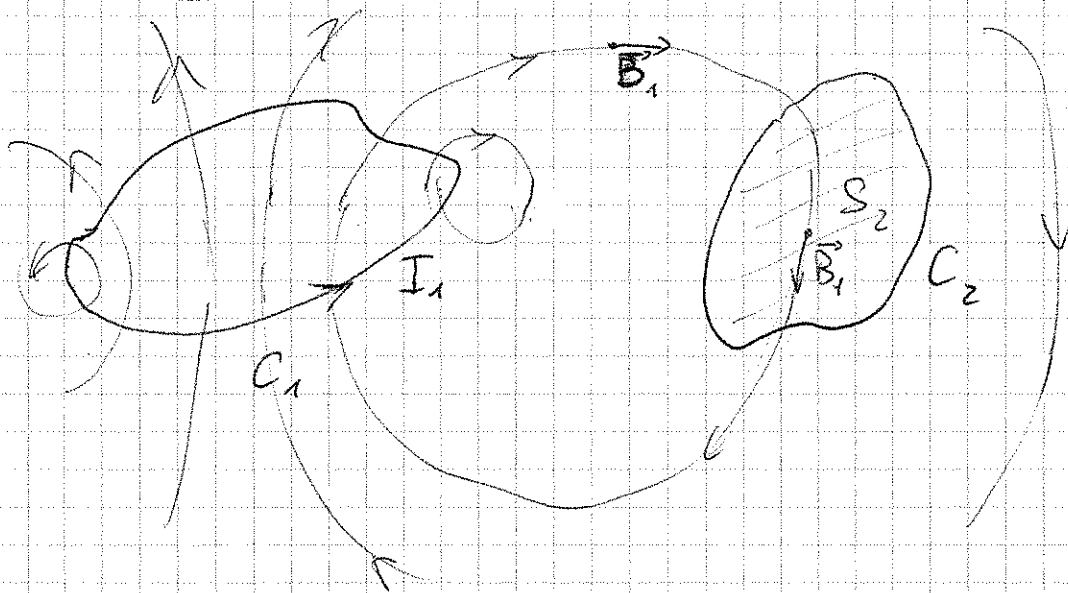


6. Mutua induzione, autoinduzione e circuiti a corrente alternata.



Due circuiti  $C_1$  e  $C_2$  fermi e non deformabili.  
 Con un generatore si fa correre in  $C_1$  una corrente  $I_1$ .  
 Questa produce un campo  $\vec{B}_1$  che, a sua volta,  
 causa un flusso di campo magnetico  $\Phi_{12}$  attraverso  
 la superficie  $S_2$  avente come contorno  $C_2$ .

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2$$

Se  $I_1$  varia nel tempo anche  $\Phi_{12}$  varia nel tempo  
 e si ottiene una corrente indotta  $I_2$  in  $C_2$ .

Primo commento: dobbiamo tenere conto dei potenziali  
 ritardati? (in altri termini, il campo  $\vec{B}_1$  su  $S_2$  <sup>al tempo  $t$</sup>   
 quello magnetostatico dovuto a  $I_1$  allo stesso tempo?)

NO, se i circuiti sono sufficientemente vicini e  
 le variazioni di  $I_1$  sufficientemente lente.

Esempio: se  $I_1$  cambia su una scala tipica di 1 msec, a quale distanza possiamo essere  $C_1$  e  $C_2$  per ignorare il "ritardo" dovuto alla propagazione delle perturbazioni di  $\vec{B}_1$  nello spazio?

Risposta:

basta che sia una distanza molto minore di  $ct$

$$d \ll ct \sim 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \times 10^{-3} \text{ sec} \sim 3 \times 10^5 \text{ m}$$

Se la distanza è minore di 100 km sia o posto, possiamo calcolare gli effetti delle correnti indotte con la legge di Faraday ignorando gli effetti di ritardo (nota  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = ct$ )

Invece, se  $I_1$  cambia su una scala di 1 nsec, la condizione sulla distanza è più restrittiva

$$d \ll ct \sim 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \times 10^{-9} \text{ sec} \sim 0.3 \text{ m}$$

Bastano pochi centimetri per essere sensibili agli effetti di ritardo.

D'ora in poi facciamo l'ipotesi che le variazioni delle correnti siano sufficientemente lente e i circuiti si trovino a distanze ragionevoli, in un laboratorio.

Secondo commento: il campo  $\vec{B}_1$  può essere calcolato usando la legge di Biot-Savart (in alto a p. 4.7) e integrando su  $C_1$ . Qui vogliamo fare

qualcosa di diverso, introducendo opportuni coefficienti che contengano implicitamente tutte le informazioni che servono sulla geometria del circuito.

Osserviamo che l'intensità di  $\vec{B}_1$  in ogni punto dello spazio (in assenza di ferromagneti, di cui parleremo più avanti) è proporzionale a  $I_1$ , come segue dalla legge di Ampère - Laplace di p. 4.8. Dunque anche  $\Phi_{12}$  è proporzionale a  $I_1$  e si può scrivere

$$\Phi_{12} = \text{costante} \times I_1$$

$\rightarrow$  flusso di  $B_1$  in  $S_2$

Se  $I_1$  varia nel tempo, si ha una forza elettromotrice  $\mathcal{E}_{12}$  in  $C_2$  pari a

$$\mathcal{E}_{12} = - \text{costante} \times \frac{dI_1}{dt}$$

$\hookrightarrow$  f.e.m. indotta da 1 in 2

Chiamiamo la costante  $M_{12}$ , ~~mutua~~ coefficiente di mutua induzione (o di mutua induttanza):

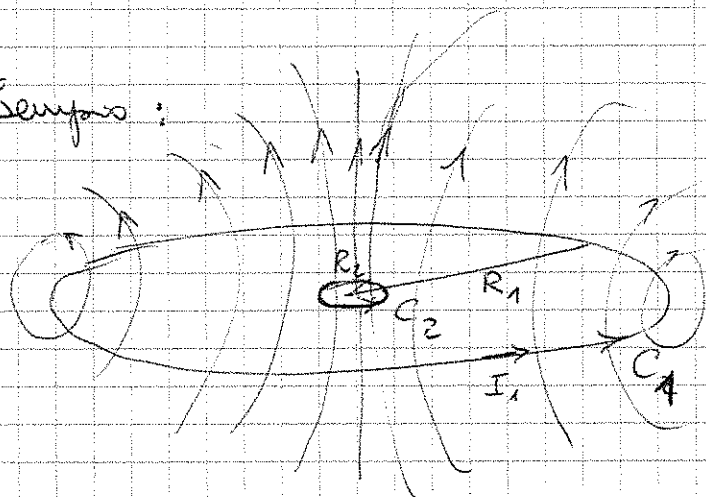
$$\mathcal{E}_{12} = - M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

$M_{12}$  ha le dimensioni di  $\frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Wb}}{\text{ampère}}$

e si definisce l'henry (H) così:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}}$$

Esempio:



due spire circolari:  
di raggio  $R_1$  e  $R_2$   
concentriche e con  
 $R_2 \ll R_1$

Il campo prodotto al centro della spira circolare  $C_1$  percorso da corrente  $I_1$  è stato calcolato e p. 4.18:

