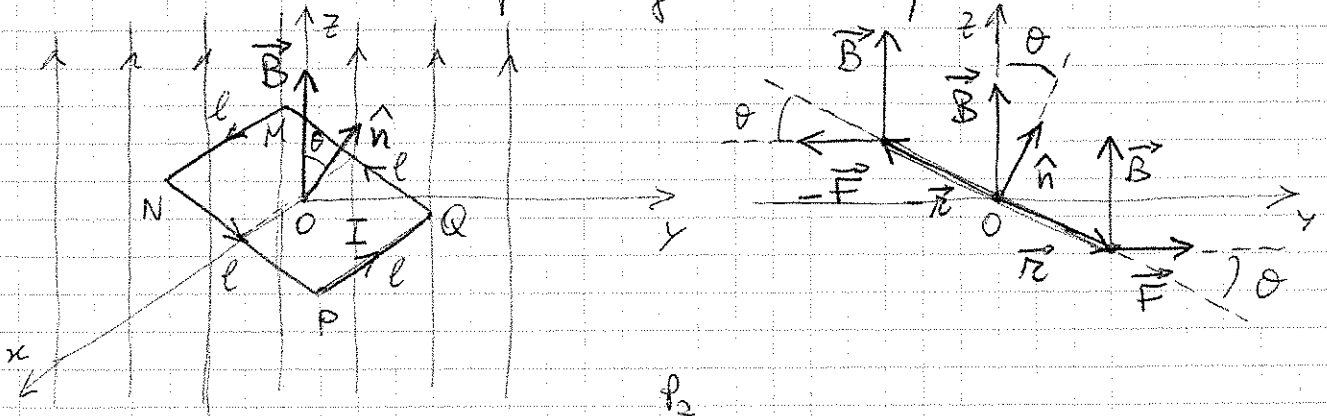


7. Magnetismo nella materia

Cominciamo con un esercizio che, apparentemente, c'entra poco con il magnetismo nella materia: mettiamo una spira conduttrice quadrata percorsa da corrente costante I in un campo magnetico uniforme; trascuriamo eventuali correnti indotte e calcoliamo le forze agenti sulla spira.



Usiamo la relazione $\vec{F} = I \int_{P_1}^{P_2} d\vec{e} \times \vec{B}$ da p. 4.17

Nei due tratti \widehat{NP} e \widehat{QM} la forza risulta diretta lungo \hat{x} e $-\hat{x}$, e la risultante è nulla. Se la spira è indeformabile, il suo effetto complessivo è nullo.

Nei tratti \widehat{MN} e \widehat{PQ} le forze sono quelle raffigurate nelle figure in alto a destra, con

$$|\vec{F}| = IB\ell$$

Queste due forze producono un momento torcente non nullo rispetto all'origine O , pari a

$$\vec{\tau} = 2 \vec{r} \times \vec{F} = 2 \frac{\ell}{2} |\vec{F}| \sin\theta \hat{x} = IB\ell^2 \sin\theta \hat{x}$$

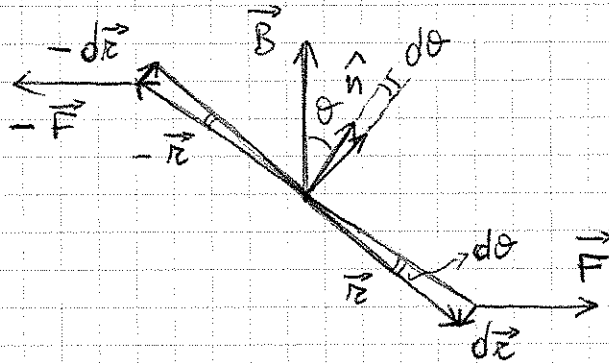
A pagina 4.21 avevamo definito il momento di dipolo magnetico associato ad una spira. Per la nostra spira quadrata, questo è dato da

$$\vec{m} = I\ell^2 \hat{n}$$

Dunque possiamo scrivere $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ che dà la stessa espressione scritta più sopra.

Questo momento $\vec{\tau}$ tende ad allineare \vec{m} con \vec{B} : la spira si trova all'equilibrio quando è posizionata nel piano perpendicolare a \vec{B} , con la corrente che scorre destrorsa rispetto a \vec{B} (regola della mano destra)

Supponiamo che \vec{m} si trovi ad un angolo θ rispetto a \vec{B} e che venga ulteriormente ruotato di un angolo $d\theta$



si ha

$$|\vec{r}| = \frac{l}{2}$$

$$|d\vec{r}| = \frac{l}{2} d\theta$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -|\vec{F}| \frac{l}{2} d\theta \sin\theta = -\frac{1}{2} I B l^2 \sin\theta d\theta$$

Il lavoro fatto dalle forze $\pm \vec{F}$ nelle rotazioni di $d\theta$ è lo stesso e la somma è

$$\delta L = 2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -I B l^2 \sin\theta d\theta$$

Possiamo introdurre un'energia potenziale della spira in modo che

$$dU = -\delta L$$

Daunque

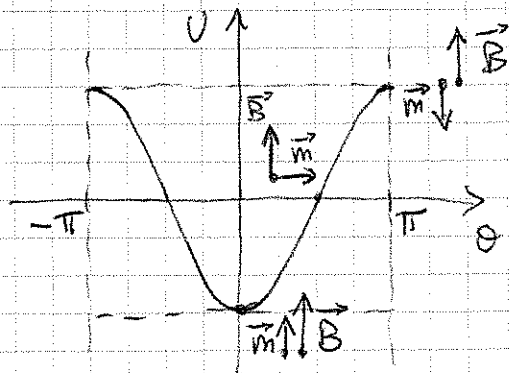
$$dU = I B l^2 \sin\theta d\theta = |\vec{r}| d\theta$$

e integrando

$$U(\theta) = \int_0^\theta d\theta' I B l^2 \sin\theta' = -I B l^2 \cos\theta$$

ovvero

$$U(\theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$



In sintesi:

