Moto in presenza di attrito viscoso

Problema

Una particella di massa m viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 in presenza della gravità e di attrito viscoso. Siano noti i valori dell'accelerazione di gravità g, del coefficiente di resistenza viscosa K e del coefficiente di viscosità η. Calcolare il tempo a cui la particella raggiunge la quota massima e il valore di quest'ultima e confrontarli con il caso in cui l'attrito sia assente. Quale errore si fa nel trascurare l'attrito nel calcolo della quota massima?

Soluzione

Prima scegliamo le coordinate. Il moto è puramente unidimensionale. Possiamo chiamare y la quota misurata a partire dalla quota iniziale $y = 0$. La velocità $v = dy/dt$ è positiva se diretta verso l'alto.

Poi individuiamo le forze che agiscono sulla particella: la forza peso mg verso il basso e l'attrito viscoso $-K\eta v$. Il verso della forza d'attrito è sempre opposto a quello di v e, dunque, la componente verticale della forza è negativa nella fase di salita e positiva nella fase di discesa[(1)]. Dunque l'equazione del moto è

$$ma = -mg - K\eta v \tag{1}$$

e possiamo riscriverla nella forma

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - K\eta v \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m}\left(\frac{mg}{K\eta} + v\right) \ . \tag{3}$$

Un semplice controllo dimensionale dell'equazione ci fa notare che il primo addendo nella parentesi ha le dimensioni di una veloctà; lo chiamiamo

$$v_l = \frac{mg}{K\eta} \ . \tag{4}$$

Il fattore davanti alla parentesi invece ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, e possiamo introdurre un tempo τ definito da

$$\tau = \frac{m}{K\eta} = \frac{v_l}{g} \ . \tag{5}$$

In questo modo l'equazione del moto assume la forma

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}(v_l + v)} \ . \tag{6}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine nell'incognita $v(t)$. Per trovare la soluzione possiamo riscriverla in questo modo

$$\frac{1}{v_l + v}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} \tag{7}$$

e integrare a destra e sinistra in dt

$$\int \frac{1}{v_l + v}\frac{dv}{dt}dt = -\int \frac{dt}{\tau} \,. \tag{8}$$

Ora usiamo le regole per la sostituzione di variabile nell'integrale a sinistra,

$$\int \frac{dv}{v_l + v} = -\int \frac{dt}{\tau} \,, \tag{9}$$

e integriamo:

$$\ln|v_l + v| = -\frac{t}{\tau} + \text{cost} \,. \tag{10}$$

Se $v > -v_l$ l'argomento del modulo è positivo. Possiamo quindi togliere il modulo e scrivere

$$\ln(v_l + v) = -\frac{t}{\tau} + \text{cost} \,. \tag{11}$$

A questo punto prendiamo l'esponenziale di entrambi i membri dell'equazione per trovare

$$v_l + v = Ce^{-t/\tau} \,, \tag{12}$$

dove $C = e^{\text{cost}}$ è la costante d'integrazione da fissare con le condizioni iniziali. Inserendo nell'espressione precedente la velocità $v = v_0$ at tempo $t = 0$, si trova $C = v_l + v_0$. Dunque la soluzione cercata è

$$\boxed{v(t) = -v_l + (v_l + v_0)e^{-t/\tau}} \,. \tag{13}$$

A tempi lunghi ($t \gg \tau$) la velocità si avvicina asintoticamente al valore $-v_l$. Si capisce quindi il significato del parametro v_l: esso rappresenta la velocità limite di caduta, che è negativa in quanto la particella, dopo essere salita, cade e, asintoticamente, cade a velocità costante. La soluzione che abbiamo trovato comprende anche il caso particolare della caduta da fermo, corrispondente alla scelta $v_0 = 0$, per cui si ottiene

$$v(t) = -v_l\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \,. \tag{14}$$

Non comprende invece il caso in cui la velocità iniziale sia negativa e maggiore in modulo a v_l (cioè $v_0 < -v_l$). In tal caso, infatti, l'argomento del valore assoluto nell'equazione (10) sarebbe negativo e la soluzione sarebbe diversa dalla (13), ma solo per il segno davanti al secondo addendo.