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$$

Il flusso attraverso  $S_2$  può essere calcolato assumendo che  $\vec{B}_1$  sia uniforme in  $S_2$ , dato che  $R_2 \ll R_1$ :

$$\Phi_{12} = \pi R_2^2 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$$

Dunque

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \frac{dI_1}{dt}$$

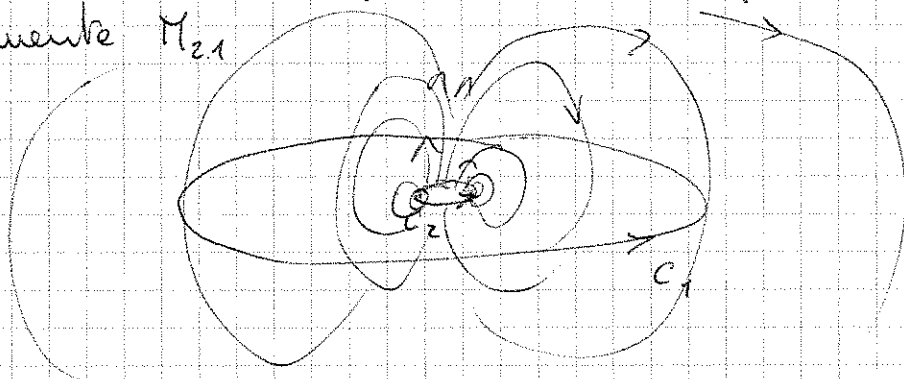
ovvero 
$$M_{12} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

Anzitutto si può invertire il ruolo di  $C_1$  e  $C_2$  e calcolare la corrente indotta in  $C_1$  da una variazione di corrente in  $C_2$ . Valgono ancora tutti i ragionamenti fatti prima: la forza elettromotrice in  $C_1$  sarà proporzionale a  $dI_2/dt$  e il coefficiente di proporzionalità può

essere chiamato  $M_{21}$ , coefficiente di mutua induzione per la corrente indotta da 2 su 1:

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

Qual'è la relazione tra  $M_{12}$  e  $M_{21}$ ? Nell'esempio precedente non si ha simmetria tra  $C_1$  e  $C_2$ ; hanno raggi diversi e il campo  $\vec{B}_1$  ha forma molto diversa da  $\vec{B}_2$  ai fini del calcolo dei flussi. Non è facile calcolare esplicitamente  $M_{21}$ .

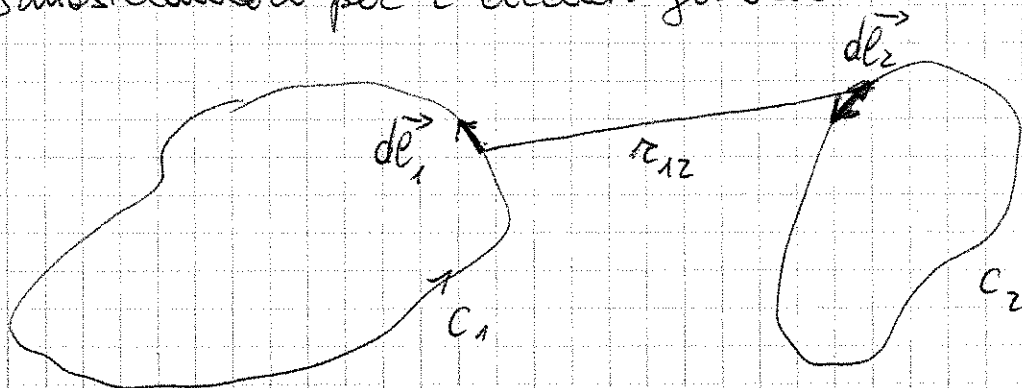


Inoltre, non c'è alcuna ragione di ritenere che basti scambiare  $R_1 \leftrightarrow R_2$  nell'espressione di  $M_{12}$ . Darà un risultato sbagliato.

Per nostra fortuna, vale un teorema di reciprocità:

$$M_{21} = M_{12}$$

Dimostriamolo per 2 circuiti generici



$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\alpha}_2 = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{\alpha}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

↑  
definizione di  $\vec{A}$ 
↑  
Stokes

D'altra parte

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{\alpha}_1 = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_2) \cdot d\vec{\alpha}_1 = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1$$

Ora ricordiamo che il potenziale vettore  $\vec{A}$  dovuto ad una spira, calcolato in un punto  $\vec{r}$  vale (vedi p. 4.40)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Nell'espressione di  $\Phi_{12}$  ci serve  $\vec{A}$  dovuto a  $C_1$  e calcolato nel punto in cui si trova  $d\vec{l}_2$ . Si ottiene

$$\Phi_{12} = \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

Allo stesso modo per  $\Phi_{21}$ :

$$\Phi_{21} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{12}}$$

Da cui

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r_{12}} = M_{21}$$

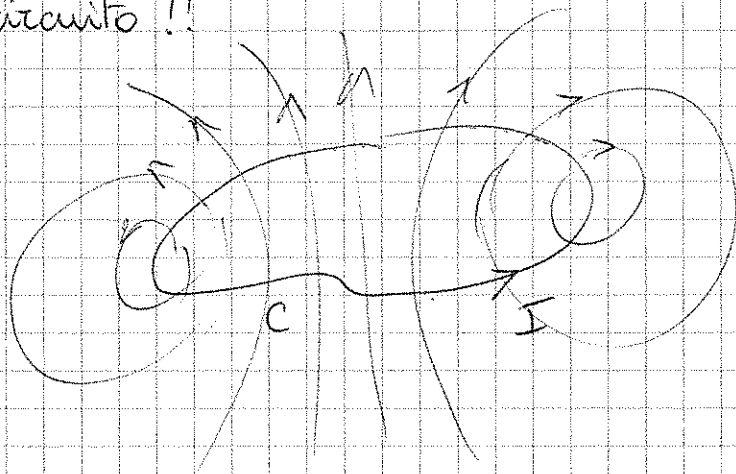
stesso  $r_{12}$   
stesso valore di  $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$   
l'ordine di integraz. non conta

Dunque, due circuiti generici sono caratterizzati da un solo coefficiente di mutua induzione

$$M = M_{12} = M_{21}$$

### Auto-induzione

Un solo circuito in cui varia la corrente  $I \rightarrow$  varia il flusso del campo  $\vec{B}$  generato dalla corrente  $I \rightarrow$  si ha una f. e. m. indotta nello stesso circuito !!



Da Biot-Savart:  $\vec{B}$  è proporzionale a  $I$   
Dunque

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \text{cost} \frac{dI}{dt}$$

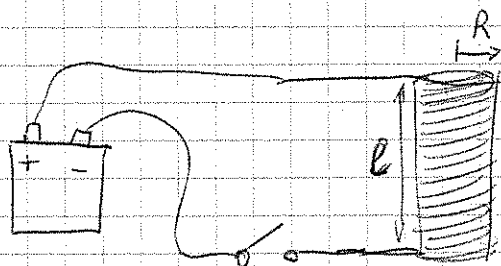
Questa costante la chiamiamo  $L$ , coefficiente di auto-induzione o auto-induttanza o, semplicemente induttanza del circuito

$$\mathcal{E} = - L \frac{dI}{dt} \quad \leftarrow \text{si oppone alla variazione di } I$$

L'induttanza si misura in henry (H).