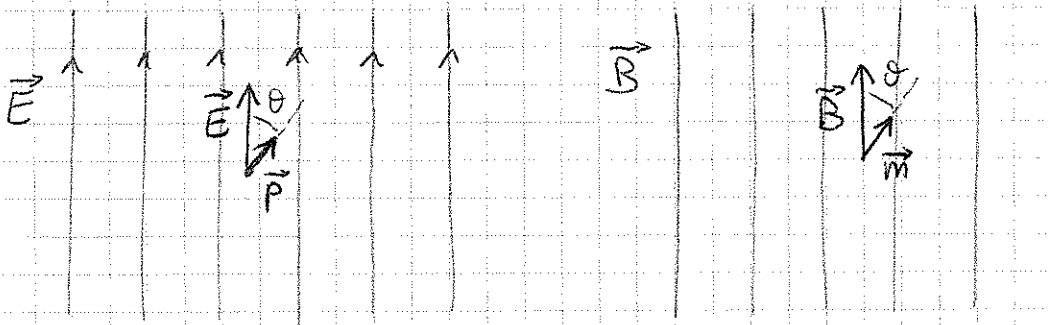
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$U(\theta) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

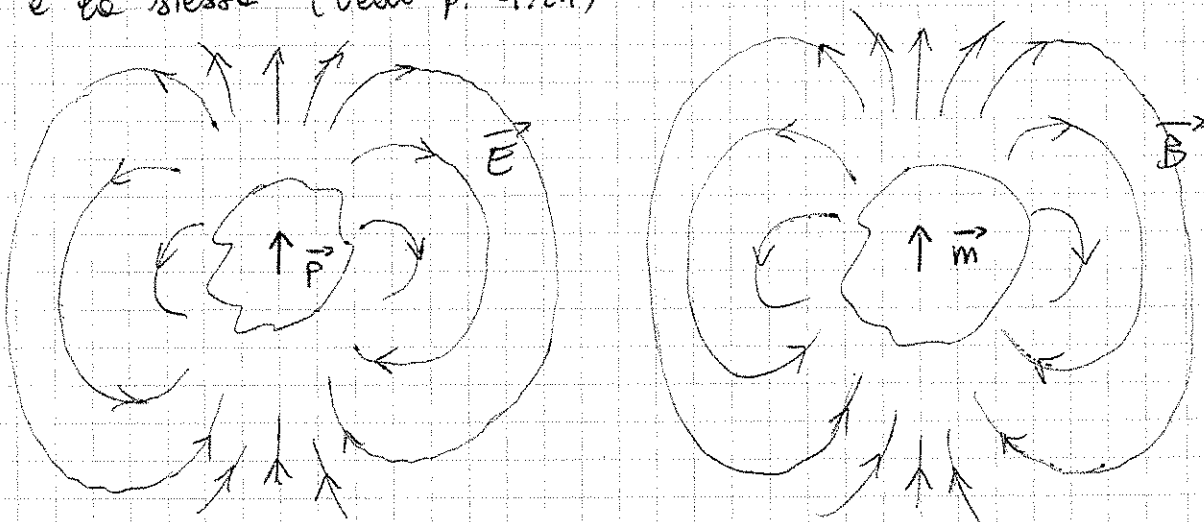
Risultati del tutto analoghi erano già stati trovati nel caso del dipolo elettrico, a p. 2.35, dove si aveva

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

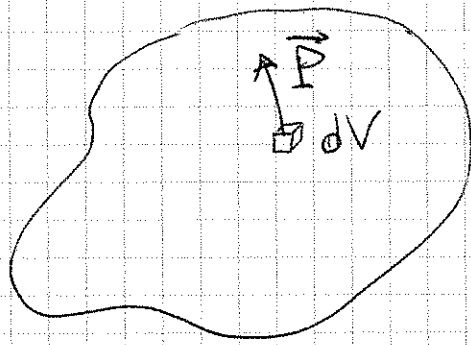


Inoltre anche le forme dei campi \vec{E} e \vec{B} asintotici, prodotti rispettivamente da un dipolo elettrico e un dipolo magnetico, è lo stesso (vedi p. 4.21)



Parlando dei dielettrici avevamo visto che molte proprietà elettriche dei materiali potevano essere interpretate assumendo che la materia si comporta come un insieme macroscopico di dipoli elettrici microscopici. Possiamo fare lo stesso per le proprietà magnetiche, usando i momenti magnetici? Sì.

Nel caso dei dielettrici:

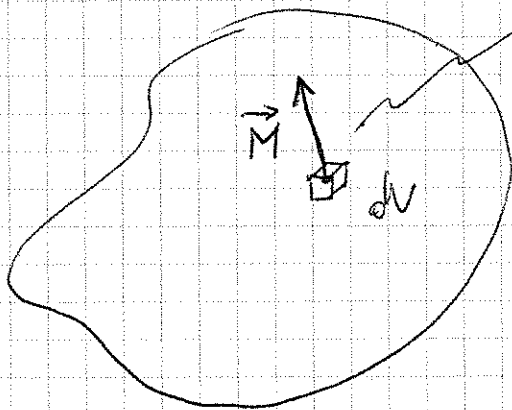


densità di polarizzazione

$$\vec{P} = \frac{1}{dV} \sum_i \vec{p}_i$$

←
somma su tutti i dipoli
elettrici \vec{p}_i in dV

Analogamente si può definire una densità di magnetizzazione



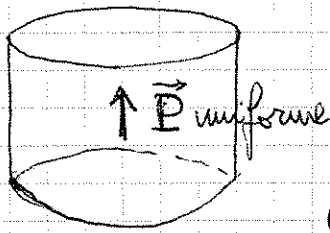
momento di dipolo associato al volume dV :
 $\vec{M} dV$

