Franco Dalfovo

Dipartimento di Fisica, Università di Trento Appunti di Fisica Generale I

## Oscillatori, onde e caos

(versione del 22 febbraio 2019)



## Indice

1	Pre	messa	1
<b>2</b>	Oscillatori armonici e risonanze		
	2.1	Oscillatore armonico libero	3
	2.2	Oscillatore smorzato	4
	2.3	Oscillatore smorzato e forzato	7
	2.4	Risonanza	9
3	Oscillatori accoppiati e onde		
	3.1	Due oscillatori accoppiati	13
	3.2	Onde	16
	3.3	Sovrapposizione di onde	20
4	Algebra lineare e oscillatori		23
	4.1	Due masse e tre molle uguali	23
	4.2	Due masse uguali e tre molle diverse	28
	4.3	Tre masse e quattro molle uguali	32
5	Catene di oscillatori e limite del continuo		
	5.1	Catena di $N$ oscillatori, con $N$ grande $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	35
	5.2	Modi normali e serie di Fourier	39
6	Dinamica non-lineare, solitoni e caos		
	6.1	Oscillatori non-lineari e modello di Fermi-Pasta-Ulam	45
	6.2	Sistemi non-lineari e caos	48
	6.3	Bacini di attrazione e frattali	54

INDICE

# Capitolo 1 Premessa

Dopo anni, mi sono finalmente deciso a mettere in forma ordinata una serie di appunti sparsi che uso per le lezioni di Fisica Generale I, in particolare per la parte riguardante gli oscillatori armonici smorzati e forzati, le risonanze, e le onde. Li ho aggiunti ad altri appunti sull'applicazione dell'algebra lineare e delle equazioni differenziali agli oscillatori accoppiati in regime lineare e non-lineare. Il risultato è quello che potete vedere in queste pagine. Gli argomenti dei capitoli 2 e 3 normalmente li tratto nelle prime sei ore di lezione del secondo semestre, dopo aver speso il primo semestre a introdurre la meccanica newtoniana. La seconda parte invece, dal quarto capitolo in poi, esula dal programma del corso vero e proprio ed è l'oggetto delle lezioni aggiuntive, facoltative, che tengo per il Percorso di Approfondimento in Fisica, per circa una decina di ore in tutto.

Non si tratta di un libro di testo ma di una traccia delle lezioni, che si discosta poco da ciò che dico in aula. Per trovare gli stessi concetti espressi in forma più completa e con tutti i riferimenti bibliografici del caso, gli studenti faranno bene a consultare i testi classici dedicati alla meccanica, che includono, quasi sempre, una parte dedicata a onde e oscillazioni. Questo vale soprattutto per i primi capitoli. Nella parte sugli oscillatori forzati e le risonanze, in particolare, seguo piuttosto fedelmente la notazione usata nel libro *Elements of Newtonian Mechanics*, di J.M. Knudsen e P.G. Hjorth (Springer). Quand'ero studente io, mi ero gustato il terzo volume della serie *La Fisica di Berkeley*, dedicato alle onde, di cui purtroppo sarà rimasta solo qualche copia nelle biblioteche universitarie.

Meno ovvio, invece, è trovare materiale per approfondire la seconda parte di questi appunti, il cui taglio è volutamente più originale. L'intento dei capitoli 4, 5 e 6 infatti è quello di mostrare come la dinamica degli oscillatori accoppiati possa essere affrontata in modo efficace usando la matematica che si studia, in parallelo, nei corsi di analisi e geometria. Così ci si rende conto che l'avere a disposizione gli strumenti formali giusti permette di esplorare una fisica interessante, e a volte sorprendente, con uno sforzo relativamente limitato. La relazione esistente tra le vibrazioni di una catena di oscillatori e la propagazione di onde nei mezzi continui, gli effetti dell'eventuale non-linearità delle equazioni del moto, il problema del determinismo in presenza di fenomeni caotici, sono argomenti che normalmente non vengono trattati nei corsi standard; ne è ovvia conseguenza la difficoltà di trovare testi adatti su queste tematiche, che siano al livello appropriato per gli studenti al primo anno di fisica. Non c'è di che preoccuparsi, però. Quei capitoli hanno lo scopo di stimolare la curiosità e sviluppare l'abitudine alle connessioni interdisciplinari, più che di insegnare nozioni. Gli studenti interessati troveranno la loro strada.

### Capitolo 2

### Oscillatori armonici e risonanze

### 2.1 Oscillatore armonico libero

Partiamo dall'oscillatore libero unidimensionale costituito da una particella di massa m soggetta ad una forza di richiamo proporzionale alla distanza x da un punto assegnato. Un esempio è quello di una particella agganciata all'estremo libero di una molla, avente l'altro estremo vincolato ad un punto fisso in un sistema inerziale. Nel caso ideale in cui la molla ha massa trascurabile rispetto alla particella e risponde alle deformazioni secondo la legge di Hooke, la II legge di Newton per la particella è

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\,,\tag{2.1}$$

dove x è la distanza dal punto di equilibrio e k è la costante elastica della molla. Per comodità, d'ora in poi usiamo la notazione  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$  per la derivata prima e seconda rispetto al tempo. L'equazione diventa

$$m\ddot{x} = -kx\,,\tag{2.2}$$

ovvero

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \tag{2.3}$$

con  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Questa è detta equazione armonica.