A partire dall'espressione (13) possiamo ricavare il tempo che passa dall'istante iniziale fino a quando la particella salendo perde tutta la sua velocità. Se chiamiamo $\bar{t}$ questo tempo, la condizione è $v(\bar{t}\,) = 0$, che diventa

$$e^{-\bar{t}/\tau} = \frac{v_l}{v_l + v_0}\,, \tag{15}$$

ovvero

$$\bar{t} = -\tau \ln\left(\frac{v_l}{v_l + v_0}\right) \tag{16}$$

e infine

$$\boxed{\bar{t} = \frac{v_l}{g} \ln\left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right)}\,, \tag{17}$$

avendo ricordato che $\tau = v_l/g$.

Ora che abbiamo $\bar{t}$ possiamo anche calcolarci la quota massima $\bar{y} = y(\bar{t}\,)$ raggiunta dalla particella. A tale scopo possiamo usare la relazione

$$\bar{y} = \int_0^{\bar{t}} v(t)\,dt = \int_0^{\bar{t}} \left[-v_l + (v_l + v_0)e^{-t/\tau}\right] dt \tag{18}$$

da cui, integrando, si ottiene

$$\bar{y} = -v_l\bar{t} - \tau(v_l + v_0)\left(e^{-\bar{t}/\tau} - 1\right) = -v_l\bar{t} + v_0\tau\,, \tag{19}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la relazione (15). Ricordando le espressioni per τ e $\bar{t}$, possiamo scrivere la quota massima in questo modo(2):

$$\boxed{\bar{y} = \frac{v_0 v_l}{g}\left[1 - \frac{v_l}{v_0}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right)\right]}\,. \tag{20}$$

Le soluzioni trovate per $\bar{t}$ e $\bar{y}$ possono essere confrontate con gli analoghi risultati del problema balistico in assenza di attrito. In tal caso, il tempo di salita vale $t_0 = v_0/g$, che equivale a metà del tempo di volo in una traiettoria parabolica con ritorno alla stessa quota di partenza. Graficamente, il tempo v_0/g corrisponde all'intersezione della retta $v(t) = v_0 - gt$ con l'asse dei tempi nel diagramma t-v. La quota massima è $\bar{y}_0 = v_0^2/(2g)$ e corrisponde all'area del triangolo sotteso dalla stessa retta (si veda la linea tratto-punto nella figura qui sotto). Dunque, l'errore che si fa trascurando l'attrito è dato dalla differenza $\Delta\bar{y} = \bar{y}_0 - \bar{y}$. Usando le espressioni precedenti, l'errore relativo diventa

$$\boxed{\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}_0} = 1 - \frac{2v_l}{v_0}\left[1 - \frac{v_l}{v_0}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right)\right]}\,. \tag{21}$$

Possiamo verificare se le soluzioni trovate in presenza di viscosità convergono alle soluzioni note in assenza di viscosità(3). Per farlo occorre studiare