## Esempio: solenoide

Supponiamo di voler "accendere" una corrente in un solenoide



$n$  = densità di spire  
(spire  $\times$  unità di lunghezza)  
 $n = \frac{N}{l}$

All'istante  $t$ , quando la corrente è  $I(t)$ , il campo nel solenoide è  $\mu_0 n I(t)$  se trascuriamo effetti di bordo.

Il flusso di  $B$  attraverso ogni spira è  $\underbrace{\pi R^2}_{\text{area}} \mu_0 n I(t)$ .

Di conseguenza su ogni spira la f.e.m. indotta è

$$- \pi R^2 \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt}$$

La f.e.m. totale sul solenoide è la somma delle f.e.m. sulle singole spire (si ottiene infatti come integrale su tutto il circuito...); si ha quindi:

$$\mathcal{E} = - \mu_0 N \pi R^2 n \frac{dI(t)}{dt} = - \mu_0 \frac{N^2}{l} \underbrace{\pi R^2}_{\text{area}} \frac{dI(t)}{dt}$$

L'induttanza del solenoide è

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{l}$$

Valori tipici:  $N = 100$ ;  $l = 5 \text{ cm}$ ;  $R = 0,5 \text{ cm}$

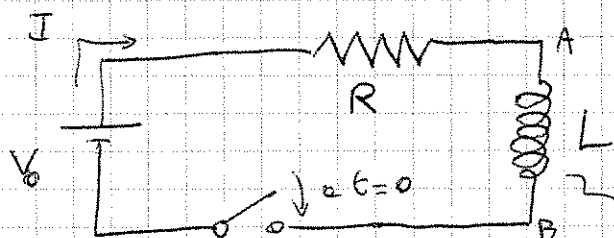
allora

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \pi (5 \times 10^{-3})^2 (10^2)^2}{5 \times 10^{-2}} \text{ H}$$

$$\approx 2 \times 10^{-5} \text{ H} = 20 \mu\text{H}$$



Nel processo di eccitazione della corrente dobbiamo tenere conto anche della resistività del filo, o di eventuali elementi resistivi opportunamente collocati nel circuito. Sia  $R$  la resistenza totale nel circuito. Possiamo idealizzare il circuito in questo modo:



questo simbolo rappresenta l'elemento di auto-induzione nel circuito (induttanza), indipendentemente da come l'auto-induzione sia distribuita nel circuito reale.

Fissiamo come positivo il verso ~~verso~~ delle corrente prodotta dal generatore in assenza di induttanza e interruttore chiuso. Se l'interruttore è aperto  $I(0) = 0$ . Appena l'interruttore viene chiuso  $I$  cresce nel verso positivo. Si ha allora una caduta di potenziale  $RI$  sulla resistenza, ma si ha anche una f.e.m. sull'induttanza pari a  $-L \frac{dI}{dt}$ . Questa f.e.m. è negativa se  $I$  cresce e corrisponde ad una "caduta di potenziale" tra i punti A e B (questa è infatti tesa a produrre una corrente indotta di verso opposto ad  $I$ , contrastandone l'aumento; questo è consistente con la legge di Lenz). La legge di Kirchhoff per le maglie ci dice che

$$V_0 - RI(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

Si risolve per separazione di variabili

$$L \frac{dI}{dt} = V_0 - RI$$

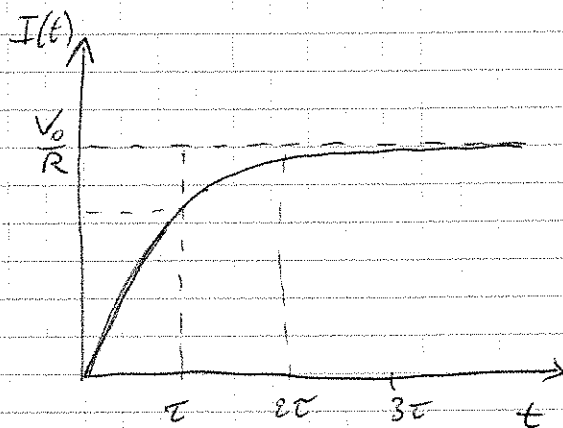
$$\frac{dI}{V_0 - RI} = \frac{dt}{L}$$

$$\int_0^{I(t)} \frac{dI'}{V_0 - RI'} = \int_0^t \frac{dt'}{L}$$

$$-\frac{1}{R} \log\left(\frac{V_0 - RI(t)}{V_0}\right) = \frac{t}{L}$$

$$\frac{V_0 - RI(t)}{V_0} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

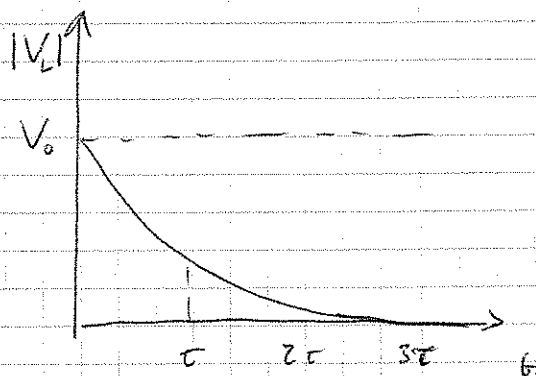


$$\tau = \frac{L}{R}$$

↳ costante di tempo del circuito

Diff. di potenziale ai capi dell'induttanza:

$$|V_L| = L \frac{dI}{dt} = V_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



L'effetto dell'elemento induttivo nel circuito è quello di fornire una scala di tempi caratteristica per l'accensione della corrente. Non si può avere un'accensione immediata al valore  $V_0/R$ , perché questa avrebbe derivata infinite a  $t=0$  e darebbe una  $\mathcal{E}$  infinite per effetti di autoinduzione. (solo quando  $L \rightarrow 0$  l'accensione avviene in tempi  $\tau \rightarrow 0$ )

Discorso analogo per lo spegnimento. Se scorre corrente costante  $I_0 = V_0/R$  e poi si toglie improvvisamente il generatore, l'equazione per  $I(t)$  diventa

$$-L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

ovvero

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

quindi

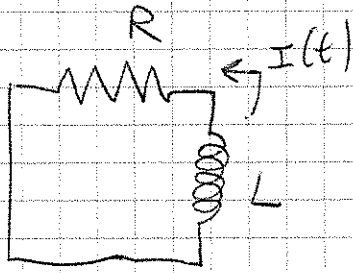
$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Lo stesso tempo  $\tau = \frac{L}{R}$  caratterizza <sup>anche</sup> lo spegnimento della corrente.

È un effetto molto concreto: circuiti con grande induttanza vanno chiusi e aperti con cautela. Aprirli bruscamente il circuito può causare scariche elettriche ad arco tra i contatti dei contatti aperti! Occhio...

Altra considerazione: energie nell'induttanza

Nel processo di "spegnimento" della corrente si ha energia dissipata nella resistenza



$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

potenza dissipata:  $RI^2(t)$

Energia dissipata:

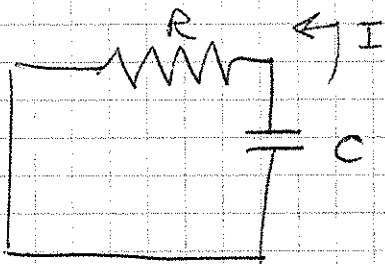
$$U = \int_0^{\infty} dt RI^2(t)$$

$$= RI_0^2 \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{2Rt}{L}}$$

$$= \frac{1}{2} LI_0^2 \underbrace{\int_0^{\infty} dt' e^{-t'}}_1 = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Da dove viene questa energia? E' nell'induttanza al tempo iniziale!

