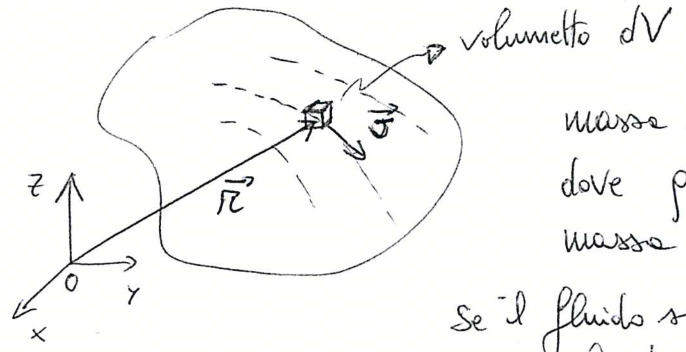
FLUIDI

Approssimazione del continuo

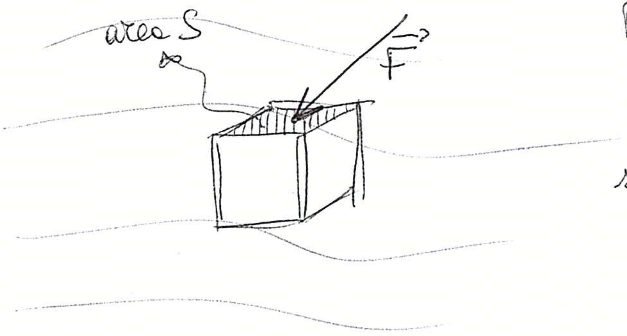


massa nel volumetto: $dm = \rho\, dV$
dove $\rho(\vec{r}, t)$ è una densità di massa (locale)

Se il fluido si muove, è possibile definire una velocità locale $\vec{v}(\vec{r}, t)$ associata al fluido nel volumetto

ρ è un campo scalare
$\vec{v}$ è un campo vettoriale $\rightarrow$ le curve a cui $\vec{v}$ è tangente sono le linee di flusso

Forze di pressione e sforzi di taglio



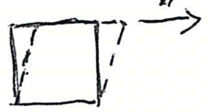
pressione che agisce sulla superficie di area:

$$P = \frac{F_\perp}{S} \rightsquigarrow \text{componente perpendicolare}$$

sforzo di taglio:

$$\frac{F_{\parallel}}{S} \rightsquigarrow \text{componente parallela}$$

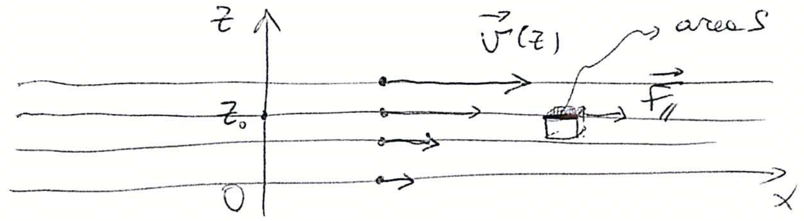
Un corpo solido si oppone agli sforzi di taglio tramite deformazioni



$\rightsquigarrow$ si può ottenere una deformazione statica in cui $F_{\parallel}$ è bilanciata da forze interne al solido

Un fluido non può rispondere a sforzi di taglio in condizioni statiche (o più in generale, esso oppone "scarsa" resistenza a sforzi di taglio)
Uno sforzo di taglio induce movimento, e sforzi di taglio sono

presenti nel fluido, come forze interne, solo se il fluido ha parti in movimento a velocità diverse. Ad esempio:



$$F_{\parallel} = S\,\eta \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z_0}$$

η → coeff. di viscosità

tiene conto delle forze di coesione tra le particelle

Se $\eta = 0$ si dice che il fluido è perfetto.

compressibilità

Risposta del sistema a variazioni di volume (o di densità).