La sua soluzione generale è

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (2.4)$$

dove  $A e \varphi$  sono costanti di integrazione che possiamo fissare, in ogni caso particolare, conoscendo la posizione e la velocità della particella in un istante iniziale assegnato. La posizione è una funzione periodica nel tempo con ampiezza A. La quantità  $(\omega_0 t + \varphi)$  è la fase dell'oscillazione al tempo t, mentre  $\omega_0$ è la pulsazione dell'oscillatore, da cui si ottengono anche il periodo  $T = 2\pi/\omega_0$ e la frequenza  $f = T^{-1} = \omega_0/(2\pi)$ . La scelta di scrivere la funzione x(t) con il coseno anziché il seno è del tutto arbitraria; l'una differisce dall'altra solo per un  $\pi/2$  nella costante d'integrazione  $\varphi$ . Un'altra forma equivalente sarebbe  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ , che può essere ricondotta alla forma precedente tramite le formule di addizione delle funzioni goniometriche. L'energia meccanica della particella è

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$
 (2.5)

Energia cinetica e energia potenziale variano periodicamente nel tempo, ma la loro somma rimane costante ed è legata all'ampiezza dell'oscillazione da  $E = (1/2)kA^2$ .

L'importanza dell'equazione armonica sta nel fatto che si applica ad un vastissimo insieme di fenomeni, non certo limitati al caso delle molle in regime di legge di Hooke. Basti pensare a una particella soggetta a sole forze conservative, del tutto generiche. I suoi stati di equilibrio corrispondono a minimi dell'energia potenziale. Se la particella compie movimenti attorno ad un minimo, di ampiezza piccola rispetto alla scala di distanze entro cui l'energia potenziale varia sensibilmente, allora è possibile approssimare l'energia potenziale con il suo sviluppo in serie di potenze. Il termine al primo ordine è nullo nel punto di equilibrio, mentre il termine al secondo ordine, se diverso da zero, corrisponde ad un potenziale del tipo  $(1/2)kx^2$  e il moto della particella sarà dato da piccole oscillazioni governate dall'equazione armonica.

#### 2.2 Oscillatore smorzato

Supponiamo che la particella sia soggetta, in aggiunta alla forza elastica, anche ad una forza di attrito proporzionale alla velocità, in modo che la II legge di Newton sia

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \qquad (2.6)$$

ovvero

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.7}$$

con  $\gamma = b/m$ , mentre  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  è la pulsazione dell'oscillatore libero. A causa dell'attrito, l'energia meccanica non si conserva più, ma decresce nel tempo. Il moto di un pendolo che oscilla in aria è ben descritto da questa equazione, almeno nel limite di piccoli angoli, ma il modello è applicabile ad una grande varietà di sistemi fisici. In generale, se non vi fossero forze dissipative, una particella che venisse spostata di poco da un suo punto di equilibrio non avrebbe alcun modo di tornarvi e continuerebbe ad oscillare per sempre. L'interazione con altre particelle, o altri sistemi, consente alla particella di cedere loro l'energia sufficiente per fermarsi. Un forza del tipo  $-b\dot{x}$  è esemplificativa di meccanismi di questo genere ed è un buon modello di dissipazione in un'ampia classe di fenomeni.

L'equazione del moto è un'equazione differenziale del secondo ordine (la derivata di ordine più elevato è la derivata seconda), omogenea (compaiono solo termini contenenti la funzione incognita x o le sue derivate), a coefficienti costanti (la x e le sue derivate sono moltiplicate per quantità indipendenti dal tempo). A questo punto lo studente potrebbe conoscere già la teoria delle equazioni differenziali e i metodi per l'integrazione di equazioni come queste in forma generale. O forse no. Supponiamo di no e ragioniamo alla maniera dei fisici. Abbiamo due termini nell'equazione che determinano l'accelerazione, uno associato all'attrito e l'altro alla forza elastica. Il peso di questi due termini è dato dai due parametri  $\gamma \in \omega_0$  che, tra l'altro, hanno le stesse unità, cioè s<sup>-1</sup>. Se  $\omega_0/\gamma \gg 1$ , allora la dissipazione è relativamente piccola e il moto che ci aspettiamo è armonico, ma con un'ampiezza che decresce lentamente nel tempo. D'altra parte, da quanto abbiamo visto nel primo semestre, sappiamo che un attrito viscoso di questo tipo tende a produrre uno smorzamento esponenziale. Mettendo assieme queste informazioni, siamo portati ad ipotizzare una soluzione di questa forma:

$$x(t) = A\cos(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t}.$$
(2.8)

Per vedere se funziona, possiamo inserire questa espressione nell'equazione del moto, sperando così di verificare che si tratta effettivamente di una soluzione e anche di trovare le incognite  $\omega_s \in \alpha$ .

Cominciamo con il calcolo della derivata prima

$$\dot{x} = -A\omega_s \sin(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t} - A\alpha \cos(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t}$$
(2.9)

e poi della derivata seconda

$$\ddot{x} = -A\omega_s^2 \cos(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t} + A\alpha\omega_s \sin(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t} + A\alpha\omega_s \sin(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t} + A\alpha^2 \cos(\omega_s t + \varphi)e^{-\alpha t}.$$
(2.10)



Figura 2.1: Posizione di una particella in funzione del tempo per un oscillatore smorzato, ottenuta dall'espressione (2.15). Il tempo è dato in unità di  $\omega_0^{-1}$  e la posizione è normalizzata al suo valore iniziale. Il tempo iniziale è stato scelto in modo da avere  $\varphi = 0$  e la curva è stata disegnata per  $\omega_0/\gamma = 5$ .