E' analogo al caso già trattato di un condensatore che si scarica



in questo caso

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2$$

↳ diff di potenziale prima della scarica

Nel caso del condensatore l'energia poteva essere vista come un'energia nel campo  $\vec{E}$  all'interno del condensatore

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\vec{E}|^2 \quad (\text{vedi p. 2.26})$$

$\downarrow$   
 del condensatore

Nell'induttanza invece abbiamo un campo magnetico  $\vec{B}$ . Possiamo dire che

$$U \stackrel{?}{=} \text{cost} \int dV |\vec{B}|^2$$

$\downarrow$   
 induttanza

Consideriamo un'induttanza a solenoide, in cui trascuriamo il campo esterno al solenoide (è debole, ma lo si può rendere ancora più influente ripiegando il solenoide in forma toroidale).

In tal caso  $L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$  (vedi p. 6.8)

Mentre il campo  $\vec{B}$  è uniforme dentro il solenoide con

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Sia  $I = I_0$  stazionaria. Calcoliamo  $U = \frac{1}{2} L I_0^2$ :

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 A N^2}{l} I_0^2$$

lo si può ricavare tenendo conto che  $lA = V$  volume.

$$U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I_0^2}{c^2} V = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 V$$

e<sup>-</sup> compatibile con

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V dV |\vec{B}|^2 \quad \text{nell'induttanza}$$

solenoidale

questa fa il paio con

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV |\vec{E}|^2 \quad \text{nel condensatore}$$

condensatore

Possiamo anche dire che, se in  $\vec{r}$  si hanno campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , allora si ha anche una densità di energia pari a

$$\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

che si può anche scrivere

$$\boxed{\frac{\epsilon_0}{2} (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2)} \quad (*)$$

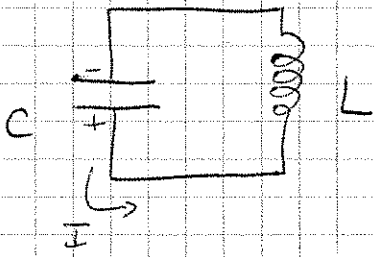
L'integrale di questa densità su un volume finito fornisce l'energia associata ai campi elettromagnetici in quel volume. I casi del condensatore ( $\vec{E} \neq 0$  e  $\vec{B} = 0$ ) e dell'induttanza ( $\vec{E} = 0$  e  $\vec{B} \neq 0$ ) sono casi particolari dell'espressione più generale (\*).

L'espressione generale per l'energia nei campi

$$U_{\text{campi}} = \int_V dV \frac{\epsilon_0}{2} (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2)$$

la riprenderemo più avanti, parlando del vettore di Poynting.

## Circuiti oscillanti



Si trascurabile le resistività.  
Supponiamo che il condensatore  
sia carico al tempo  $t=0$   
(carica  $q(0) = q_0$ )

Energia iniziale:  $U_0 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$   
 $\hookrightarrow$  diff. di potenziale  
sul condensatore  
a  $t=0$

Il circuito viene chiuso a  $t=0$  e si ha la scarica  
del condensatore.

Al tempo  $t$  l'energia vale

$$U(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} L \left( \frac{dq(t)}{dt} \right)^2$$

Ma siccome non ci sono dissipazioni, l'energia deve  
rimanere costante

$$U(t) = U_0 \quad \text{costante}$$

ovvero  $\frac{dU}{dt} = 0$

da cui  $0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 \right)$

$$= \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L \left( \frac{d^2q}{dt^2} \right) \left( \frac{dq}{dt} \right)$$

Infine  $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$

Questo tipo di equazioni le conosciamo già: moto armonico di una particella

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e  $\varphi_0, x_0$  condizioni iniziali

La forma dell'equazione è la stessa.

L'induttanza  $L$  ha lo stesso ruolo della massa, nel senso che esprime l'inerzia del sistema al cambiamento di corrente come la massa esprime l'inerzia di una particella al cambiamento di velocità. La capacità  $C$  gioca il ruolo dell'inverso della costante elastica.

$$\frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad \text{energia "cinetica"}$$

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{energia "potenziale"}$$

Le soluzioni saranno

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{con } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

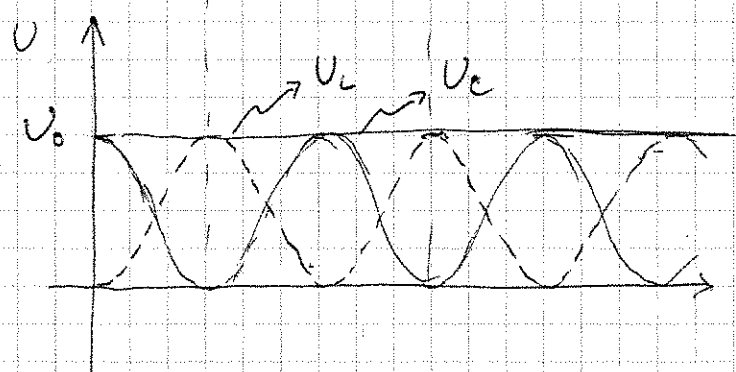
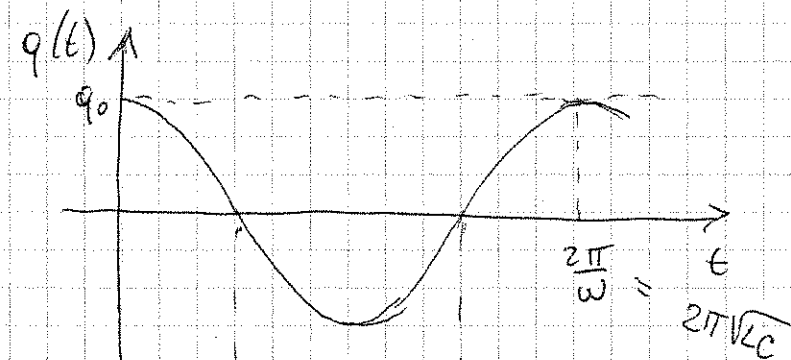
frequenza caratteristica della corrente oscillante

La corrente

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

↳ si prende  $I > 0$  per convenzione quando  $q$  cala come in figura.  $(I = -\frac{dq}{dt})$





$$U_L = \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2$$

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$U_0 = U_L + U_C = \text{cost}$$

I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  oscillano nel tempo.

A  $t=0$   $\vec{E}$  massimo nel condensatore

$\vec{B}$  nullo nell'induttore

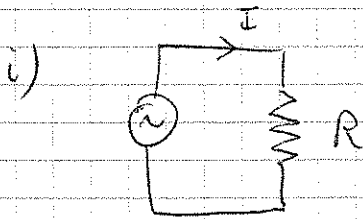
A  $t = \frac{\pi}{2\omega}$   $\vec{E}$  e nullo nel condensatore

$\vec{B}$  e massimo nell'induttore

e le oscillazioni si ripetono all'infinito se non c'è dissipazione.

Se si usa un condensatore a  $C$  variabile, si può "sintonizzare" la frequenza di oscillazione a piacere.