Coefficiente di compressibilità:

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

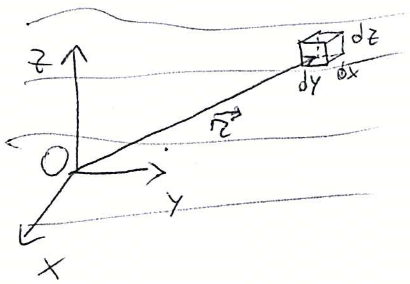
nel caso dei gas conviene distinguere il coefficiente a T costante da quello a entropia costante (adiabatiche). La distinzione è irrilevante per liquidi e solidi.

Un gas ha valori di χ grandi (molto comprimibile, risponde poco alle compressioni)

Un liquido ha valori di χ tipicamente molto piccoli (le molecole sono "impacchettate" in spazi ristretti, come nei solidi)

Un fluido è incompressibile se $\chi = 0$. In tal caso la densità rimane uniforme nel fluido (costa infinita energia produrre variazioni di densità)

Equazioni per la statica di un fluido



Equilibrio meccanico del fluido nel volumetto infinitesimo dV $\longrightarrow$ equilibrio delle forze

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$\hookrightarrow$ somma sulle forze

interne / esterne

$$\sum_i (\vec{F}_i)_{superficie} + \sum_i (\vec{F}_i)_{esterne} = 0$$

$\hookrightarrow$ in condizioni di equilibrio queste sono solo le forze dovute alle pressioni esercitate dal resto del fluido sulle superfici del volumetto

$\hookrightarrow$ queste risultante le chiamiamo $\vec{F}_{ext}$

Per componenti cartesiane:

$$\begin{cases} P(x,y,z)\,dydz - P(x+dx,y,z)\,dy\,dz + F_{x,ext} = 0 \\ P(x,y,z)\,dx\,dz - P(x,y+dy,z)\,dx\,dz + F_{y,ext} = 0 \\ P(x,y,z)\,dy\,dx - P(x,y,z+dz)\,dy\,dx + F_{z,ext} = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz + F_{x,ext} = 0 \\ -\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz + F_{y,ext} = 0 \\ -\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz + F_{z,ext} = 0 \end{cases}$$

dato che

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dx = dP_x = P(x+dx,y,z) - P(x,y,z)$$

ovvero

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dV = F_{x,ext} \;;\; \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dV = F_{y,ext} \;;\; \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dV = F_{z,ext}}$$

queste sono le equazioni per l'equilibrio

Se definiamo l'operatore gradiente come

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

tale che $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Allora le stesse equazioni diventano

$$\boxed{\vec{\nabla} P \, dV = \vec{F}_{ext}} \quad (*)$$

Es.: Fluido in quiete nel campo della forza peso

$$\vec{F}_{ext} = -\hat{z}\, dm\, g = -\hat{z}\, \rho g \, dV \qquad \leftarrow \text{forza esterna}$$

equilibrio:

$$\boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{dP}{dz} = -\rho g \end{array}}$$

→ P non dipende da x e y
le superfici isobare sono piani orizzontali (coincidono con le superfici equipotenziali

L'equilibrio fornisce una relazione (eq. differenziale) che lega ρ e P:

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g} \quad (**)$$

Consideriamo due casi:

a) fluido incompressibile (ρ = cost)

b) fluido descritto dall'eq. di stato del gas ideale

a) Fluido incompressibile nel campo di gravità

Possiamo integrare la (**) sapendo che ρ è costante

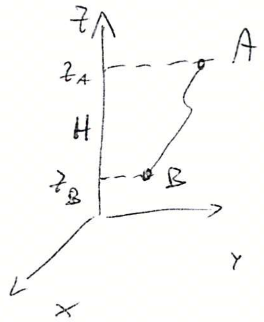
$$\int \left(\frac{dP}{dz}\right) dz = -\rho g \int dz$$

l'integrale, calcolato tra due punti A e B che si trovano a quote z_A e z_B rispetto ad un riferimento arbitrario $z=0$, ci dà

$$P_B - P_A = -\rho g (z_B - z_A)$$

notiamo che $P_B > P_A$ se B si trova sotto A. La pressione nel fluido cresce scendendo in profondità.