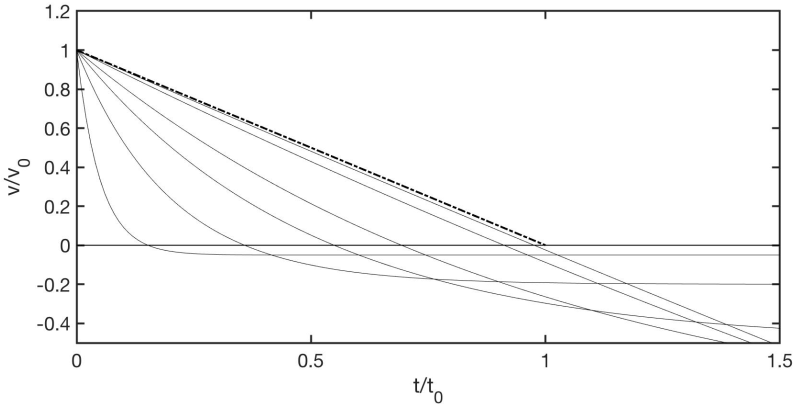

Figura 1: Questo è il grafico del rapporto v/v_0 in funzione di t/t_0, dove $t_0 = v_0/g$. Il segmento rettilineo indicato con il tratto-punto rappresenta il moto verticale senza attrito, con $v = v_0 - gt$. Le curve sottili corrispondono alla soluzione (13) per valori crescenti del rapporto v_l/v_0, che corrispondono ad una viscosità decrescente. A partire dalla prima curva a sinistra i valori sono $v_l/v_0 = 0.05, 0.2, 0.5, 1, 5, 20$. Il tempo $\bar{t}$ è determinato dall'intersezione delle curve con l'asse orizzontale. La quota massima $\bar{y}$ è l'area compresa tra ciascuna curva e l'asse orizzontale.

il comportamento delle espressioni incorniciate qui sopra nel limite $K\eta \to 0$. In questo limite si ha $\tau \to \infty$ e $v_l \to \infty$ e dunque, per un qualsiasi valore ragionevole di v_0 e per tempi dell'ordine di t_0 (il tempo di salita in assenza di attrito), si avrà $t/\tau \ll 1$ e $v_0/v_l \ll 1$. Si tratta quindi di andare a vedere come si comportano gli esponenziali del tipo e^{-x} e i logaritmi del tipo $\ln(1+x)$ per x piccoli[(4)]. Lo sviluppo di queste funzioni nell'intorno di $x = 0$ dà

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots \; ; \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \, . \tag{22}$$

Quindi, se prendiamo la velocità $v(t)$ data in equazione (13) e usiamo lo sviluppo dell'esponenziale troncato al primo ordine nel parametro piccolo t/τ, troviamo

$$v(t) \simeq -v_l + (v_l + v_0)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \, . \tag{23}$$

Poi ricordiamo che $\tau = v_l/g$, in modo che

$$v(t) \simeq -v_l + (v_l + v_0)\left(1 - \frac{gt}{v_l}\right) = v_0 - \left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right) gt \tag{24}$$

e infine usiamo il fatto che $v_0/v_l \ll 1$, per scrivere il risultato finale

$$v(t) \simeq v_0 - gt \tag{25}$$

che corrisponde al moto balistico in assenza di attrito. Analogamente possiamo prendere l'espressione del tempo di salita $\bar{t}$ in (17) e sviluppare il logaritmo al primo ordine nel parametro piccolo v_0/v_l, in modo che

$$\bar{t} \simeq \frac{v_l}{g}\frac{v_0}{v_l} = \frac{v_0}{g} = t_0 \tag{26}$$

che di nuovo coincide con il caso del moto senza attrito, come dev'essere. Infine per la quota massima $\bar{y}$ si ha

$$\bar{y} \simeq \frac{v_0 v_l}{g}\left[1 - \frac{v_l}{v_0}\left(\frac{v_0}{v_l} - \frac{v_0^2}{2v_l^2}\right)\right] = \frac{v_0^2}{2g} = \bar{y}_0\,. \tag{27}$$

Ne concludiamo che le soluzioni generali ottenute prima sono consistenti con quanto ci aspettiamo nel limite in cui l'attrito svanisce. Notiamo di passaggio che, per trovare il limite corretto per la quota, abbiamo dovuto usare lo sviluppo del logaritmo fino al secondo ordine.