# Circuiti a corrente alternata



Ohm:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

↳ rapporto tra  $\frac{V(t)}{I(t)} = R$   
costante.

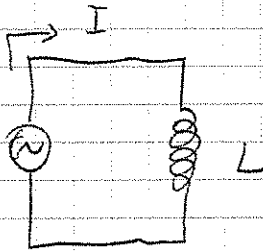
Nessun sfasamento.

generatore di diff. di potenziale sinusoidale nel tempo

↓  
dinamo, turbine, centrali...

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

ii)



Legge di Kirchhoff

$$V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

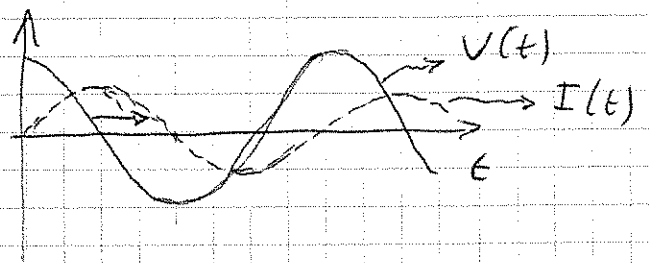
per separazione di variabili

$$dI = \frac{V_0}{L} \cos \omega t dt$$

integrando

$$I = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

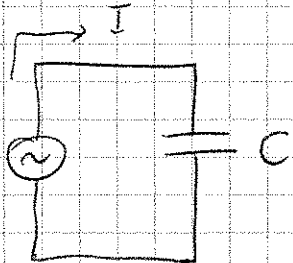
sfasamento di  $\frac{\pi}{2}$ ; la corrente è in "ritardo" rispetto alla diff. di potenziale.



il rapporto tra le ampiezze di  $V$  e  $I$  si chiama "reattanza induttiva"

$$\frac{V_0}{I_0} = \omega L = X_L$$

ii)



Legge di Kirchhoff

$$V_0 \cos \omega t - \frac{q}{C} = 0$$

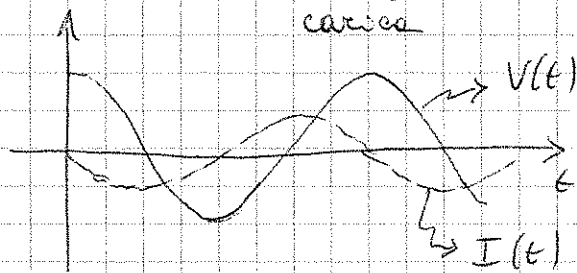
$$\downarrow$$

$$q(t) = C V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega C V_0 \sin \omega t$$

$I > 0$  quando il condensatore si carica

$$= \omega C V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



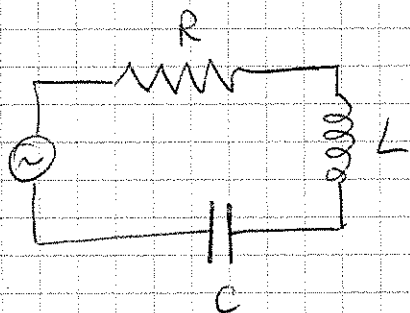
sfasamento:  $+\frac{\pi}{2}$

la corrente è in "anticipo"

Rapporto tra le ampiezze

$$\frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C} = X_C \quad \text{reattanza capacitiva}$$

## Circuito RLC (serie)



Dalla legge di Kirchhoff:

$$V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{q}{C} = 0$$

ovvero

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

È formalmente identica all'equazione di un oscillatore forzato smorzato

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

con le sostituzioni

$$m \rightarrow L$$

$$\gamma \rightarrow R$$

$$k \rightarrow \frac{1}{C}$$

$$F_0 \rightarrow V_0$$

$$\left( \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \Gamma = \frac{\gamma}{2m} \end{array} \right)$$

Nel caso dell'oscillatore la soluzione è nota

$$x(t) = x(t)_{\text{transiente}} + x(t)_{\text{stazionario}}$$

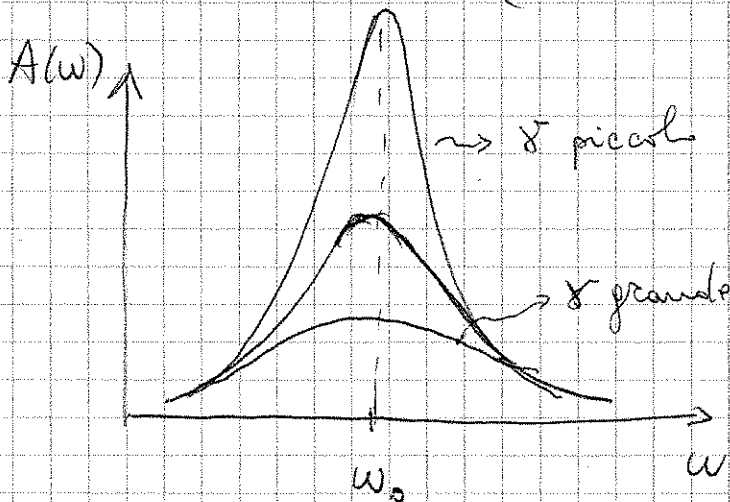
dove la parte stazionaria, per  $t \gg \Gamma^{-1} = \frac{2m}{\gamma}$ , è

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\text{con } A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2}}$$

e

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{k - m\omega^2}\right)$$



Risonanza!

Stessa equazione  $\rightarrow$  stessa soluzione

$$q(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\text{con } A(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2}\right) \equiv \arctan\left(\frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \Gamma = \frac{R}{2L}$$

La corrente si ottiene derivando rispetto a  $t$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi)$$

usiamo le relazioni:

$$\begin{aligned}-\sin(\omega t - \varphi) &= \sin(-\omega t + \varphi) \\ &= \cos\left(-\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(\omega t - \varphi')\end{aligned}$$

$$\text{con } \varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

e scriviamo

$$I(t) = A' \cos(\omega t - \varphi')$$

con

$$A'(\omega) = \omega A(\omega) = \frac{V_0}{\frac{L}{\omega} \sqrt{\left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2}}}$$

ovvero

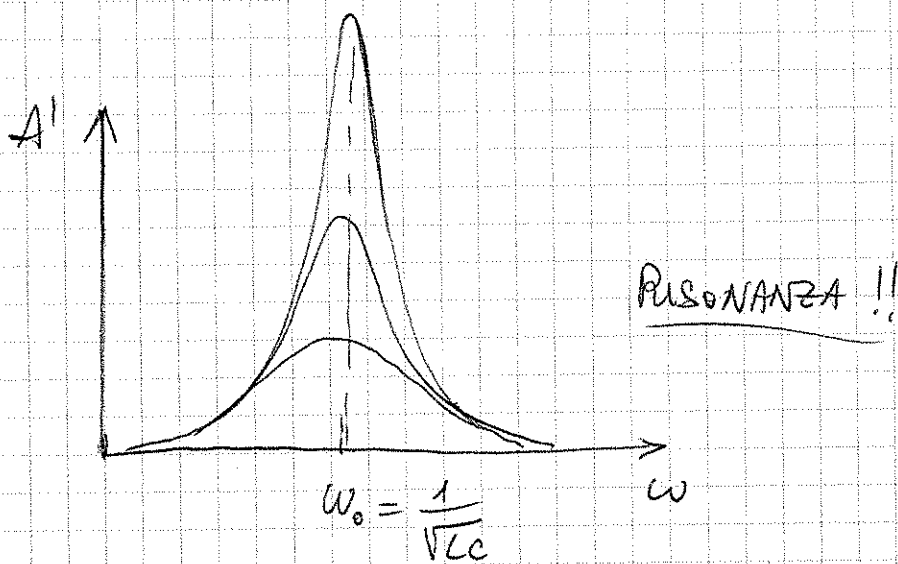
$$A'(\omega) = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{\underbrace{(X_L - X_C)^2}_{\text{reattanza}} + R^2}}$$

e per la fase:

$$\text{tg } \varphi' = \text{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotg}(\varphi) = -\frac{1}{\text{tg} \varphi}$$

da cui

$$\varphi' = \text{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \left| \text{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \right|$$



Il circuito risponde in modo risonante se la frequenza del generatore (forzante) coincide con la frequenza propria del circuito, fissata da  $L$  e  $C$ .