Sia $H = z_A - z_B > 0$ e $\Delta P = P_B - P_A$

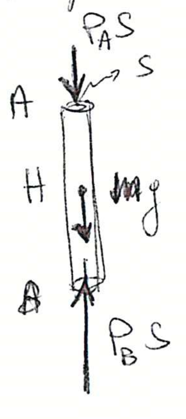


allora $$\boxed{\Delta P = \rho g H}$$

questa si chiama <u>legge di Stevino</u>

e ΔP si chiama <u>pressione idrostatica</u>

Un modo semplice per valutarne il significato consiste nel considerare un cilindretto di superficie S e altezza H, inserito nel fluido in direzione verticale e con la stessa densità del fluido. Le forze ~~interne~~ di pressione sulle superfici laterali si compensano per simmetria. Quelle sulle superfici sopra e sotto danno una spinta verso l'alto pari a $S\Delta P$ se P in basso supera quella in alto di ΔP. Tale spinta, all'equilibrio, deve compensare la forza peso che vale $mg = \rho S H g$. Dunque $\Delta P = \rho g H$.



Per l'acqua vale $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$

da cui $\rho g \cong 10^4 \frac{kg}{m^2 s^2} = 10^4 \frac{N}{m^3} = 10^4 \frac{Pa}{m}$

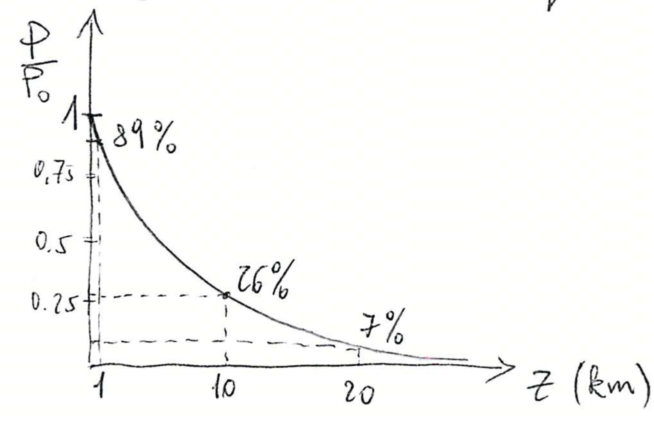
perciò $\Delta P \cong \left(10^4 \frac{Pa}{m}\right) H$

se $\underline{H = 10\ m}$ la pressione idrostatica è circa 10^5 Pa ovvero circa $\underline{1\ atm}$

È utile da sapere per progettare impianti idraulici, pompe, dighe, fontane, o per immersioni subacquee.

b) Aria (come gas ideale) nel campo di gravità

Trattiamo l'atmosfera come un gas ideale a T costante e uniforme.
Equazione di stato
$$PV = nRT \quad \text{con } T = \text{costante}$$
equivalente a
$$\frac{P}{\rho} = \text{costante}$$
supponiamo di fissare $z = 0$ al livello del mare; siano P_0 e ρ_0 la pressione e la densità dell'aria a quel livello.
L'eq. di stato ci dice che ad una quota generica
$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0}$$
ovvero
$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{P_0} P(z)$$
Ora consideriamo l'equazione per la statica dell'aria nel campo di gravità
$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$
e inseriamo la relazione precedente per ρ :
$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} P$$
chiamiamo $\lambda = \frac{\rho_0 g}{P_0}$, costante nota. Allora
$$\frac{dP}{dz} = -\lambda P$$
che ha soluzione
$$P(z) = C e^{-\lambda z}$$
e C può essere fissata dalla condizione $P(0) = P_0$. Dunque
$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\lambda z}}$$
principio di funzionamento dell'altimetro.