È interessante vedere cosa succede anche nel limite opposto, quando la viscosità è grande, che corrisponde ad una velocità limite molto piccola e un tempo τ molto piccolo. Ci aspettiamo che, una volta lanciata con velocità v_0 verso l'alto, la particella si fermi in un tempo breve avendo percorso uno spazio breve. Per quanto riguarda il tempo $\bar{t}$, possiamo scrivere l'espressione (17) nella forma

$$\bar{t} = \frac{v_0}{g}\frac{v_l}{v_0}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right) \tag{28}$$

e considerare il limite $v_0/v_l \gg 1$. Si vede che $\bar{t}$ diventa un prodotto del tipo $0 \cdot \infty$, in quanto l'argomento del logaritmo cresce all'infinito, mentre il fattore davanti al logaritmo tende a zero. La situazione è formalmente la stessa della funzione $(1/x)\ln x$ per $x \to \infty$ e il limite dà zero, dato che la funzione logaritmo $f(x) = \ln x$ cresce più lentamente della funzione $f(x) = x$. Dunque $\bar{t}$ tende a zero, come ci aspettavamo se la viscosità diventa grande. Analogamente per la quota $\bar{y}$, possiamo scrivere

$$\bar{y} = \frac{v_0^2}{g}\frac{v_l}{v_0}\left[1 - \frac{v_l}{v_0}\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right)\right] \tag{29}$$

e notare che il secondo membro nella parentesi quadra svanisce nel limite $v_0/v_l \to \infty$ e il fattore davanti alla parentesi pure si annulla, così che $\bar{y} \to 0$, come ci si aspetta.

Torniamo al limite precedente, in cui la viscosità è piccola e la quota $\bar{y}$ è quasi uguale a quella che si avrebbe in assenza di attrito, $\bar{y}_0$. Supponiamo di ragionare in questi termini: dato un corpo di massa m e coefficiente di resistenza viscosa K, lanciato verso l'alto in un fluido con viscosità η, in quale misura possiamo trascurare l'attrito nella descrizione del moto? Per rispondere a questa domanda occorre andare a vedere cosa succede alla differenza relativa $\Delta\bar{y}/\bar{y}_0$ quando l'attrito è piccolo ma non nullo. A tale scopo notiamo che, nel limite di piccolo attrito, il rapporto v_0/v_l è molto minore di 1. Conviene quindi espandere il risultato generale (21) una volta espresso in funzione del parametro piccolo v_0/v_l. Dall'espansione del logaritmo si ottiene

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}_0} \simeq 1 - \frac{2v_l}{v_0}\left\{1 - \frac{v_l}{v_0}\left[\frac{v_0}{v_l} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{v_l}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{v_0}{v_l}\right)^3\right]\right\} . \tag{30}$$

In questa espressione tutti i termini si cancellano tranne uno:

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}_0} \simeq \frac{2}{3}\left(\frac{v_0}{v_l}\right) . \tag{31}$$

Quindi, se l'attrito è piccolo, l'errore relativo che si commette nel trascurarlo nel calcolo della quota massima è pari ai $2/3$ del rapporto tra velocità iniziale e velocità limite. Notiamo che per arrivare a questo risultato abbiamo dovuto risolvere dapprima l'equazione del moto per $v(t)$, poi integrare la soluzione per ricavare $\bar{y}$ e infine espandere nel parametro piccolo v_0/v_l, tenendo l'espansione del logaritmo fino al terz'ordine.

Avremmo potuto affrontare la questione in modo diverso. Se il problema era capire quando l'attrito è trascurabile e quando non lo è, avendo a disposizione lo stato iniziale, $v = v_0$ in $y = 0$, e lo stato finale, $v = 0$ in $y = \bar{y}$, passare attraverso la soluzione completa del problema in funzione del tempo forse non era necessario. Potevamo evitare di tirare in ballo il tempo integrando direttamente l'equazione del moto nello spazio. Infatti, possiamo prendere l'equazione di Newton nella forma (6) e, invece di integrarla in dt, integrarla in dy:

$$\int_0^{\bar{y}} \frac{dv}{dt}\, dy = -\frac{1}{\tau}\int_0^{\bar{y}} (v_l + v)\, dy . \tag{32}$$