Inserendo le ultime tre espressioni nell'equazione del moto e dividendo per il termine  $Ae^{-\alpha t}$  che compare ovunque, troviamo

$$-\omega_s^2 \cos(\omega_s t + \varphi) + \alpha \omega_s \sin(\omega_s t + \varphi) + \alpha \omega_s \sin(\omega_s t + \varphi) + \alpha^2 \cos(\omega_s t + \varphi) - \gamma \omega_s \sin(\omega_s t + \varphi) - \gamma \alpha \cos(\omega_s t + \varphi) + \omega_0^2 \cos(\omega_s t + \varphi) = 0.$$
(2.11)

Questa può trasformarsi in un'identità, per ogni t, solo se i coefficienti delle funzioni seno e coseno sono nulli. Annullando i coefficienti del seno si ottiene

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} \tag{2.12}$$

mentre per il coseno si ha

$$\omega_0^2 - \omega_s^2 - \frac{\gamma^2}{4} = 0 \tag{2.13}$$

da cui

$$\omega_s = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}} . \qquad (2.14)$$

Quest'ultima è la pulsazione dell'oscillazione smorzata, la cui legge oraria è

$$x(t) = A\cos(\omega_s t + \varphi)e^{-\frac{\gamma t}{2}}.$$
(2.15)

Questa è la soluzione, a patto che il radicando in  $\omega_s$  sia positivo. Soluzioni diverse, che qui non ricaviamo, si trovano per  $\gamma = 2\omega_0$  (smorzamento critico)

e per  $\gamma > 2\omega_0$  (sovrasmorzamento); in questi casi, la particella non oscilla ma, partendo da una posizione qualsiasi, raggiunge la posizione di equilibrio in un tempo dell'ordine di  $\gamma^{-1}$ . La soluzione fisicamente più interessante è la (2.15) quando  $\omega_0 \gg \gamma$ , cioè quando le oscillazioni sono poco smorzate e hanno pulsazione  $\omega_s \simeq \omega_0$ , che corrisponde alla situazione che avevamo immaginato in partenza. La funzione coseno oscilla con ampiezza decrescente  $Ae^{-\gamma t/2}$  e con periodo molto minore del tempo tipico di smorzamento  $\tau = \gamma^{-1}$ . L'energia meccanica della particella può essere scritta nella forma  $E(t) = (1/2)kA^2e^{-t/\tau}$ .

#### 2.3 Oscillatore smorzato e forzato

Prendiamo il nostro oscillatore di prima e aggiungiamo una forza esterna periodica del tipo  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ . L'origine del tempo può essere scelta arbitrariamente in modo che t = 0 coincida con un istante in cui la forza è massima. L'equazione del moto diventa

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\omega t), \qquad (2.16)$$

ovvero

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$
(2.17)

Stavolta l'equazione differenziale non è omogenea, cioè contiene un termine in cui non appare l'incognita x nè le sue derivate. Le equazioni non omogenee godono di questa proprietà: se x(t) è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e  $x_{om}(t)$  è la soluzione generale della corrispondente equazione omogenea (quella senza il termine a destra dell'uguale), allora anche  $x(t) + x_{om}(t)$ è una soluzione della non omogenea. La dimostrazione è semplice e si basa sul fatto che le derivate si distribuiscono sulle somme di funzioni, cosicché inserendo la somma  $x(t) + x_{om}(t)$  nell'equazione differenziale i termini con x(t) e quelli con  $x_{om}(t)$  si separano e gli uni e gli altri si annullano per ipotesi. Nel nostro caso sappiamo già qual è la soluzione dell'equazione omogenea, è quella trovata prima per l'oscillatore smorzato:  $x_{\rm om}(t) = A_{\rm om} \cos(\omega_s t + \varphi) e^{-\gamma t/2}$ . Questa funzione tende a zero su tempi dell'ordine di  $\gamma^{-1}$  e per questo è detta soluzione "transiente". Per tempi più lunghi sopravvive solo la soluzione particolare x(t). È ragionevole che la particella sottoposta a lungo all'azione della forza esterna periodica (la "forzante"), sia costretta ad oscillare con la stessa periodicità di quella. Ci aspettiamo dunque che sia

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta), \qquad (2.18)$$

dove  $A \in \theta$  sono grandezze che potrebbero dipendere dall'intensità e dalla pulsazione della forzante. Sarà vero? Verifichiamo per sostituzione diretta.

Per calcolare le derivate, prima usiamo la formula di addizione

$$x = A\cos(\omega t - \theta) = A\cos\theta\cos(\omega t) + A\sin\theta\sin(\omega t), \qquad (2.19)$$

poi deriviamo una volta

$$\dot{x} = -A\omega\cos\theta\sin(\omega t) + A\omega\sin\theta\cos(\omega t), \qquad (2.20)$$

una seconda volta

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos\theta \cos(\omega t) - A\omega^2 \sin\theta \sin(\omega t), \qquad (2.21)$$

inseriamo il tutto nell'equazione del moto (2.17)

$$-\omega^{2}\cos\theta\cos(\omega t) - \omega^{2}\sin\theta\sin(\omega t) - \gamma\omega\cos\theta\sin(\omega t) + \gamma\omega\sin\theta\cos(\omega t) +\omega_{0}^{2}\cos\theta\cos(\omega t) + \omega_{0}^{2}\sin\theta\sin(\omega t) = \frac{F_{0}}{mA}\cos(\omega t)$$
(2.22)

e infine imponiamo che i coefficienti del  $sin(\omega t)$  e del  $cos(\omega t)$  si annullino:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\theta - \gamma\omega\cos\theta = 0$$
  
$$(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\theta + \gamma\omega\sin\theta = \frac{F_0}{mA}.$$
 (2.23)

Dalla prima equazione si trova

$$\cot \theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega}.$$
 (2.24)

La quantità  $\theta$  esprime lo sfasamento tra la forzante e l'oscillazione indotta. Una volta fissate le caratteristiche dell'oscillatore, espresse dai parametri  $\gamma$  e  $\omega_0$ , tale sfasamento non dipende dall'intensità  $F_0$  della forzante, ma solo dalla sua pulsazione  $\omega$ . In particolare, nell'intervallo di  $[0, \pi]$ , lo sfasamento che abbiamo trovato cresce da  $\theta = 0$  per  $\omega = 0$  (forzante statica) fino a  $\theta = \pi$  per  $\omega \to \infty$ , passando per  $\theta = \pi/2$  per  $\omega = \omega_0$ . Torneremo su questo risultato più avanti per capirne il significato fisico.