Equilibrio in un campo di forze conservativo qualsiasi

Sia E_p l'energia potenziale di un volumetto dV di un fluido soggetto a forze conservative (gravità, o altro).
Sia U la stessa energia per unità di massa, $E_p = dm\, U = \rho\, dV\, U$

Sappiamo che

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{\nabla} E_p = -dV\, \vec{\nabla}(\rho U)$$

L'equazione per la statica(*) del fluido diventa

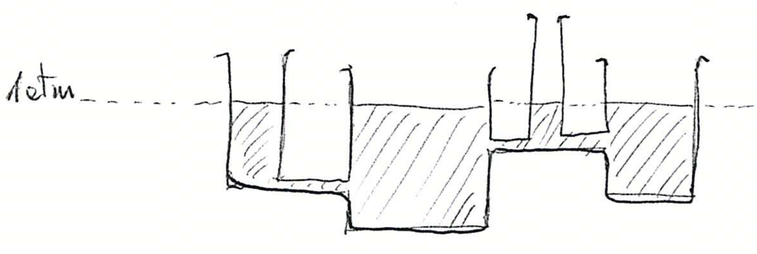
$$\vec{\nabla} P = -\vec{\nabla}(\rho U)$$

e se il fluido è anche incompressibile si ha

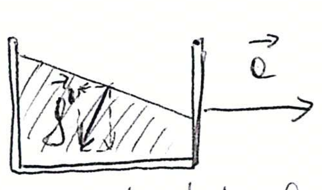
$$\boxed{\vec{\nabla} P = -\rho\, \vec{\nabla} U}$$

Nel caso della forza peso $U = gz$ e ritroviamo tutti i risultati di prima per la pressione idrostatica di Stevino.

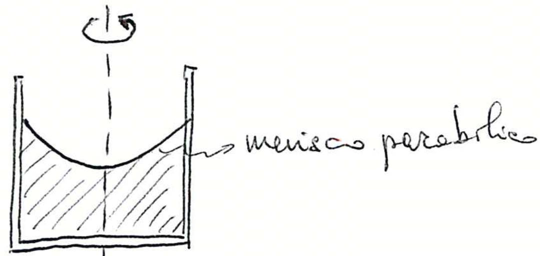
Più in generale, qui si vede che le superfici isobare coincidono con le superfici equipotenziali per qualsiasi campo di forze esterne conservativo. Rende conto ad esempio di



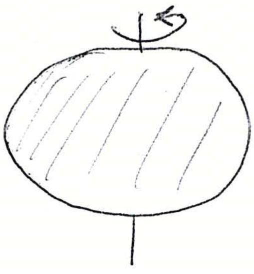
principio dei vasi comunicanti



forza apparente di traslazione + gravità



forza centrifuga + gravità



ellissoide di rotazione per un oceano che copre un pianeta in rotazione

ecc.