$$\vec{M} = \frac{1}{dV} \sum_i \vec{m}_i$$

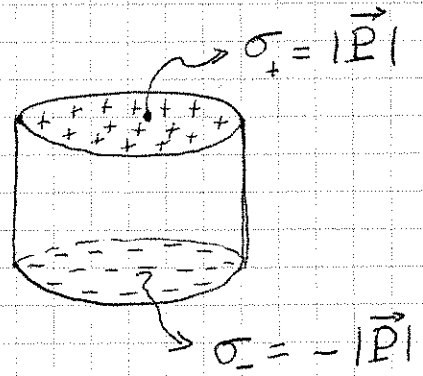
←
somma su tutti i dipoli
magnetici in dV

L'ipotesi di un modello di questo tipo è che atomi/molecole possano comportarsi come "correnti elettriche microscopiche" ~~che producono~~ e cui sono associati momenti magnetici, permanenti o indotti. L'effetto macroscopico di una collezione di molti atomi/molecole dotati di un proprio \vec{m}_i è quello di produrre una magnetizzazione macroscopica misurabile tramite la densità di magnetizzazione \vec{M} . Il problema di legare gli \vec{m}_i alle proprietà atomiche/molecolari è un problema complicato di fisica moderna (quantistica), ma la predizione del comportamento macroscopico del materiale, per un dato \vec{M} , è un problema di elettromagnetismo classico, relativamente semplice. Ragioniamo ancora per analogia con i dielettrici.

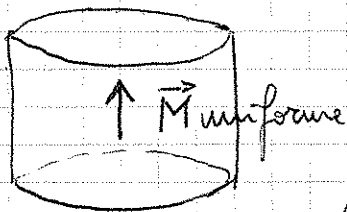
Nel caso dei dielettrici polarizzabili:



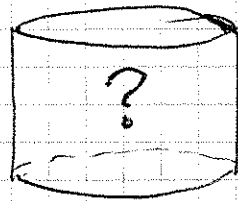
equivalente a
(ai fini del calcolo di \vec{E} all'esterno e del campo medio \vec{E} all'interno)



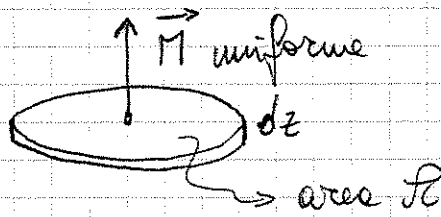
Nel caso dei materiali con magnetizzazione:



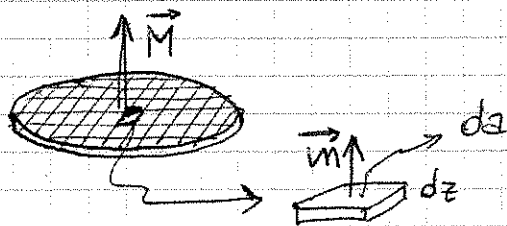
equivalente a
(ai fini del calcolo di \vec{B} all'esterno e del campo medio \vec{B} all'interno)



Per risolvere la questione consideriamo prima una piastrina di spessore dz



e suddividiamola in piastrelline infinitesime di area da



Per definizione di densità di magnetizzazione, il momento di dipolo magnetico associato alla piastrellina è

$$\vec{m} = \vec{M} dz da = \vec{M} dz dV$$

Il campo \vec{B} prodotto dalle piastrelline è quello che compete ad un dipolo magnetico $\vec{m} = M dz \vec{e}_z$ ed è identico a quello prodotto da una spira conduttrice posta sul contorno della piastrellina (vuota) e percorsa da una corrente I tale da dare lo stesso \vec{m}



Nel caso di una spira ricordiamo che, come visto a p. 4.21,

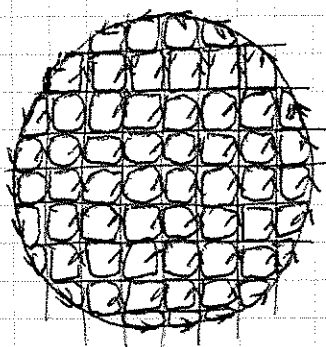
$$\vec{m} = I d\vec{s}$$

se vogliamo che \vec{m} sia lo stesso di prima, occorre che

$$I = M dz$$

Dunque, ai fini del calcolo del campo fuori dalla piastra, possiamo immaginare di sostituire ciascuna piastrellina di materiale magnetizzato con una spirale nel vuoto, avente lo stesso contorno e con una corrente $M dz$.

Viste da sopra, la piastra può essere vista così:



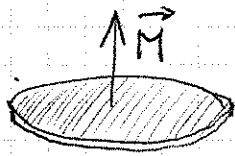
È facile vedere che all'interno tutte le correnti si compensano!

Solo quelle sulla circonferenza esterna non sono compensate.

Per il principio di sovrapposizione, il campo \vec{B} prodotto dalla piastra sarà dunque equivalente a quello prodotto da

una singola spira posta lungo il bordo esterno della piastra e in cui fluisce una corrente $I = \pi dz$. Chiamiamo tale corrente "corrente di magnetizzazione" per distinguerla da eventuali correnti di carica libere.