Per eliminare  $\theta$  dalle due equazioni (2.23) basta prenderne il quadrato e sommarle. Si trova

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2 = \left(\frac{F_0}{mA}\right)^2, \qquad (2.25)$$

da cui

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}.$$
 (2.26)

In conclusione, la soluzione dell'equazione del moto dell'oscillatore smorzato e forzato è

$$x(t) = A_{\rm om} \cos(\omega_s t + \varphi) e^{-\gamma t/2} + A \cos(\omega t - \theta), \qquad (2.27)$$



Figura 2.2: Ampiezza e sfasamento dell'oscillazione in funzione della frequenza della forzante. In entrambi i casi, l'ascissa è il rapporto  $\omega/\omega_0$ . L'ordinata a sinistra è l'ampiezza normalizzata al suo valore in  $\omega = \omega_0$ , quella a destra è lo sfasamento  $\theta$  in unità di  $\pi$ , così che il suo valore in  $\omega = \omega_0$  è  $\pi/2$ . Entrambe le curve sono state disegnate scegliendo il valore  $\omega_0/\gamma = 5$ .

dove il primo termine è il transiente e il secondo è la soluzione che sopravvive a tempi lunghi, con sfasamento  $\theta$  e ampiezza A dati dalle espressioni (2.24) e (2.26) e rappresentati nelle figure qui sotto nel caso particolare  $\omega_0/\gamma = 5$ .

Notiamo che l'ampiezza ha un massimo vicino a  $\omega = \omega_0$ . La posizione esatta del massimo si può calcolare facilmente imponendo che la derivata  $dA/d\omega$  si annulli, il che è equivalente ad annullare la derivata di  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2$ . Il risultato è

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}}$$
 (2.28)

Per  $\omega_0/\gamma$  grande, sia  $\omega_{\text{max}}$  che la pulsazione  $\omega_s$  dell'oscillatore smorzato, già trovata in (2.14), convergono al valore  $\omega_0$ .

### 2.4 Risonanza

Concentriamoci sul comportamento di un oscillatore forzato e debolmente smorzato ( $\omega_0/\gamma \gg 1$ ). In tal caso la curva che rappresenta l'ampiezza dell'oscillazione dopo il transiente è fortemente piccata intorno alla pulsazione propria dell'oscillatore,  $\omega_0$ . Di fatto il sistema, caratterizzato da una propria frequenza di oscillazione libera, risponde pochissimo alla sollecitazione esterna se questa ha frequenze diverse, ma risponde fortemente nel caso di frequenze vicine a quella propria. Inoltre, quando la frequenza della forzante coincide con quella dell'oscillatore libero, la fase della forzante e la fase dell'oscillazione differiscono di  $\pi/2$ . Un sistema che risponde in modo così selettivo alla perturbazione periodica esterna è detto risonatore, e il fenomeno è detto risonanza. Per capire la risonanza dal punto di vista fisico conviene ragionare in termini di energia. La forzante compie lavoro sull'oscillatore, mentre l'attrito dissipa energia. Il lavoro compiuto nell'unità di tempo è la potenza, che può essere espressa come prodotto della forza per la velocità, P = Fv. Nel nostro caso, abbiamo già gli ingredienti per calcolarla:

$$P(t) = F(t)\dot{x}(t) = F_0 \cos(\omega t) [-A\omega \cos\theta \sin(\omega t) + A\omega \sin\theta \cos(\omega t)]$$
  
=  $F_0 A\omega [-\cos\theta \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin\theta \cos^2(\omega t)].$  (2.29)

Questa è una funzione complicata del tempo, ma possiamo facilmente calcolarne il valor medio su un periodo, definito da  $\langle P \rangle = (1/T) \int_0^T P(t) dt$ . L'integrale del primo addendo nella parentesi quadra si annulla, dato che il prodotto  $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$  equivale ad una funzione di periodo doppio, simmetrica rispetto allo zero. Il secondo termine invece dà il valor medio del coseno quadro, che vale 1/2. Dunque otteniamo

$$\langle P \rangle = \frac{F_0 \omega}{2} A \sin \theta .$$
 (2.30)

Per completare il calcolo torniamo indietro alle due equazioni (2.23), moltiplichiamo la prima per  $(\omega_0^2 - \omega^2)$ , la seconda per  $\gamma \omega$  e le sommiamo. Possiamo scrivere il risultato in termini della quantità  $A \sin \theta$ , in modo da inserirlo nell'espressione qui sopra per la potenza media. Così facendo otteniamo

$$\langle P \rangle = \frac{F_0 \omega}{2} \frac{\gamma \omega F_0 / m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} = \frac{F_0^2}{2m\gamma} \frac{(\gamma \omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} .$$
(2.31)

Inoltre, se siamo nel limite  $\omega_0/\gamma \gg 1$ , la curva è significativamente non nulla solo in un intervallo piccolo attorno a  $\omega_0$  e, dunque, possiamo sostituire  $\omega$  con  $\omega_0$  nei termini in  $\gamma\omega$  e approximare  $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  a denominatore. Il risultato è il seguente:

$$\left| \langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2m\gamma} \frac{\gamma^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} \right|.$$
 (2.32)

Questa è nota come curva di Lorentz, o semplicemente Lorentziana, ed è comune in molti problemi di fisica, inclusi i processi di assorbimento ed emissione di radiazione elettromagnetica da parte di cariche elettriche in movimento. Notiamo che  $\langle P \rangle$  può essere intesa, indifferentemente, come la potenza media associata al lavoro svolto dalla forzante oppure come l'energia dissipata in media dall'attrito. Dato che, a regime, l'ampiezza dell'oscillazione non cambia nel tempo, l'energia che viene fornita dalla forzante deve essere interamente dissipata.