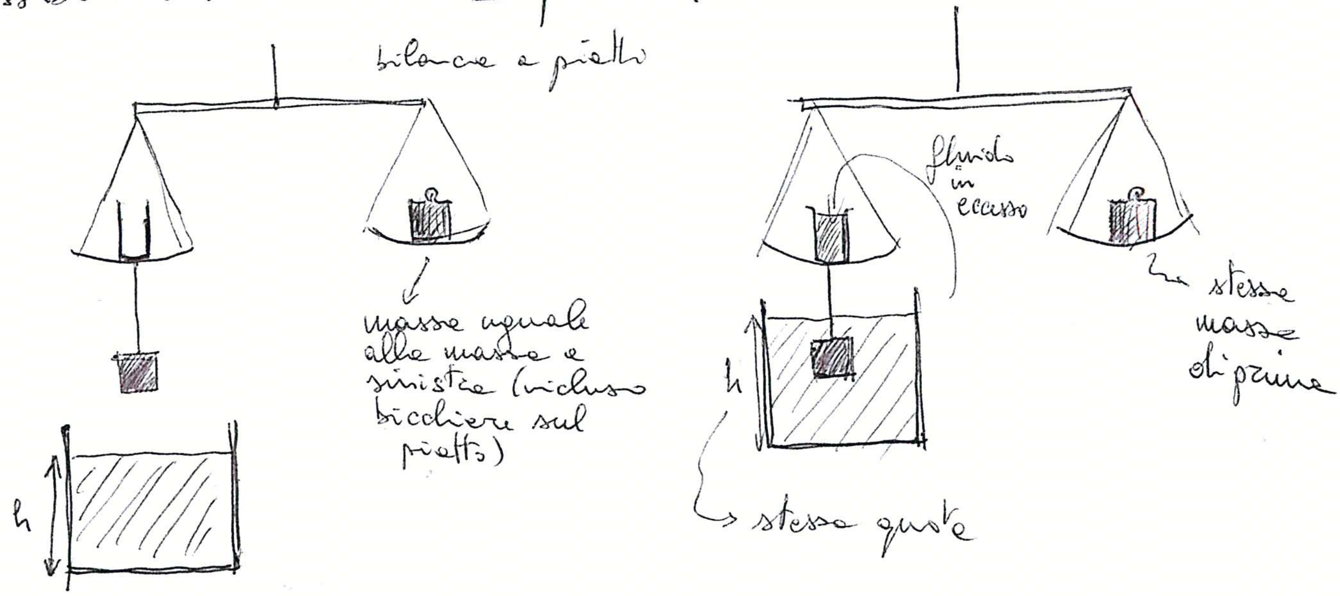
Principio di Archimede

Prendiamo un fluido in quiete nel campo di gravità e immergiamo, parzialmente o totalmente, un corpo nel fluido. Allora il corpo subisce una spinta verso l'alto pari in modulo al peso ~~dello~~ del liquido spostato.

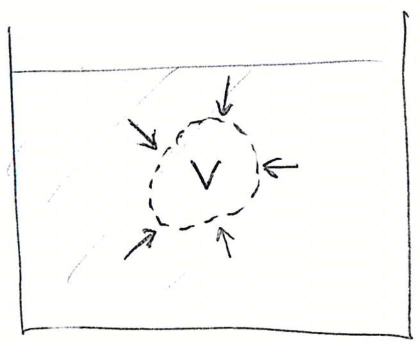
Il punto di applicazione della forza coincide con il baricentro del fluido spostato, che coincide con il centro di massa del corpo immerso solo per corpi omogenei e completamente immersi.

Questa si chiama spinta di Archimede

Possibile dimostrazione empirica:

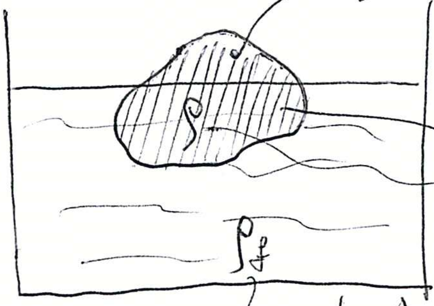


Esperimento "pensato":



se sostituisco il mezzo all'interno del volume V, le forze di pressione esercitate dal resto del fluido non cambiano. Dato che queste, nel fluido all'equilibrio, compensano esattamente il peso del fluido in V, lo faranno anche quando invece del fluido c'è qualcosa d'altro → la forza è la stessa!

Galleggiamento:



ρ : densità omogenea (per semplicità)

forza di Archimede : $F_A = \overbrace{\rho_f V_i}^{\text{massa fluido spostato}} g$

equilibrio ↳ questa deve compensare il peso del corpo $F_p = Mg = \rho (V_i + V_e) g$

Dunque

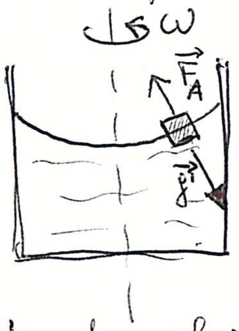
$$\rho (V_i + V_e) \cancel{g} = \rho_f V_i \cancel{g}$$

da cui $\dfrac{V_i + V_e}{V_i} = \dfrac{\rho_f}{\rho} \Rightarrow \boxed{\dfrac{V_e}{V_i} = \dfrac{\rho_f - \rho}{\rho}}$