Per definizione di velocità possiamo scrivere $dy = vdt$ e l'integrale di sinistra diventa

$$\int_0^{\bar{y}} \frac{dv}{dt}\, dy = \int_0^{\bar{t}} \frac{dv}{dt} v\, dt = \int_{v_0}^{0} v\, dv = -\frac{v_0^2}{2} , \tag{33}$$

dove abbiamo anche usato la regola per il cambio di variabile nell'integrale. Dunque l'equazione di prima diventa

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\bar{y}} (v_l + v)\, dy , \tag{34}$$

ovvero

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{v_l\bar{y}}{\tau} + \frac{1}{\tau}\int_0^{\bar{y}} v\ dy = g\bar{y} + \frac{g}{v_l}\int_0^{\bar{y}} v\, dy , \tag{35}$$

da cui, dividendo per g e ricordando che $\bar{y}_0 = v_0^2/(2g)$, si ha

$$\bar{y}_0 = \bar{y} + \frac{1}{v_l}\int_0^{\bar{y}} v\, dy . \tag{36}$$

Se vogliamo la soluzione esatta, il problema è complicato tanto quanto lo era prima, o di più, dato che la funzione da integrare è la velocità in funzione della quota, che non conosciamo, a meno di non risolvere completamente l'equazione del moto per $v(t)$ e $y(t)$ ed eliminare il tempo dalle due. Ma se invece della soluzione esatta ci basta una soluzione approssimata, allora possiamo ragionare in questo modo: l'integrale a destra ha due valori estremi, che corrispondono al caso in cui la velocità è sempre uguale al suo valore iniziale v_0 oppure al caso in cui è sempre uguale al suo valore finale $v = 0$. In questi due casi l'integrale fornisce i due valori $v_0\bar{y}$ e 0. Nel secondo caso si ha $\bar{y} = \bar{y}_0$, che è il valore massimo della quota possibile; nel primo caso invece si ottiene la diseguaglianza

$$\bar{y}_0 \leq \bar{y} + \frac{v_0}{v_l}\bar{y} = \bar{y}\left(1 + \frac{v_0}{v_l}\right) , \tag{37}$$

da cui

$$\bar{y} \geq \frac{\bar{y}_0}{1 + \frac{v_0}{v_l}} , \tag{38}$$

ovvero

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}_0} \leq \frac{\frac{v_0}{v_l}}{1 + \frac{v_0}{v_l}} . \tag{39}$$

Se la viscosità è piccola, allora il secondo addendo a denominatore è trascurabile rispetto a 1 e così otteniamo il risultato finale

$$\frac{\Delta\bar{y}}{\bar{y}_0} \leq \frac{v_0}{v_l} . \tag{40}$$

Questa è la stima approssimata che cercavamo. Nel gergo della fisica, abbiamo trovato un "upper bound" alla quantità che ci interessava, l'errore relativo che si fa nella misura della quota se si trascura l'attrito. Il valore precedentemente trovato in (31) è consistente con questa diseguaglianza. In pratica, svolgere il calcolo dell'integrale in (36), risolvendo per intero il problema del moto della particella nel tempo, darebbe un fattore moltiplicativo 2/3 davanti a v_0/v_l, che invece si perde approssimando la velocità con il suo valore massimo, ma l'ordine di grandezza è lo stesso.