Alle risonanze:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$A' = \frac{V_0}{R}$$

$$\varphi' = 0$$

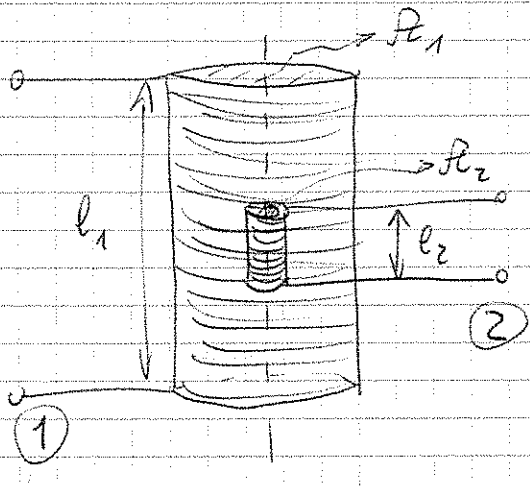
I circuiti risonanti sono molto utili (esempio: trasmissione e ricezione di segnali radio; selezione delle frequenze con circuiti oscillanti a spiccate variabile).

La trattazione dei circuiti a corrente alternata risulta più efficace, in generale, utilizzando le espressioni dei  $\sin$  e  $\cos$  in termini di esponenziali complessi, e introducendo l'impedenza di ciascun elemento del circuito come

$$Z_R = R ; \quad Z_L = i\omega L \quad ; \quad Z_C = -\frac{i}{\omega C}$$

Ma qui non affrontiamo queste questioni...

# Esercizio Mutua induzione di due solenoidi



$N_1$  spire in 1

$N_2$  spire in 2

approx: ① solenoide infinito

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1}$$

$$\Phi_{12} = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l_1} A_2 N_2$$

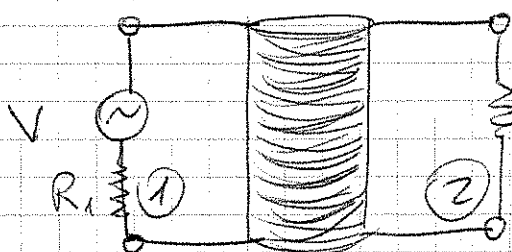
$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \underbrace{\mu_0 \frac{N_1 A_2 N_2}{l_1}}_M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\text{Infine } M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A_2}{l_1}$$

Da confrontare con le auto-induttanze

$$L_1 = \mu_0 \frac{A_1 N_1^2}{l_1} \quad ; \quad L_2 = \mu_0 \frac{A_2 N_2^2}{l_2}$$

Caso particolare: due solenoidi con stessa geometria ma numero di spire diverso



① e ② avvolti sullo stesso cilindro

$$M = \mu_0 \frac{A N_1 N_2}{l}$$



Due maglie . legge di Kirchhoff :

$$\begin{cases} V - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} - R_1 I_1 = 0 \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} - R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = V \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0 \end{cases}$$

equazioni differenziali accoppiate per  $I_1$  e  $I_2$

Caso semplice :  $R_1$  trascurabile e ② aperto ( $I_2=0$ )

Allora

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} \approx V$$

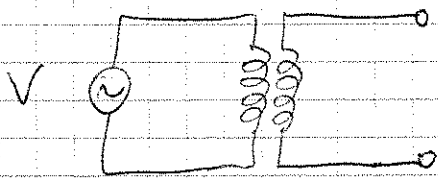
se  $V = V_0 \cos \omega t$

$$\text{allora } \frac{dI_1}{dt}(t) = \frac{V_0 \cos \omega t}{L_1}$$

Si ha una f.e.m. nel circuito ② pari a

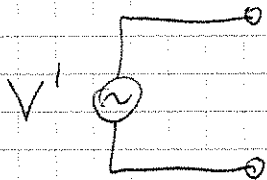
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= -M \frac{dI_1}{dt} = -\frac{M}{L_1} V_0 \cos \omega t = -\frac{\mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{e}}{\mu_0 \frac{N_1^2 A}{e}} V_0 \cos \omega t \\ &= -\frac{N_2}{N_1} V_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

Dunque, questo circuito



$$V = V_0 \cos \omega t$$

è equivalente a questo:



$$\begin{aligned} V' &= -V_0' \cos \omega t \\ &= V_0' \cos(\omega t - \pi) \end{aligned}$$

dal punto di vista dell'eventuale utilizzatore del circuito  
 ②, con

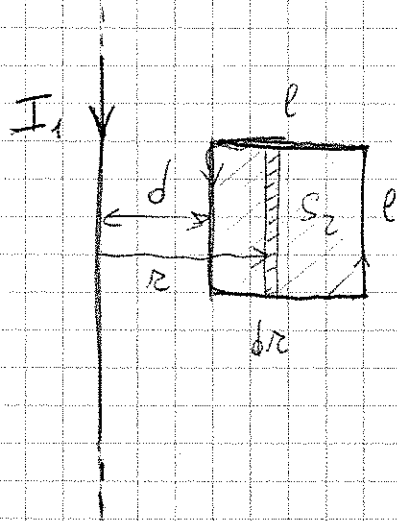
$$V_0' = \frac{N_2}{N_1} V_0$$

A seconda che  $\frac{N_2}{N_1} > 1$  oppure  $\frac{N_2}{N_1} < 1$  si ottiene  
 un'amplificazione o una riduzione della f.e.m.  
 utilizzabile da ② rispetto alla f.e.m. primaria.

Questo è un trasformatore.

Esempio: cabine di trasformazione tra basse e  
 alte tensioni e viceversa.

## Esercizio



Sia  $I_1 = I_0 \sin \omega t$

Sia  $R$  la resistenza della spira

calcolare  $I_2$  indotta da  $I_1$

La potenza media dissipata.

Da Biot-Savart

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r}$$

$\vec{B}_1$  è  $\perp$  a  $S_2$ , uscente dal foglio. Consideriamo il vettore  $\hat{n}$  della superficie  $S_2$  pure uscente.