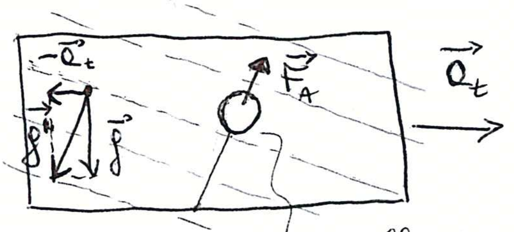
esempio : acqua con ghiaccio galleggiante $\Rightarrow \dfrac{V_e}{V_i} \simeq 0.1$

↳ $\rho_f = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ ↳ $0.9 \rho_f$

Nota: la spinta di Archimede si applica anche nei casi di gravità efficace, dovuti all'accelerazione di sistemi di riferimento non inerziali:



tappo di sughero su un fluido in rotazione



palloncino di elio in treno che accelera

Dinamica dei fluidi (cenni)

La dinamica dei fluidi è complicata. Si possono classificare livelli di complicazione diversi. Ad esempio, per semplificarci la vita possiamo considerare fluidi

- chimicamente omogenei e non reagenti
- elettricamente neutri

anche così le equazioni che traducono

la conservazione della massa
la conservazione della quantità di moto
la conservazione dell'energia

sono un insieme di equazioni differenziali alle derivate parziali, accoppiate, per diversi campi scalari e vettoriali (densità, campo di velocità, pressione, energia interna, ecc.)

Le equazioni più famose sono le equazioni di Navier-Stokes. Includono fenomeni di turbolenza, termici, di viscosità, ecc.

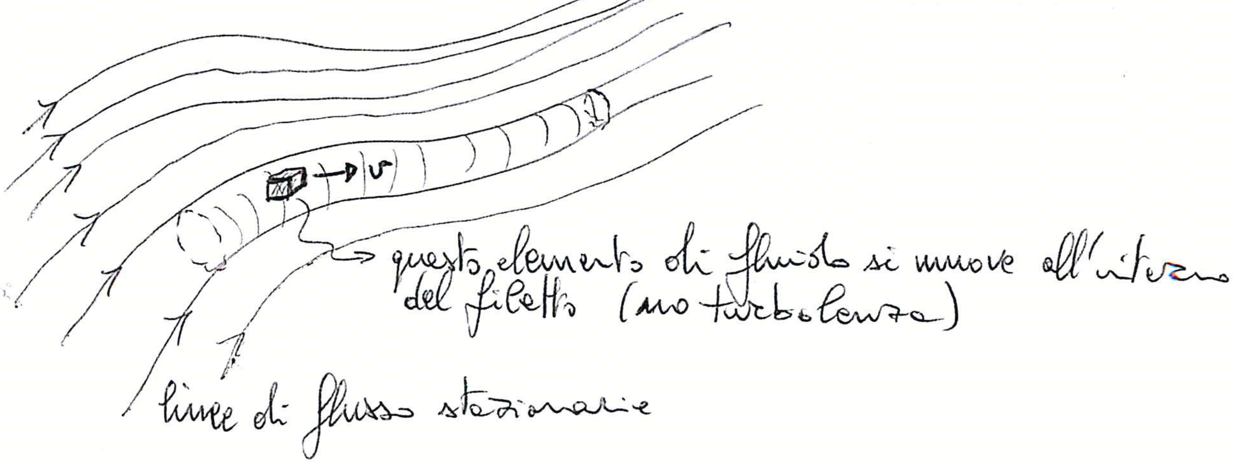
Trattiamo qui un esempio di leggi di conservazione applicate ad un fluido particolarmente semplice: fluido <u>perfetto</u>, <u>incompressibile</u>, in regime di <u>flusso laminare</u> e <u>stazionario</u>, in assenza di fenomeni termici.