Consideriamo ad esempio una pallina lanciata verso l'alto con velocità $v_0 = 4$ m/s. In assenza di attrito raggiungerebbe una quota di circa 80 cm. Per palline sferiche in regimi di velocità di quest'ordine, il coefficiente di resistenza viscosa è legato al raggio R dalla relazione $K = 6\pi R$ (questa è nota come legge di Stokes). Ad esempio, se la pallina ha raggio 2 cm, allora $K = 0.38$ m. Se viene lanciata in aria, allora possiamo usare il valore $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa s per il coefficiente di viscosità[(5)]. Se la pallina ha una massa di 20 g, allora la velocità limite è $v_l = mg/(K\eta) = 2.87 \times 10^4$ m/s. Il rapporto v_0/v_l vale 1.4×10^{-4}, ed è quindi molto minore di 1. La relazione (40) ci dice che l'errore relativo sulla quota massima commesso ignorando l'attrito è al più 1.4×10^{-4}. Per vedere questo effetto sulla scala degli 80 cm, servirebbe uno strumento capace di misurare distanze dell'ordine di un decimo di millimetro. Per misure meno raffinate, l'attrito può essere ignorato. Insistiamo sul fatto che per arrivare a questa conclusione non serve la soluzione completa dell'equazione del moto, ma è sufficiente la diseguaglianza (40). Se si vuole la stima esatta, allora si deve ricorrere alla (31) che include un fattore 2/3, ma non cambia la sostanza del problema[(6)].

Per gli studenti che già conoscono il concetto di energia meccanica, l'integrazione in dy dell'equazione del moto, che abbiamo usato per derivare la diseguaglianza (40), dovrebbe avere un significato chiaro: si tratta infatti del teorema delle forze vive, che lega il lavoro fatto da una forza alla variazione di energia cinetica di una particella. Infatti, se prendiamo l'equazione (35) e la moltiplichiamo per m, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\bar{y} + \frac{mg}{v_l}\int_0^{\bar{y}} v\,dy\,, \tag{41}$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\bar{y} + \int_0^{\bar{y}} K\eta v\,dy\,, \tag{42}$$

e infine

$$mg\bar{y} - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\int_0^{\bar{y}} K\eta v\,dy\,. \tag{43}$$

Il primo addendo a sinistra dell'uguale è l'energia potenziale della particella quando si trova alla massima altezza, dove la velocità è nulla e l'energia meccanica coincide con l'energia potenziale associata alla forza peso. Il secondo addendo è l'energia cinetica iniziale. La differenza dei due è l'energia meccanica persa per effetto della dissipazione indotta dalla forza di attrito, $-K\eta v$, che è una forza non conservativa. L'energia dissipata è il lavoro eseguito dalla forza e coincide, per definizione, con l'integrale a destra dell'uguale. La diseguaglianza (40) può quindi essere vista come l'effetto di una sovrastima della dissipazione, che si ottiene rimpiazzando v con v_0 nel calcolo del lavoro eseguito dall'attrito. Da qui si comprende bene l'utilità dei concetti di energia e lavoro. Chi li conosce, può direttamente scrivere l'ultima equazione, stimare l'integrale a destra in modo approssimato, ed arrivare così a rispondere alla domanda "possiamo trascurare l'attrito per calcolare la quota massima raggiunta da un pallina lanciata verticalmente in aria?", senza bisogno di risolvere altre equazioni più complicate.

Note

(1) *Questo esercizio è un complemento di quanto fatto a lezione sulla caduta da fermo in un fluido viscoso. In quel caso si era scelta una coordinata x verticale e con verso positivo verso il basso. Ma il problema è lo stesso, eccetto per le condizioni iniziali; la scelta delle coordinate è convenzionale.*

Nel caso trattato a lezione il corpo iniziava il moto cadendo e continuava a cadere; era naturale scegliere il verso positivo in giù per togliersi di mezzo un po' di segni meno. Qui invece la particella sale e poi scende e la scelta del verso positivo è indifferente. Farne una diversa da quella vista a lezione aiuta a acquisire familiarità con gli aspetti convenzionali dei problemi fisici.