A questo punto possiamo capire anche il motivo per il quale lo sfasamento  $\theta$  vale proprio  $\pi/2$  nella condizione di risonanza  $\omega = \omega_0$ . Infatti, se  $\theta = \pi/2$ 



Figura 2.3: Potenza media (curva di Lorentz) per un oscillatore con  $\omega_0/\gamma = 10$ . L'ascissa è il rapporto  $\omega/\omega_0$  e l'ordinata è la potenza normalizzata al suo valore in  $\omega = \omega_0$ . Il segmento orizzontale a metà altezza è lungo esattamente  $\gamma/\omega_0$ .

significa che  $x(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin(\omega t)$ , e questo implica che la velocità  $v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t)$  è in fase con la forzante, in modo che il prodotto Fv è massimo. Dunque la condizione di risonanza è quella in cui si riesce ad ottenere la massima risposta da un oscillatore, con il minimo sforzo.

Un'altra considerazione interessante riguarda la larghezza del picco di risonanza. Cerchiamo i valori di  $\omega$  per cui  $\langle P \rangle$  è la metà del valore massimo. Per trovarli basta risolvere l'equazione

$$\frac{1}{2} = \frac{\gamma^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} , \qquad (2.33)$$

che equivale a  $(\omega_0 - \omega)^2 = \gamma^2/4$  ovvero  $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$ . Ne deduciamo quindi che la larghezza a mezza altezza (full width at half maximum - FWHM) vale esattamente  $\gamma$ . Se a questo si aggiunge il fatto che il massimo del picco è proporzionale a  $1/\gamma$ , ne deduciamo anche che il prodotto larghezza  $\times$  altezza è indipendente da  $\gamma$ : picchi più alti sono più larghi e viceversa. Se vogliamo una risonanza stretta dobbiamo fare in modo che la larghezza  $\gamma$  sia molto minore di  $\omega_0$ , perché quello che conta è la larghezza relativa (in fisica, quando si dice piccolo o grande, si intende sempre rispetto a qualcosa d'altro con cui va fatto il confronto). Il rapporto

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} , \qquad (2.34)$$

viene chiamato "fattore di qualità" della risonanza. Se è grande, la risonanza è alta e stretta, e la risposta dell'oscillatore alle perturbazioni esterne è selettiva in frequenza. Possiamo anche ricordarci che  $\tau = 1/\gamma$  è il tempo tipico di decadimento delle oscillazioni dell'oscillatore smorzato, mentre  $T = 2\pi/\omega_0$  è il

periodo di oscillazione dell'oscillatore libero. Dunque possiamo anche scrivere il fattore di qualità nella forma  $Q = 2\pi\tau/T$  e notare che Q è grande quando il tempo tipico di smorzamento è molto maggiore del periodo di oscillazione.

In genere, un sistema fisico ammette oscillazioni proprie, determinate dalla natura delle configurazioni di equilibrio e dal tipo di interazioni coinvolte nella dinamica attorno a tali configurazioni. Possiamo interrogare il sistema dall'esterno con una perturbazione e, se il sistema risponde in modo risonante, la risposta contiene informazioni utili sulla sua struttura fisica interna. Possiamo anche sfruttare risonatori appositamente costruiti per amplificare segnali che sarebbero troppo deboli per essere rivelati direttamente. Oppure possiamo usare le risonanze come un mezzo efficace per trasferire energia da una sistema all'altro. Risonanze si trovano in acustica (nella musica!), in elettronica, in fisica atomica, in fisica nucleare, ecc.; in pratica, ovunque.

# Capitolo 3 Oscillatori accoppiati e onde

### 3.1 Due oscillatori accoppiati

Consideriamo un sistema unidimensionale costituito da due particelle di massa m collegate a tre molle uguali di costante elastica k, come in figura. Siano  $\varphi_a(t)$  e  $\varphi_b(t)$  gli spostamenti delle masse dalle rispettive posizioni di equilibrio, dove l'indice a indica la massa a sinistra in figura e b quella a destra; gli spostamenti siano positivi se effettuati verso destra. Per inciso, qui preferiamo usare un simbolo diverso da x per indicare gli spostamenti; la ragione è che, quando estenderemo il calcolo a una catena di tre o più oscillatori, useremo x per indicare la posizione delle singole masse lungo la catena. Tenuto conto che ognuna delle particelle è soggetta alla forza elastica di due molle, le equazioni del moto per le due particelle sono

$$m\ddot{\varphi}_a = -k\varphi_a + k(\varphi_b - \varphi_a) = -2k\varphi_a + k\varphi_b$$
  

$$m\ddot{\varphi}_b = -k\varphi_b - k(\varphi_b - \varphi_a) = -2k\varphi_b + k\varphi_a .$$
(3.1)

Come al solito, chiamiamo  $\omega_0^2 = k/m$ . Allora le equazioni diventano

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2 (2\varphi_a - \varphi_b)$$
  
$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2 (-\varphi_a + 2\varphi_b) . \qquad (3.2)$$



Il sistema è descritto da due equazioni differenziali al secondo ordine accoppiate, la cui soluzione è una coppia di funzioni ( $\varphi_a(t), \varphi_b(t)$ ). L'accoppiamento viene dai termine incrociati, quello contenente  $\varphi_b$  nell'equazione per  $\varphi_a$  e quello contenente  $\varphi_a$  nell'equazione per  $\varphi_b$ . Le due equazioni non possono essere risolte individualmente. Una proprietà importante di queste equazioni è che sono lineari, cioè contengono le incognite e le loro derivate alla potenza 1 soltanto. Da questo segue che, se si conoscono due soluzioni indipendenti  $(\varphi_a(t), \varphi_b(t))_1$ e  $(\varphi_a(t), \varphi_b(t))_2$ , la soluzione generale delle due equazioni è una combinazione lineare delle due  $A_1(\varphi_a(t), \varphi_b(t))_1 + A_2(\varphi_a(t), \varphi_b(t))_2$ . Lo si vede sostituendo quest'ultima nelle due equazioni e usando la distributività delle derivate sulle somme.