perfetto = nessuna viscosità

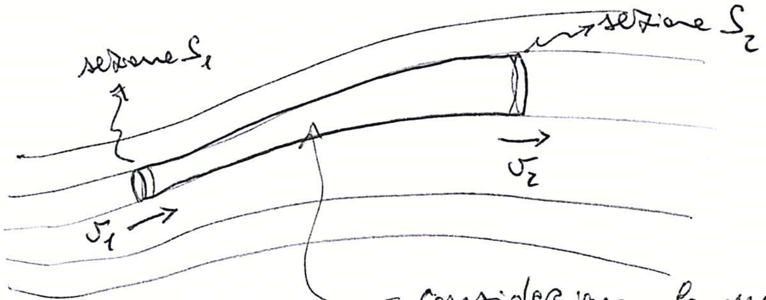
incompressibile = ρ è la stessa sempre e ovunque

laminare = ogni volumetto di fluido si muove all'interno del proprio "filetto fluido"

stazionario = il campo di velocità non dipende dal tempo



Conservazione della massa

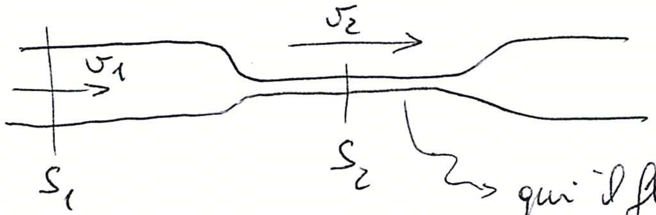


consideriamo la massa di fluido in questo pezzo di filetto.

In un tempo dt il fluido si sposta lungo il filetto in modo che una massa pari a $dm = \rho v_1 dt S_1$ viene tolta da sinistra e una massa $dm = \rho v_2 dt S_2$ viene aggiunta a destra. Ma per conservare la massa nel filetto le due masse devono essere uguali e dunque

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{ovvero} \quad \underbrace{Sv}_{\text{portata}} = \text{costante}$$

Esempio: tubo con costrizione



$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$

qui il fluido è più veloce

Conservazione dell'energia (nel campo di gravità)

Come prima. La quota del filetto a sinistra sia z_1 e a destra z_2. In dt a sinistra viene a mancare una massa dm con velocità v_1 a quota z_1, e se ne aggiunge una massa dm a sinistra con velocità v_2 a quota z_2. La variazione di energia meccanica è

$$dE = \frac{1}{2} dm\, v_2^2 - \frac{1}{2} dm\, v_1^2 + dm\, g z_2 - dm\, g z_1$$

Questa variazione deve essere uguale al lavoro fatto dalle forze (di pressione) esercitate dal resto del fluido su quel pezzo di filetto per spingerlo verso destra. Sia P_1 la pressione a sinistra e P_2 a destra. Allora

$$\delta W = P_1 v_1 dt S_1 - P_2 v_2 dt S_2$$
$$= \frac{P_1}{\rho} dm - \frac{P_2}{\rho} dm$$

(forza: PS × spostamento: $v dt$)

Quindi si ha $\delta W = dE$, ovvero

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2$$

per qualsiasi coppia di punti 1 e 2 lungo il filetto fluido.
Concludiamo che

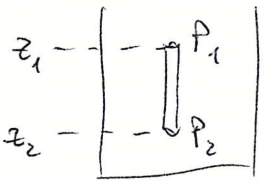
$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\substack{\text{pressione cinetica} \\ \text{(densità di energia cinetica)}}} + \underbrace{\rho g z}_{\substack{\text{pressione idrostatica} \\ \text{(densità di energia potenziale gravitazionale)}}} + P = \text{costante}}$$

teorema di Bernoulli

nel fluido.

