioni di Maxwell riscritte per i potenziali φ e $\vec{A}$.

In presenza di ρ e $\vec{j}$ le equazioni di Maxwell in generale sono complicate da risolvere, essendo pure accoppiate per $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Qui mostriamo che può essere conveniente riscriverle per φ e $\vec{A}$.

Procediamo per passi successivi.

Per prima cosa prendiamo la $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ che ci permette di definire $\vec{A}$ come

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

e notiamo che $\vec{A}$ è definito a meno di un $\vec{\nabla} f$ con f scalare qualsiasi.

Poi prendiamo la legge di Faraday $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ riscritta per $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

che è lo stesso di

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

oppure

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Scepiamo così che il campo $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ è irrotazionale. Ciò permette di definire un potenziale scalare ϕ tale che

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \phi$$

Questo si riduce al potenziale elettrostatico ϕ nel caso in cui

non vi siano campi magnetici dipendenti dal tempo.
 Dunque la legge di Faraday implica

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

che generalizza la def. di ϕ del caso elettrostatico.

Con queste definizioni di $\vec{A}$ e di ϕ , le due equazioni di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ sono automaticamente soddisfatte. Inoltre, abbiamo la libertà di scegliere $\vec{A}$ e ϕ che differiscono rispettivamente per $\vec{\nabla}f$ e $-\frac{\partial f}{\partial t}$, ovvero

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

danno gli stessi $\vec{E}$ e $\vec{B}$

(per $\vec{B}$ è ovvio, per $\vec{E}$ basta vedere che

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\nabla}f}{\partial t}$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
 si annullano
 a vicenda

Posso scegliere $f(\vec{r}, t)$ in modo conveniente (scelte di gauge). Lo faremo dopo. Ora procediamo con le altre due equazioni di Maxwell.

La legge di Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \rho/\epsilon_0$$

ovvero

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \rho / \epsilon_0$$

Invece la legge di Ampère - Maxwell può essere scritta così:

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} / \epsilon_0$$

e usando $\vec{A}$ e ϕ :

$$c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{j} / \epsilon_0$$

da cui

$$c^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - c^2 \nabla^2 \vec{A} + \frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{j} / \epsilon_0$$

Così è troppo complicata. Usiamo a questo punto la libertà che ci viene dalla scelta di gauge. Scegliamo f tale che $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (gauge di Lorentz)

che equivale a scegliere f soluzione di:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Allora l'equazione complicata di prima diventa

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \frac{\vec{j}}{c^2 \epsilon_0}$$

oppure

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_0 \vec{j}}$$

non contiene ϕ ! L'equazione per ϕ si ricave combinando l'eq. in alto, in cui alle pagine, con

la gauge di Lorentz. Si ottiene:

$$\boxed{\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0}$$

non contiene $\vec{A}$.

Abbiamo ottenuto due equazioni disaccoppiate per i potenziali ϕ ed $\vec{A}$. Il primo è legato alla densità di cariche ρ , il secondo alla densità di corrente $\vec{j}$. ^(assieme alle due definizioni di $\vec{A}$ e ϕ in termini di $\vec{E}$ e $\vec{B}$) Queste due equazioni, sono del tutto equivalenti, come contenuto fisico, alle 4 equazioni di Maxwell.

Un tipo di soluzioni importanti di queste equazioni si trovano (ma qui non lo verifichiamo) quando ρ e $\vec{j}$ sono contenute in una regione di spazio limitata V . In tal caso, si dimostra che ϕ ed $\vec{A}$ in un punto $\vec{r}$ generico e in un istante t generico sono date da

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{cases}$$

Questi si chiamano potenziali ritardati. Nel punto $\vec{r}$ ci si accorge più tardi di ciò che succede in $\vec{r}'$. L'informazione sulla distribuzione che produce i campi arriva con velocità c !