Come nei capitoli precedenti assumo che gli studenti non conoscano la teoria delle equazioni differenziali e cerco possibili soluzioni sulla base di argomenti fisici. In questo caso, ci accorgiamo che, se le particelle vengono spostate a destra o sinistra della stessa distanza dalla rispettiva posizione di equilibrio, la molla centrale mantiene la sua lunghezza a riposo e non viene sollecitata. Ci aspettiamo quindi che il moto avvenga per effetto delle sole molle laterali. Questo è equivalente a imporre  $\varphi_a(t) = \varphi_b(t)$ , riducendo così le equazioni precedenti ad un sistema di due equazioni armoniche indipendenti,

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a &= -\omega_0^2 \varphi_a \\ \ddot{\varphi}_b &= -\omega_0^2 \varphi_b , \end{aligned} \tag{3.3}$$

la cui soluzione è la coppia di funzioni armoniche identiche

$$\varphi_a(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$$
  

$$\varphi_b(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) . \qquad (3.4)$$

Le due particelle si muovono in fase, con la stessa ampiezza, per sempre.

Un'altra soluzione possiamo intuirla pensando a cosa succede se lo spostamento iniziale delle due masse avviene in direzione opposta, sempre della stessa ampiezza. In tal caso la molla centrale viene compressa o dilatata, in opposizione alle molle laterali. Per simmetria, ci aspettiamo che il moto prosegua mantenendo sempre  $\varphi_a(t) = -\varphi_b(t)$ . Se inseriamo questa condizione nelle due equazioni accoppiate, stavolta troviamo

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a &= -3\omega_0^2 \varphi_a \\ \ddot{\varphi}_b &= -3\omega_0^2 \varphi_b , \end{aligned} \tag{3.5}$$

la cui soluzione è la coppia di funzioni armoniche identiche

$$\varphi_a(t) = A_2 \cos(\sqrt{3\omega_0 t} + \theta_2)$$
  

$$\varphi_b(t) = -A_2 \cos(\sqrt{3\omega_0 t} + \theta_2) . \qquad (3.6)$$

Le due particelle si muovono in contro-fase, con la stessa ampiezza, per sempre. La pulsazione di questa oscillazione è  $\sqrt{3k/m}$ , come ci si aspetta se si considera



Figura 3.1: Spostamento dall'equilibrio della particella *a* (sopra) e della particella *b* (sotto), per l'oscillatore accoppiato che si muove secondo le leggi orarie (3.9), con A = 1 e il tempo espresso in unità  $\omega_0^{-1}$ . Le linee sottili nel pannello superiore rappresentano la modulazione d'ampiezza  $\pm 2A \cos((\sqrt{3} - 1)\omega_0 t/2)$ ; analogamente nel pannello inferiore le linee rappresentano la modulazione  $\pm 2A \sin((\sqrt{3} - 1)\omega_0 t/2)$ .

che la deformazione della molla centrale, in ogni istante, è pari al doppio della deformazione delle molle laterali e, dunque, tutto va come se ciascuna particella fosse soggetta ad una molla di costante elastica tripla.

Abbiamo così trovato due soluzioni indipendenti, ciascuna con due costanti di integrazione, e possiamo concludere che anche la combinazione lineare

$$\varphi_{a}(t) = A_{1} \cos(\omega_{0}t + \theta_{1}) + A_{2} \cos(\sqrt{3}\omega_{0}t + \theta_{2})$$
  
$$\varphi_{b}(t) = A_{1} \cos(\omega_{0}t + \theta_{1}) - A_{2} \cos(\sqrt{3}\omega_{0}t + \theta_{2})$$
(3.7)

è una soluzione. Che sia la soluzione più generale lo dimostreremo in seguito, nel capitolo 4. Qui ci limitiamo a studiare un caso particolare, semplice e interessante, che è quello in cui  $A_1 = A_2$  e  $\theta_1 = \theta_2 = -\pi/2$ . Con questi valori la soluzione diventa

$$\varphi_a(t) = A[\sin(\omega_0 t) + \sin(\sqrt{3}\omega_0 t)]$$
  
$$\varphi_b(t) = A[\sin(\omega_0 t) - \sin(\sqrt{3}\omega_0 t)]$$
(3.8)

e può essere riscritta usando le formule di prostaferesi:

$$\varphi_a(t) = 2A \cos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega_0 t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega_0 t\right)$$
$$\varphi_b(t) = -2A \sin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\omega_0 t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\omega_0 t\right). \tag{3.9}$$

Lo spostamento di ciascuna particella è il prodotto di due funzioni periodiche con pulsazione diversa; il rapporto tra le due pulsazioni è  $(\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}-1) \simeq$ 3.73, che è anche uguale al rapporto tra le velocità iniziali (in modulo) delle due particelle. L'oscillazione più lenta (il coseno in  $\varphi_a$  e il seno in  $\varphi_b$ ) si comporta come una modulazione di ampiezza per l'oscillazione più rapida (il seno in  $\varphi_a$ e il coseno in  $\varphi_b$ ). L'effetto è quello mostrato in figura. Appare evidente che, negli istanti in cui la particella *a* oscilla con grande ampiezza, la particella *b* si muove poco e viceversa.

Dal punto di vista dell'energia meccanica quello che avviene è uno scambio periodico di energia tra le due particelle, a somma costante. L'energia meccanica del sistema infatti può essere scritta in questo modo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}_a^2 + \frac{1}{2}k\varphi_a^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varphi}_b^2 + \frac{1}{2}k\varphi_b^2 + \frac{1}{2}k(\varphi_a - \varphi_b)^2 , \qquad (3.10)$$

e l'ultimo termine è il responsabile dello scambio.