Casi particolari:

i) caso statico



$v = 0$

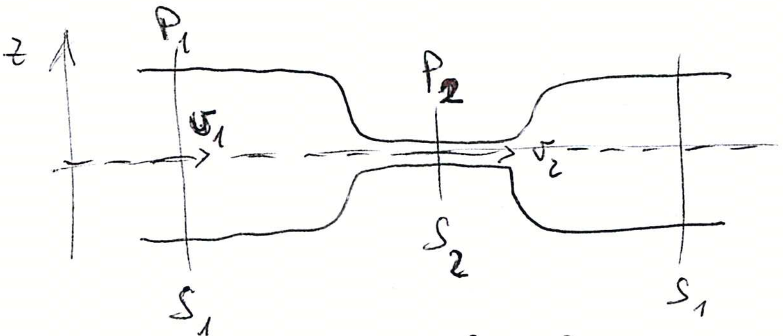
$$\rho g z_1 + P_1 = \rho g z_2 + P_2$$

$$\Downarrow$$

$$P_2 - P_1 = \rho g (z_1 - z_2)$$

$$\Delta P = \rho g H \qquad \underline{\text{Stevino}}$$

ii) tubo di Venturi



$S_2 < S_1$, $z_1 = z_2$

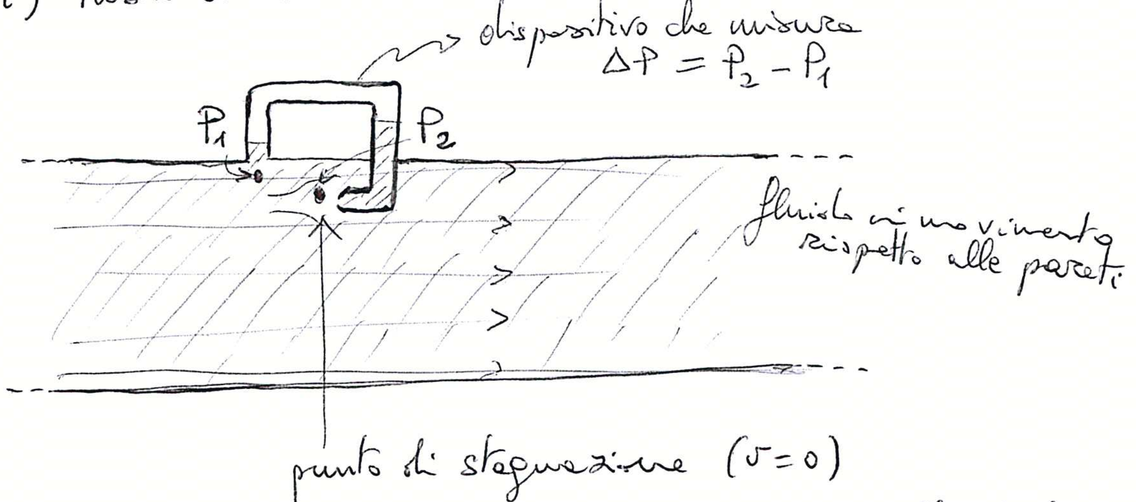
supponiamo di conoscere S_1 e S_2 e di misurare $\Delta P = P_1 - P_2$

Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2$ con $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$ dalla conservazione della massa

Quindi $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\,\Delta P}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$ → posso dedurre la velocità di un fluido misurando ΔP in una costrizione

Nota: $P_2 < P_1$!

iii) Tubo di PITOT



Nel punto 1, dove la pressione è P_1, il fluido ha velocità incognita v, uguale a quella nel resto del fluido.
Nel punto 2, che è il punto di stagnazione davanti all'apertura del tubo di Pitot, la velocità è nulla e $P = P_2$:
Applicando Bernoulli e trascurando gli effetti idrostatici (la misura di P viene fatta alla stessa quota) si ottiene

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

ovvero

$$v = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}.$$

Dunque, nota la densità ρ, una misura di ΔP con un manometro, permette di conoscere la velocità del fluido rispetto alle pareti.

Esempio: tubi di Pitot per misurare la velocità di aerei rispetto all'aria circostante.