Allora

$$\Phi_{12}(B_1) = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \int_d^{d+l} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \log\left(\frac{d+l}{d}\right)$$

Da cui

$$\mathcal{E}_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \underbrace{\frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(1 + \frac{l}{d}\right)}_M \frac{dI_1}{dt}$$

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(1 + \frac{l}{d}\right)$$

La corrente  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R} = - \frac{M}{R} \frac{dI_1}{dt} = - \frac{M \omega I_0}{R} \cos \omega t$$

Potenza dissipata al tempo  $t$

$$P = R I_2^2 = \frac{M^2 \omega^2 I_0^2}{R} \cos^2 \omega t$$

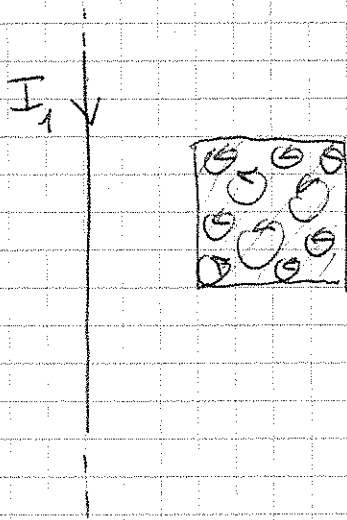
Medie su molti periodi di oscillazione  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

Potenza media dissipata:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{M^2 \omega^2 I_0^2}{R}$$

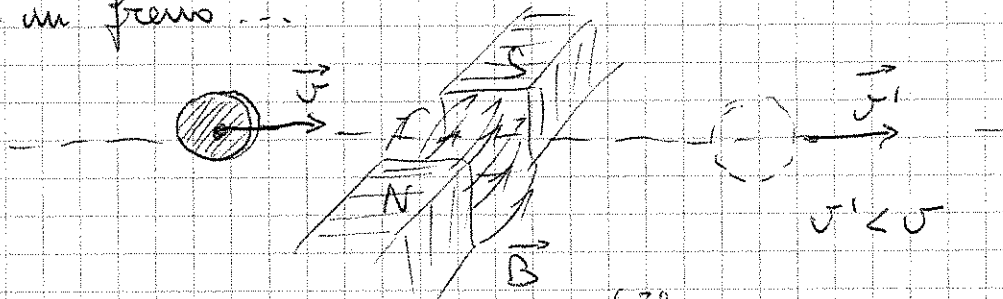
Chi ci mette queste energie? Il generatore della corrente  $I_1$ , dato che il filo è accoppiato alla spira tramite la mutua induttanza  $M$ .

Note: se invece di essere una spira fosse una piastrina conduttrice



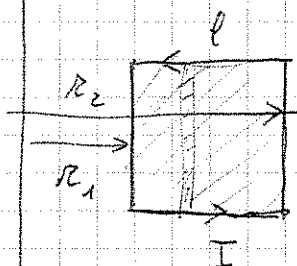
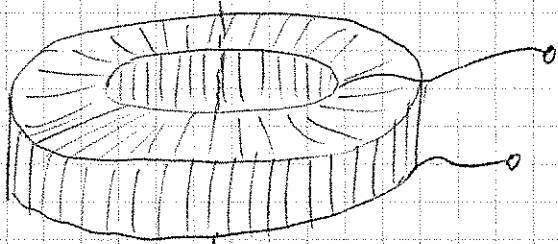
la variazione di  $I_1$  nel tempo mette in moto le cariche libere nel conduttore. Queste compiono moti circolari che dissipano energia per effetto Joule. Le piastrine si riscaldano.

Le correnti indotte nel conduttore sono dette "correnti parassite" o correnti di Foucault. A volte sono indesiderate, e volte sono utili: esempio di un freno...



Esercizio

Solenoido toroidale sezione quadrata  
calcolare l'induttanza



Campo  $\vec{B}$  :

il sistema ha simetria assiale,  $\vec{B}$  è tangente.  
Applichiamo la legge di Ampère ad un cerchio di  
raggio  $r$ , interno al toro ( $r_1 < r < r_2$ ). Allora

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I N$$

$\hookrightarrow$  numero di spire

da cui  $B(r) = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \left( = \mu_0 I n \right)$

$\hookrightarrow$  densità lineare di spire in  $r = r_1$

Se il cerchio è esterno al toro, le correnti concatenate  
è nulla e  $B$  è nulla di conseguenza.

Induttanza:  
per una singola spira

$$\begin{aligned} \Phi(B) &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{\mu_0 I N l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{1}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I N l}{2\pi} \log \left( 1 + \frac{l}{r_1} \right) \end{aligned}$$

$r_2 = r_1 + l$

$$\mathcal{E}^{(1)} = - \frac{d\Phi^{(1)}}{dt} = - \frac{\mu_0 N^2 l}{2\pi} \log\left(1 + \frac{l}{d}\right) \frac{dI}{dt}$$

↓  
singola spira

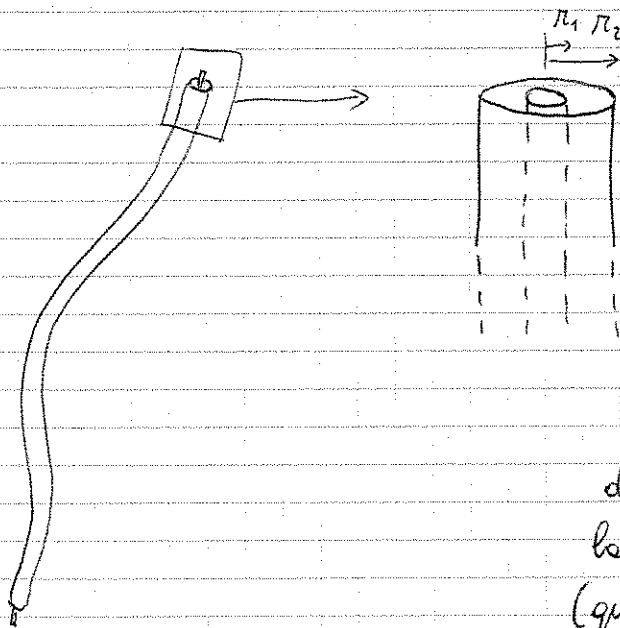
per tutte le spire

$$\mathcal{E} = N \mathcal{E}^{(1)} = - \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 l}{2\pi} \log\left(1 + \frac{l}{d}\right)}_L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 l}{2\pi} \log\left(1 + \frac{l}{d}\right)$$

Per una spira rettangolare:  $L = \frac{\mu_0 N^2 l}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

Note: cavo coassiale come toro estremamente lungo



induttanza per unità  
di lunghezza

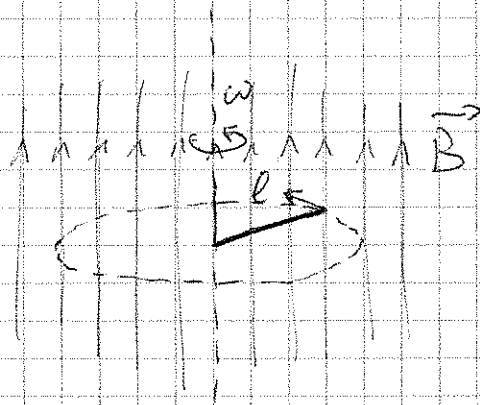
$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

dove qui si considera  $I$  come  
la corrente totale  $NI$  di prima.  
(qui si fa  $I^{\text{totale}}$  e non la corrente  
per  $I$  per singola spira!)

In realtà il cavo non è vuoto  $\rightarrow$  ci vuole un  $\mu_r$  come  
vedremo.