### **3.2** Onde

Per estensione del modello precedente, immaginiamo di rimpiazzare il muro a destra con un'altra particella identica, e poi un'altra molla e un'altra particella, e così via, in modo da formare una lunga catena lineare di particelle e molle. Lasciamo la trattazione dettagliata di questo problema ad un capitolo successivo (facoltativo, per chi vuole approfondire). Qui ragioniamo in modo euristico.



Enumeriamo le particelle da sinistra a destra con un indice intero  $i = 1, 2, 3, \ldots$  e indichiamo con  $\varphi_i(t)$  lo spostamento della particella *i*-esima. Le funzioni  $\varphi_i(t)$ , come nel caso precedente, obbediranno ad un insieme di equazioni differenziali accoppiate, in numero pari al numero di particelle. Possiamo

introdurre una coordinata x orizzontale in modo da identificare con  $x_i$  la coordinata della particella *i*-esima lungo la catena. Immaginiamo che gli oscillatori siano veramente tanti e che il sistema sia osservato su una scala di distanze Lmolto più grande della distanza tra le singole particelle. La catena, in queste condizioni, può essere vista come un mezzo continuo, avente una certa densità lineare di massa e certe proprietà elastiche locali. Lo spostamento locale  $\varphi_i(t)$  va inteso come lo spostamento dall'equilibrio al tempo t della particella che si trova nel punto  $x_i$  e nel limite del continuo possiamo sostituire l'indice intero con la variabile continua x; in questo modo lo spostamento diventa una funzione di due variabili continue:  $\varphi(x, t)$ .



Immaginiamo la nostra catena elastica a riposo, con deformazione locale nulla ovunque:  $\varphi(x,t) = 0$ . Ad un certo istante t = 0 produciamo dall'esterno una perturbazione locale ad un estremo della catena. Nel caso della particelle e delle molle, questo corrisponde ad esempio a dare una spinta a una o più particelle a sinistra, lasciando ferme le altre; nel caso continuo, invece, corrisponde ad assumere che  $\varphi(x, t = 0) \neq 0$  in un certo intervallo di x all'estremo sinistro della catena. Per estensione logica di quanto trovato nel caso dei due oscillatori accoppiati, siamo portati a pensare che la deformazione locale possa propagarsi verso destra nel tempo, trasferendo anche la corrispondente energia meccanica lungo la catena. Aggiungiamo un'ulteriore congettura: che la deformazione  $\varphi(x,t)$  trasli in modo rigido, cioè senza modificare la sua forma, in modo tale che, in un tempo generico t, la deformazione sia la stessa che a un tempo precedente  $t_0$ , salvo per una traslazione spaziale di una distanza  $v(t-t_0)$ , dove v è una velocità di propagazione che dipende dalle caratteristiche della catena. Formalmente questo equivale a imporre

$$\varphi(x,t) = \varphi(x - vt, 0) . \qquad (3.11)$$

avendo scelto arbitrariamente  $t_0 = 0$  per semplicità. Dunque, per soddisfare il requisito di traslazione rigida, la  $\varphi$  non può dipendere da x e t in modo

indipendente, ma deve essere una funzione di x - vt. Esiste un'equazione differenziale per  $\varphi(x, t)$  che ammetta soluzioni di questo tipo? Sì! Per dimostrarlo introduciamo la variabile  $\eta = x - vt$  e chiamiamo  $\varphi' = d\varphi/d\eta$  e  $\varphi'' = d^2\varphi/d\eta^2$ . Poi calcoliamo le derivate parziali di  $\varphi$  rispetto a  $x \in t$ , usando le regole per la derivazione di funzione di funzione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) = \varphi'$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \varphi'' \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) = \varphi''$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi' \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) = -v\varphi'$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -v \varphi'' \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) = v^2 \varphi''.$$
(3.12)

Dividendo l'ultima per  $v^2$  e sottra<br/>endola alla seconda, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$
(3.13)

Questa equazione è nota come "equazione delle onde". È un'equazione differenziale alle derivate parziali, al secondo ordine, omogenea e lineare. È una delle equazioni più importanti della fisica!

La linearità dell'equazione viene dal fatto che stiamo descrivendo sistemi che reagiscono in modo lineare alle perturbazioni (forze elastiche in senso lato). Se le perturbazioni sono piccole, è naturale aspettarsi una risposta lineare, anche se l'equazione potrebbe non essere questa. Se è questa, come spesso accade, allora il sistema ammette soluzioni propaganti nello spazio e nel tempo, come in (3.11), che chiamiamo onde (ma ne ammette anche altre, non propaganti, come vedremo più avanti). La natura delle oscillazioni che si propagano può essere diversa da sistema a sistema e, all'interno dello stesso sistema, possono propagarsi onde di tipo diverso. Ad esempio, nella catena discreta di particelle e molle potremmo indurre una perturbazione locale in cui le particelle si muovono orizzontalmente, in modo che la direzione di propagazione dell'onda e la direzione del moto locale coincidono. In questo caso si parla di onde longitudinali. Ma potremmo anche muovere le particelle in su e in giù; il significato della  $\varphi(x,t)$  sarebbe lo stesso, salvo che la direzione del moto locale sarebbe ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. In questo caso si parla di onda trasversale e la velocità di propagazione può essere diversa. Le vibrazioni di una corda tesa (come una corda di chitarra) sono trasversali, il suono nell'aria è longitudinale, le onde sismiche hanno componenti sia trasversali che longitudinali, e così via.