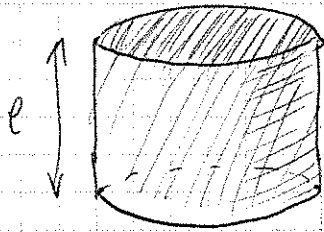
Le singole piastre equivale alla spira



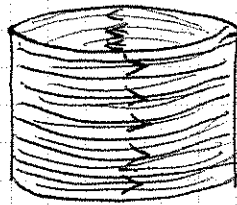
corrente di magnetizzazione per unità di lunghezza

$$I_{mag} = M dz$$

Possiamo ora vedere il cilindro magnetizzato come una somma di piastre equivalenti ad una somma di spire:



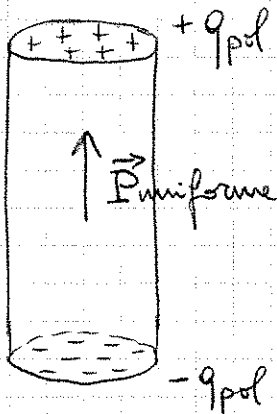
equivalente



$$I_{mag} = M l$$

In sintesi:

sostanze dielettriche:

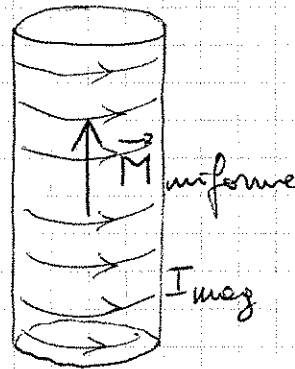


$$q_{pol} = |\vec{P}| S$$

↳ area

⚡ non sono cariche libere!

sostanze magnetiche:

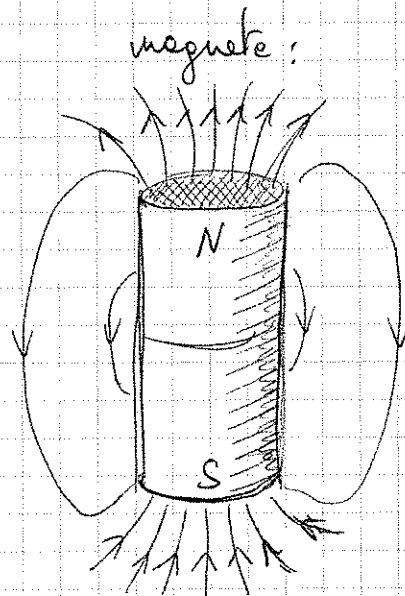
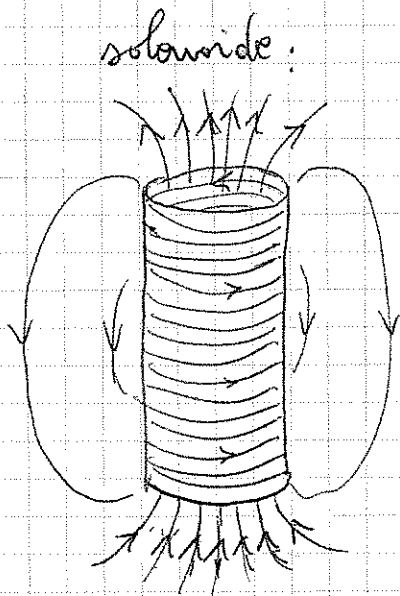


$$I_{mag} = |\vec{M}| l$$

↳ altezza

↳ non è una corrente di cariche libere!

A questo punto è immediato capire perché il campo \vec{B} prodotto da un magnete (magnetizzazione permanente) è quasi identico nelle forme e quello prodotto da un solenoide (all'esterno).



Basta immaginare il magnete come un insieme macroscopico di dipoli magnetici orientati nella direzione da S a N.

Per i dielettrici avevamo definito un campo \vec{D} in modo da riscrivere la legge di Gauss in termini delle sole cariche libere:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

avendo definito $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

da cui

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0}$$

e si definisce: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in modo che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib}$$

Inoltre esistono materiali per i quali

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

da cui $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon \epsilon_r \vec{E}$

Reasoniamo allo stesso modo per la magnetizzazione, a partire dalla legge di Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{lib}} + \vec{j}_{\text{mag}})$$

Bisogna legare \vec{j}_{mag} a \vec{M} . Si può definire la densità di corrente di magnetizzazione:

$$\vec{j}_{\text{mag}} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

analoga a $\rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ e consistente con la corrente I_{mag} già trovata nel caso del cilindro di p. 7.7 (per dimostrarlo basta verificare che la $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{mag}}$ è la versione locale della relazione integrale $\oint \vec{M} \cdot d\vec{e} = I_{\text{mag}}$, che a sua volta produce la corrente di magnetizzazione già vista per il cilindro).

dunque, inserendo la nuova definizione di \vec{j}_{mag} nella legge di Ampère:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{lib}}$$

Si può definire un nuovo campo \vec{H} così:

$$\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$$

in modo che

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}}$$

È una nuova legge di Ampère, dove entrano le correnti di cariche libere soltanto (ma al prezzo di aver inclusa la magnetizzazione \vec{M} in un nuovo campo \vec{H}).

Gli esperimenti mostrano che esistono molte sostanze per le quali

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H}$$

dove χ_m è detta suscettività magnetica e μ_r è la

permeabilità magnetica relative. χ_m e μ_r sono parametri empirici.