(2) *È utile osservare che le soluzioni del problema possono essere espresse in termini di tre soli parametri, come la terna v_0, v_l e g, oppure in alternativa la terna v_0, v_l e τ. Il primo è un parametro fissato soltanto dalle condizioni iniziali; gli altri due sono parametri propri del sistema che, assegnato g, sono fissati solo dal rapporto $K\eta/m$. Il fatto che i parametri originari del sistema, m, K e η, entrino nelle soluzioni tramite una combinazione fissa è interessante: vuol dire che il sistema ammette una scala tipica dei tempi con cui l'attrito agisce, τ, e una scala tipica di velocità, v_l. Sistemi in cui m, K e η sono diversi singolarmente, ma il rapporto $K\eta/m$ è lo stesso, si comportano allo stesso modo. Dunque, se rappresentiamo graficamente le soluzioni usando il tempo adimensionale t/τ e la velocità adimensionale v/v_l, le soluzioni per sistemi diversi saranno rappresentate da un'unica curva, che varia solo variare della velocità iniziale v_0. In generale, nell'analizzare un generico sistema fisico, specie se complesso, conviene individuare le combinazioni di parametri che portano a soluzioni identiche a meno di un qualche fattore di scala. In questo modo, si rende più efficiente l'applicazione dei risultati ai casi particolari e si guadagna intuito fisico.*

(3) *Questo è il tipico caso in cui si sono ottenute soluzioni ad un problema al variare di un parametro (nel nostro caso $K\eta/m$), e si hanno a disposizione anche informazioni indipendenti sulle soluzioni in un limite particolare ($K\eta = 0$). Non è soltanto utile, ma è anche necessario, a questo punto, verificare che la soluzione generale riproduca correttamente la soluzione attesa in quel caso limite. Conviene sottolineare l'importanza di una procedura di controllo di questo tipo!*

(4) *Qui si vede bene come l'esistenza di scale tipiche di tempi e di velocità permette di dare un significato fisico alla procedura di limite. Quando in fisica diciamo che un certo risultato deve essere ottenuto in un particolare limite in cui qualcosa diventa trascurabile, intendiamo che la soluzione generale deve assumere una forma nota quando una certa quantità è molto piccola rispetto ad una scala tipica fissata dai parametri del sistema. Individuare quale sia, di volta in volta, il "parametro piccolo" da usare come variabile in uno sviluppo in serie attorno ad un valore assegnato è una delle arti che si imparano nel mestiere del fisico.*

(5) *Il Pascal (Pa) è l'unità di misura della pressione nel Sistema Internazionale ed equivale ad 1 N/m^2. La viscosità viene normalmente espressa*

in Pa s, che equivalgono a Ns/m^2. Dato che K ha le dimensioni di una lunghezza, la quantità $K\eta v$ diventa una forza in N, come dev'essere.

(6) *Con la stessa pallina, un effetto maggiore si otterrebbe in acqua. L'acqua ha un coefficiente di viscosità $\eta \simeq 0.9 \times 10^{-3}$ Pa s, quindi circa 50 volte più grande di quello dell'aria, la velocità limite è 50 volte più piccola e, nel nostro caso, il rapporto v_0/v_l diventa circa 7×10^{-3}, che è ancora piccolo, ma non troppo. Su una quota dell'ordine del metro, l'errore verrebbe dell'ordine del centimetro. Tuttavia le cose non sono così semplici in acqua. Innanzitutto c'è da aggiungere la spinta di Archimede che, se trascurata, farebbe commettere errori ben più grossi, anche se la pallina fosse di piombo. La spinta di Archimede comporta una riduzione significativa dell'accelerazione di gravità effettiva (che si ottiene dalla differenza tra il peso dell'oggetto e il peso dell'acqua spostata), per oggetti più densi dell'acqua, e addirittura un'accelerazione verso l'alto per oggetti meno densi. Per una pallina di plastica in acqua non ha quindi senso risolvere il problema come abbiamo fatto qui. Inoltre, per un oggetto che si muove ad una velocità di 4 m/s in acqua, non è affatto ovvio che si possa applicare la legge di Stokes per il coefficiente di resistenza viscosa; quella infatti vale solo se il moto del fluido attorno all'oggetto è laminare, non turbolento.*