## Esercizio

Conduttore rettilineo di lunghezza  $l$  ruota  
con:



$$\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$|\vec{B}| = 10 \text{ T}$$

$$l = 10 \text{ cm}$$

Calcolare la f.e.m. indotta sul conduttore.

Metodi: } Lorentz  
          } Leitz

Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

forza sulle cariche del  
conduttore

con  $\vec{v} \perp \vec{B}$

e  $|\vec{v}| = \omega r$

$\hookrightarrow$  distanza  
dall'asse

dunque

$$|\vec{F}| = q \omega r B \quad \rightarrow \quad |\vec{E}| = \omega r B$$

$\vec{e}$  diretta lungo il conduttore verso l'esterno

La f.e.m. si trova integrando

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \int_0^l dr |\vec{F}(r)| = \omega B \int_0^l dr r = \frac{1}{2} \omega B l^2$$

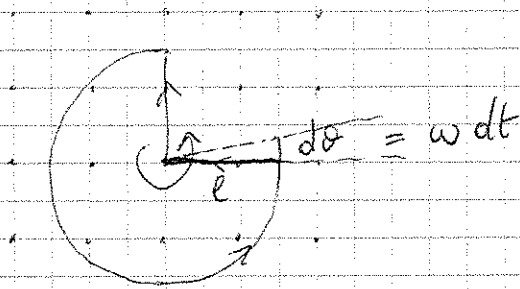
d.d.p.

numericamente  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times 10^{-2} \text{ Volt}$

$$= 0.5 \text{ Volt}$$

Levi:

Basta scegliere il percorso



Variazione del flusso:

$$d\Phi = \frac{1}{2} l^2 d\alpha B = \frac{1}{2} l^2 \omega dt B$$

da cui  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} l^2 \omega B$

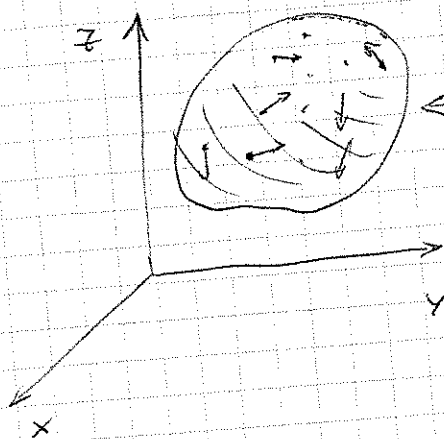
ovvero

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \omega B l^2 \quad \text{come prima}$$

il verso è giusto:  $\mathcal{E}$  cresce verso l'esterno.



# VETTORE DI POYNTING



volume  $V$  contenente cariche elettriche, correnti, campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$

Su ogni carica  $q$  in  $V$  agisce una forza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Nel tempo  $dt$  le cariche si muovono e le forze compiono un lavoro

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} + \underbrace{q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}}$$

per ogni carica.

questo lavoro è nullo perché  $\vec{v}$  e  $d\vec{r}$  sono paralleli e  $\vec{v} \times \vec{B}$  è  $\perp$  a  $d\vec{r}$

Il lavoro totale fatto su tutte le cariche in  $V$  sarà dunque

$$\delta L = \sum_{\text{cariche}} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{\text{cariche}} q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

ovvero

$$\frac{\delta L}{dt} = \sum_{\text{cariche}} q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

e se ci mettiamo nel limite di un continuo di cariche, di densità  $\rho$ :

$$\frac{\delta L}{dt} = \int_V dV \rho(\vec{r}) \vec{E} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \int_V dV \vec{E} \cdot \vec{j}(\vec{r})$$

avendo ricordato la definizione della densità di corrente  $\vec{j}$ .  
 Il lavoro fatto dai campi sulle cariche, aumenta l'energia meccanica delle cariche  $U_{\text{cariche}}$ , in modo che possiamo scrivere  $\frac{\delta L}{dt} = \frac{dU_{\text{cariche}}}{dt}$ , e la quantità  $\vec{E} \cdot \vec{j}$

assume il ruolo di potenza trasferite per unità di volume.

Si può usare la legge di Ampère-Maxwell per legare  $\vec{j}$  ai campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

da cui

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Allora

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il secondo addendo può essere riscritto così:

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial t}$$

Per il primo addendo invece si può ricorrere all'identità vettoriale

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (*)$$

Questa la dimostreremo alla fine. Per ora usiamola. In particolare, essendo  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , lo stesso può essere riscritto così:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial |\vec{B}|^2}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Mettendo assieme i due addendi si ottiene

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

Inseriamo questa espressione nell'integrale in fondo alla pagina precedente. Otteniamo

$$\frac{dU_{\text{cariche}}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V dV \left( \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) - \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

Ora riconosciamo nel primo integrando la densità di energia dei campi, così come l'avevamo scritta a p. 6.14. Dunque

$$\frac{dU_{\text{cariche}}}{dt} = - \frac{dU_{\text{campi}}}{dt} - \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} (U_{\text{cariche}} + U_{\text{campi}}) = - \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right)$$

Infine, usiamo il teorema della divergenza per l'integrale a sinistra. Se  $S$  è la superficie che racchiude  $V$ , allora

$$\frac{dU}{dt} = - \int_S \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{\sigma}$$

dove  $U = U_{\text{cariche}} + U_{\text{campi}}$  è l'energia totale in  $V$ . Il vettore

$$\vec{S} \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

è detto vettore di Poynting. Il risultato finale è che

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = - \int_S \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}}$$

ovvero, la variazione di energia in  $V$  nel tempo  $dt$  è pari al flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie che racchiude  $V$ . Il segno  $-$  è tale da aumentare  $U$  quando il flusso di  $\vec{S}$  è entrante in  $V$ , e viceversa.

Il vettore di Poynting dice quanta energia è "trasportata" dai campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . La relazione precedente esprime la conservazione dell'energia nei fenomeni elettromagnetici.

Caso particolare; nel contorno  $S$  del volume  $V$  ci sono onde elettromagnetiche, con  $\vec{E}$  perpendicolare a  $\vec{B}$  e con  $|\vec{E}_0| = c|\vec{B}_0|$ . Allora il vettore di Poynting è

$$|\vec{S}| = \frac{c}{\mu_0} |\vec{B}_0|^2 = c\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2$$

e l'energia in  $V$  aumenta proporzionalmente a  $|\vec{E}_0|^2$ . In altri termini: il flusso di energia associato ad un'onda elettromagnetica è proporzionale a  $|\vec{E}_0|^2$ .

Per concludere il discorso ci rimane da dimostrare la relazione vettoriale (\*) di p. 6.34. Dimostriamo questa:

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$ ;  $\vec{a}, \vec{b}$  qualsiasi  
Si ha

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{a} \times \vec{b})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{a} \times \vec{b})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{a} \times \vec{b})_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y} (a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z} (a_x b_y - a_y b_x) \\ &= \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) b_z + a_y \left( \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) b_y - a_z \left( \frac{\partial b_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) b_x + a_z \left( \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) b_z - a_x \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) b_y + a_x \left( \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) b_x - a_y \left( \frac{\partial b_x}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) b_x - a_x \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) b_y - a_y \left( \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) b_z - a_z \left( \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad \text{come si voleva.} \end{aligned}$$

La relazione (\*) di p. 6.34 è il caso particolare con  $\vec{a} = \vec{E}$  e  $\vec{b} = \vec{B}$ .