In tali casi si può scrivere

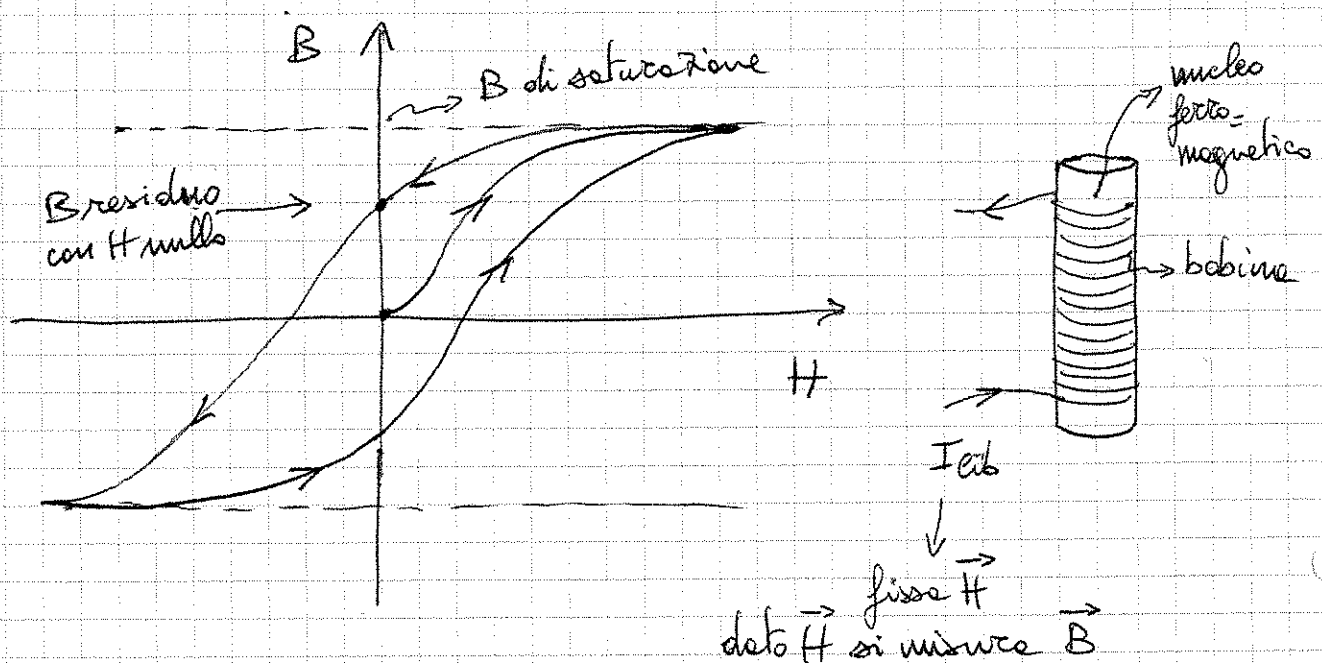
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

analoga alla

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{D}$$

Sostanze per le quali \vec{B} e \vec{H} sono direttamente proporzionali. Tra loro sono i paramagnetici e i diamagnetici. Nei paramagnetici si ha debole magnetizzazione nella direzione del campo esterno. Nei diamagnetici si ha debole magnetizzazione in direzione opposta a quella del campo esterno.

Ci sono poi sostanze in cui la magnetizzazione (indotta o permanente) può essere molto grande, in modo tale che il campo \vec{B} è molto più grande di \vec{H} . Tali sostanze sono dette ferromagnetici. Per essi la relazione tra \vec{B} e \vec{H} è non banale e tipicamente è rappresentata da "cicli di isteresi" di questo tipo:



Un ferromagnete in una bobina amplifica il campo \vec{B} prodotto rispetto a quello dovuto alle sole correnti libere. Lo può amplificare di alcuni ordini di grandezza. A corrente nulla il campo \vec{B} può essere non nullo per effetto d'isteresi

ciclo largo + grande B residuo \rightarrow materiali "duri"
 ciclo stretto + piccolo B residuo \rightarrow materiali "dolci"

Vari commenti finali

i) Equazioni di Maxwell per \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H}

Le equazioni di Maxwell che già conosciamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

valgono sempre, ma sono difficili da applicare in casi pratici in presenza di materia (sostanze dielettriche e magnetiche)

Per i materiali per i quali si possono definire le densità di polarizzazione \vec{P} e di magnetizzazione \vec{M} , conviene in pratica riscrivere le equazioni usando

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Si trova

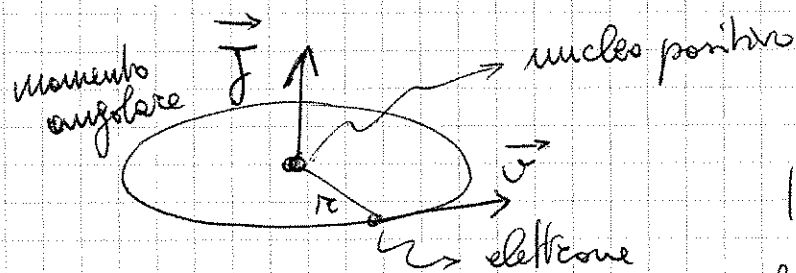
$$\left. \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{lib}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} (*)$$

Queste sono utili in situazioni pratiche. Tuttavia bisogna ricordarsi bene che si tratta di equazioni fenomenologiche,

o semiempiriche, laddove coinvolgono campi in cui è racchiusa un'informazione empirica sui materiali usati. Storicamente è stato dato un peso eccessivo alle equazioni (e) per ragioni legate allo sviluppo storico dei concetti (tipico è il caso del nome "vettore di spostamento" che rivela l'uso di concetti poi caduti in disuso).

ii) Da dove viene il momento di dipolo "microscopico"?

Modello classico di atomo



$$|\vec{J}| = m v r$$

frequenza di rotazione

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$

Nell'unità di tempo l'elettrone passa ν volte per un punto dell'orbita

↳ equivale ad una corrente elettrica

$$I = -q_e \nu = -\frac{q_e v}{2\pi r}$$

con $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ C carica dell'elettrone.

Se consideriamo l'orbita stazionaria come una spira di corrente I di area $A = \pi r^2$, ad essa sarà associato un momento di dipolo magnetico

$$|\vec{m}| = \pi r^2 I = -\pi r^2 \frac{q_e v}{2\pi r} = -\frac{q_e v r}{2} = -\frac{q_e}{2m} |\vec{J}|$$

ovvero

$$\vec{m} = -\left(\frac{q_e}{2m}\right) \vec{J}$$

$\mu_B =$ magnetone di Bohr

Se gli elettroni si muovono su orbite con momento angolare \vec{J} non nullo, allora all'atomo può essere associato un momento magnetico \vec{m} proporzionale al \vec{J} dell'atomo stesso. Tale \vec{m} è orientabile tramite un campo magnetico esterno.

Benché il modello classico di atomo abbia dei limiti (non spiega la stabilità degli atomi e l'esistenza di stati stazionari, oltre a molte altre proprietà...), l'affermazione precedente rimane vera anche in modelli più realistici (meccanica quantistica):

$$\vec{m} = -g \left(\frac{qe}{2m} \right) \vec{J}$$

\swarrow \rightarrow magnetone di Bohr
 fattore gisomagnetico

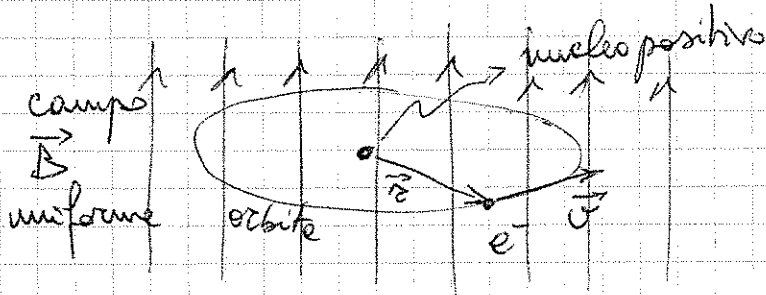
Dunque atomi/molecole possiedono $\vec{m} \neq 0$ se $\vec{J} \neq 0$. Il momento magnetico degli atomi/molecole può essere orientato e/o indotto tramite un campo magnetico esterno, in modo analogo a quanto succede per la polarizzazione elettrica.

iii) I paramagnetici sono sostanze in cui atomi/molecole hanno un momento magnetico \vec{m} permanente che si orienta in un campo magnetico esterno, come la spina di p. 7.1, per minimizzare l'energia potenziale

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Al solito, come nei dielettrici con \vec{d} permanente, ci saranno alcuni meccanismi che tendono a ostacolare l'orientamento dei dipoli (ad esempio, l'agitazione termica ad una data temperatura T)

iv) I diamagneti sono sostanze in cui il momento magnetico su scala microscopica è assente in assenza di campo esterno e viene indotto da quest'ultimo, quando c'è. Senza entrare nei dettagli, facciamo un calcolo con un modellina classico di atomo



supponiamo che \vec{B} abbia intensità crescente nel tempo, da 0 ad un valore finito B in un certo intervallo di tempo.

La variazione $B(t)$ simula l'effetto di inserire l'atomo in un campo \vec{B} inizialmente assente. Nel nostro modello teniamo l'orbita fissa e vediamo cosa succede al momento angolare \vec{J} dell'elettrone.

Faraday dice che
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

nella forma integrale:

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{e}}_{2\pi R E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$\nearrow \pi R^2 B(t)$

ovvero
$$E = -\frac{R}{z} \frac{dB(t)}{dt}$$

Questo campo accelera l'elettrone lungo l'orbita essendo

$$\vec{v} = \frac{1}{z} \left(q_e \frac{R^2}{z} \frac{dB}{dt} \right)$$

il momento delle forze sull'elettrone

ovvero anche

$$\vec{v} = q_e \frac{R^2}{z} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Questo $\vec{\tau}$ produce una variazione del momento angolare

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

perciò:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{q_e r^2}{2} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

che integrata nel tempo da:

$$\Delta\vec{J} = \frac{q_e r^2}{2} \vec{B}$$

\hookrightarrow campo finale
 \hookrightarrow variazione del momento angolare

Ora ricordiamo che

$$\vec{m} = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \vec{J}$$

da cui

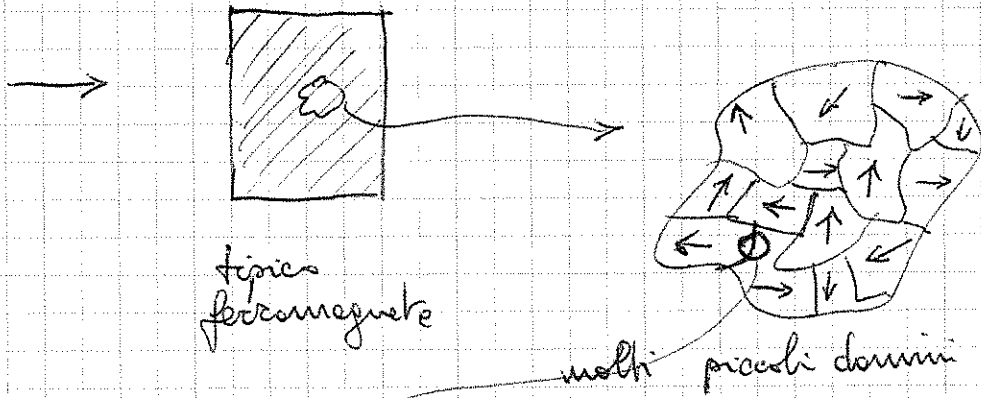
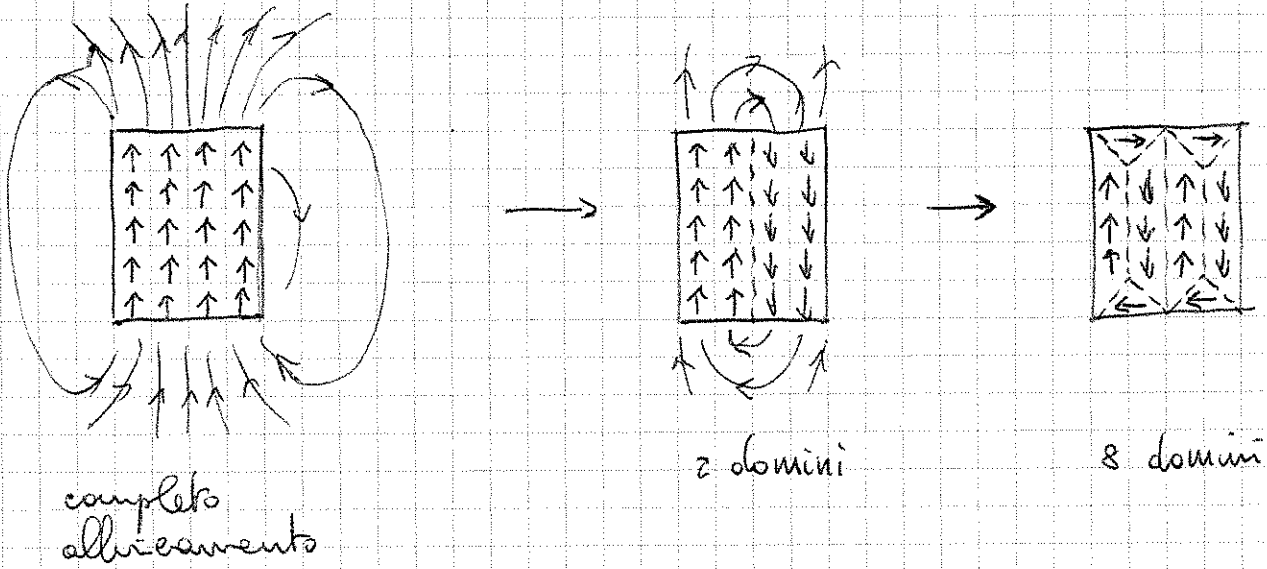
$$\begin{aligned} \Delta\vec{m} &= -g \frac{q_e}{2m} \Delta\vec{J} \\ &= -g \frac{q_e^2 r^2}{4m} \vec{B} \end{aligned}$$

Questo è il momento magnetico indotto dalla variazione (eccitazione) di \vec{B} . Si noti che $\Delta\vec{m}$ è opposto a \vec{B} !

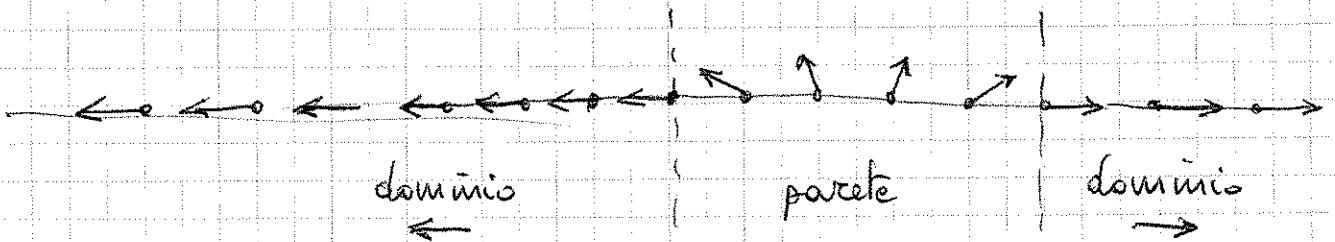
Il modello è classico e, per questo, è qualitativo. Occorrerebbe la meccanica quantistica. Tuttavia rimane vero che inserendo una sostanza diamagnetica in un campo magnetico esterno, la sostanza si magnetizza nel verso opposto al campo, al contrario dei paramagnetici.

v) I ferromagnetici sono sostanze in cui gli atomi/molecole posseggono un \vec{m} permanente, come i paramagnetici, ma in aggiunta e ciò esiste anche una interazione dipolo-dipolo che tende ad allineare spontaneamente dipoli vicini.

Anche in assenza di campo esterno, l'interazione dipolo-dipolo favorirebbe l'allineamento di tutti gli \vec{m} della sostanza. Tuttavia tale allineamento porterebbe a creare un forte campo all'esterno, il quale costa energie. Per bilanciare costi e benefici, il materiale forma "domini" magnetici, cioè zone allineate separate da pareti (pareti di Bloch)



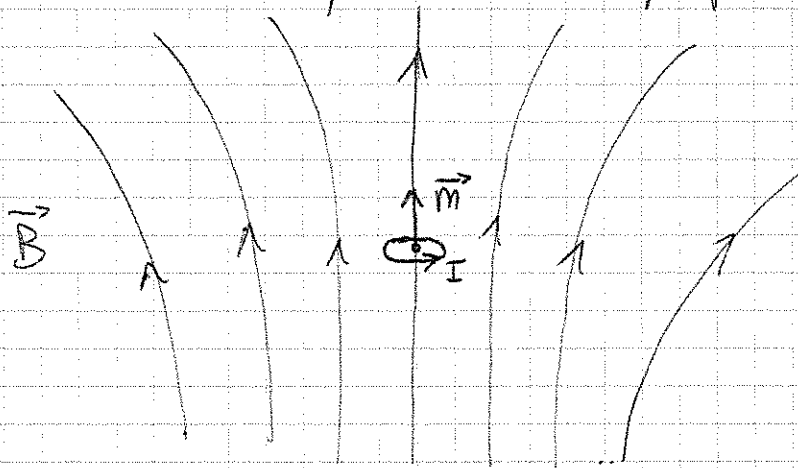
parete di Bloch:



Un campo magnetico esterno agente su un ferromagnete produce uno spostamento delle pareti di Bloch tale da aumentare

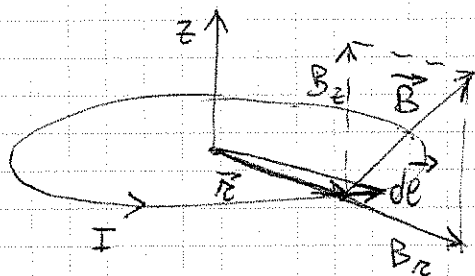
il volume dei domini allineati con il campo e diminuire quelli discordi al campo esterno. Il processo fa guadagnare energia tramite $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, ma costa energia perché le pareti di Bloch possono essere "bloccate" da impurità o da imperfezioni del reticolo cristallino. L'energia dissipata nello spostamento delle pareti è la causa del meccanismo d'isteresi che porta anche al campo residuo e ai magneti permanenti. Le sostanze, infatti, tendono a mantenere la magnetizzazione acquisita, qualora il costo per ri-spostare le pareti di Bloch sia grande.

Infine, concludiamo con un esercizio. Pensiamo un momento magnetico \vec{m} e lo mettiamo in un campo magnetico \vec{B} non uniforme. Per un dato \vec{m} ci calcoliamo le forze. Per essere più espliciti, trattiamo il caso di una piccola spira percorsa da corrente I e di area A , tale che $\vec{m} = IA \hat{n}$, e mettiamo la spira in un campo fatto così:



Calcoliamo la forza agente sulla spira per effetto delle non-omogeneità del campo. Supponiamo che la spira sia indeformabile e che I sia costante. Usiamo la relazione di p. 4.17 per la forza sulla spira.

$$d\vec{F} = I d\vec{e} \times \vec{B} = I d\vec{e} \times (\hat{r} B_r + \hat{z} B_z)$$



ovvero

$$d\vec{F} = \hat{r} (I dl B_z) - \hat{z} (I dl B_r)$$

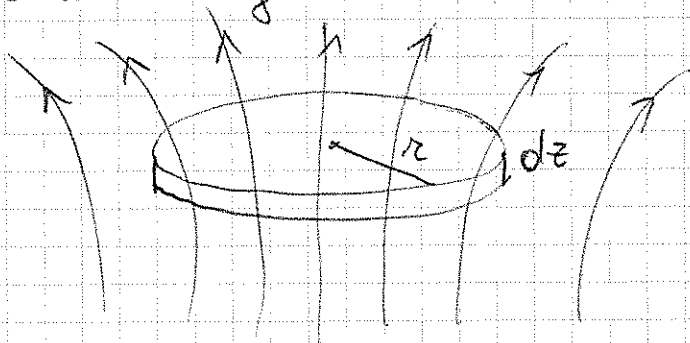
queste non
interessano se
la spira è
indeformabile

Integrando e sfruttando la simmetria assiale del campo:

$$\vec{F} = -2\pi r I B_r \hat{z}$$

D'altra parte B_r e B_z non sono indipendenti. Sono legati da $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Consideriamo il seguente volumetto cilindrico



Si ha

$$0 = \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi r B_r dz + \pi r^2 [B_z(z+dz) - B_z(z)]$$

$$\text{ovvero } 2\pi r B_r dz = \pi r^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dz$$

$$\text{da cui } B_r = -\frac{r}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)$$

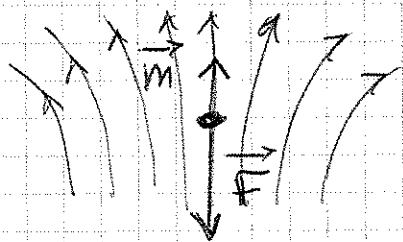
che inserita nell'espressione della forza dà:

$$F_z = \underbrace{\pi r^2 I}_R \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

che può essere scritta nella forma

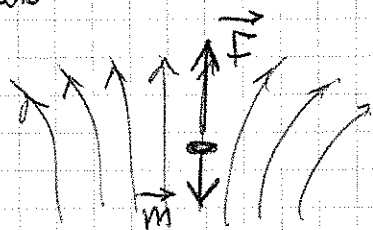
$$F_z = |\vec{m}| \frac{\partial B_z}{\partial z} = m_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Se \vec{m} è concorde a \vec{B} , allora $m_z > 0$ e, essendo $\frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$ si ha una forza verso il basso

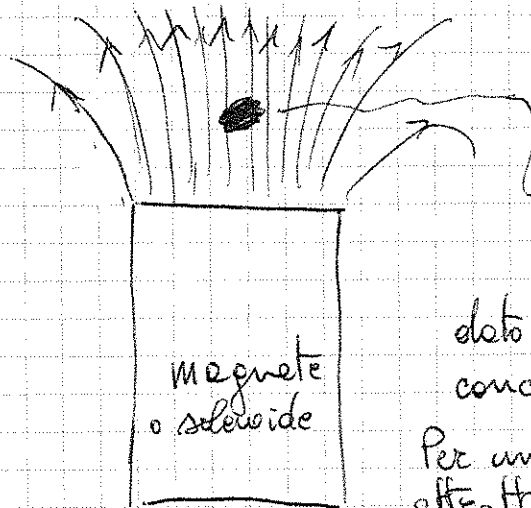


← vale per un \vec{m} generico, non solo per una spira di corrente

Se \vec{m} è discorde a \vec{B} , allora $m_z < 0$ e la forza è verso l'alto



Questo modello spiega bene un fatto osservato:



se paramagnetico: debole attrazione
se diamagnetico: debole repulsione

dato che para- e dia- hanno \vec{m} concorde e discorde, rispettivamente.

Per un ferromagnete la forza è fortemente attrattiva o repulsiva a seconda della "polarità" (cioè il verso di \vec{m}).