Finora non abbiamo ipotizzato nulla in merito alla forma della  $\varphi(x,t)$ . L'equazione delle onde ammette soluzioni di forma diversa; se dipendono da x - vt, allora traslano rigidamente nello spazio. Una classe particolare di soluzioni sono le onde sinusoidali del tipo

$$\varphi(x,t) = A\cos(qx - \omega t + \theta) , \qquad (3.14)$$

con costanti A e  $\theta$ arbitrarie. Che queste siano funzioni di x-vtlo si vede riscrivendole nella forma

$$\varphi(x,t) = A\cos\left[q\left(x - \frac{\omega}{q}t\right) + \theta\right] = A\cos[q(x - vt) + \theta], \qquad (3.15)$$

dove  $v = \omega/q$  è la velocità di propagazione. Queste funzioni sono periodiche sia nello spazio che nel tempo. Il periodo spaziale  $\lambda = 2\pi/q$  è chiamato lunghezza d'onda, mentre q spesso è detto numero d'onda; il periodo temporale è  $2\pi/\omega$ . Nulla vieta però di avere onde diverse, come le onde quadre, a dente di sega, o di forma qualsiasi. La fisica non cambia.

Come già detto prima, la velocità v dipende dal tipo di onde e dalla natura del mezzo in cui si propagano. Per ricavarla occorre derivare esplicitamente l'equazione delle onde per un dato sistema, cosa che finora non abbiamo fatto (abbiamo solo usato ragionevoli congetture). Per la catena di masse e molle questo lo faremo più avanti, nel capitolo 5. Qui mostriamo un esempio semplice: le onde trasversali di una corda vibrante. Più avanti parleremo anche di onde longitudinali in una corda elastica.

Consideriamo una corda metallica vincolata agli estremi e tenuta in tensione, nella direzione orizzontale x, da una forza esterna. La corda è omogenea e ogni suo tratto è sottoposto alla stessa tensione T (si noti che spesso la tensione è definita come forza per unità di area, ma qui trascuriamo la sezione della corda e identifichiamo la tensione con la forza). Ora supponiamo che, in un certo istante t la corda sia deformata trasversalmente in modo che la quota locale y di un tratto di corda che si trova nella posizione x sia  $y = \varphi(x, t)$ . Consideriamo un piccolo elemento della corda, i cui estremi a sinistra e a destra si trovino in  $x \in x + dx$ . La lunghezza dx va intesa come una lunghezza molto piccola rispetto alla scala su cui varia la deformazione  $\varphi(x,t)$ . La forza che quel tratto di corda subisce verso sinistra, per effetto del resto della corda, ha modulo T e la sua direzione è tangente alla corda in x; lo stesso tratto di corda sente una forza verso destra, sempre con modulo T, con direzione tangente alla corda in x + dx. Se la corda avesse curvatura nulla, le due forze si compenserebbero esattamente; ma laddove la corda s'incurva, le due direzioni tangenti formano angoli diversi,  $\theta(x) \in \theta(x + dx)$ , rispetto all'orizzonte, e le due forze danno luogo ad una componente verticale non nulla, pari a  $dF = T[\sin(\theta(x+dx)) - \sin(\theta(x))]$ . Per piccole deformazioni, gli angoli sono piccoli e possiamo approssimare il seno con il suo argomento. Perciò abbiamo  $dF = T[\theta(x + dx) - \theta(x)]$  e, usando i differenziali, possiamo scrivere  $dF = T(\partial \theta / \partial x) dx$ , dove abbiamo usato le derivate parziali per ricordarci che l'angolo  $\theta$ , in generale, dipende anche dal tempo. Inoltre sappiamo che l'angolo  $\theta$  dà la pendenza locale della corda nel piano  $x \cdot y$  e possiamo scrivere  $\theta \simeq \tan \theta = \partial \varphi / \partial x$ . Inserendo questa espressione nella forza otteniamo  $dF = T(\partial^2 \varphi / \partial x^2) dx$ . Questa forza agisce verticalmente su un tratto di corda di massa  $dm = \mu dx$ , se  $\mu$  è la densità lineare di massa. L'accelerazione verticale di quel tratto è  $\partial^2 \varphi / \partial t^2$  e la II legge di Newton diventa

$$\mu dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx , \qquad (3.16)$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 , \qquad (3.17)$$

che è l'equazione delle onde. La velocità di propagazione delle vibrazioni della corda è  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Data una corda di un materiale assegnato, per avere velocità di propagazione alta basta mettere la corda in tensione, oppure ridurne la sezione; oppure, a parità di sezione, si può scegliere un materiale più denso. Chi ha una chitarra, può cogliere facilmente il senso di questo risultato.

### 3.3 Sovrapposizione di onde

Il fatto che l'equazione delle onde è lineare ha una conseguenza importante: se un sistema ammette onde diverse, soluzioni indipendenti della stessa equazione, allora ammette anche combinazioni lineari di queste. Prendiamo ad esempio una sistema unidimensionale su cui si propagano contemporaneamente due onde con la stessa lunghezza d'onda e la stessa pulsazione, ma sfasate di una fase  $\theta$  assegnata:

$$\varphi_1(x,t) = A\sin(qx - \omega t)$$
  

$$\varphi_2(x,t) = A\sin(qx - \omega t - \theta) . \qquad (3.18)$$

Se le onde interessano la stessa regione di spazio, la deformazione locale del sistema in quella regione sarà semplicemente la somma delle due funzioni:

$$\varphi(x,t) = A[\sin(qx - \omega t) + \sin(qx - \omega t - \theta)], \qquad (3.19)$$

ovvero

$$\varphi(x,t) = 2A\cos(\theta/2)\sin(qx - \omega t - \theta/2), \qquad (3.20)$$

Si tratta quindi di una singola onda sinusoidale, con fase intermedia tra le due, e con ampiezza costante, pari a  $2A\cos(\theta/2)$ . Se lo sfasamento tra le due onde era  $\pi$ , allora l'ampiezza dell'onda risultante è nulla. Il sistema non oscilla affatto. Si tratta di una interferenza distruttiva tra due onde che darebbero deformazioni di segno opposto in ogni punto e in ogni istante, con l'effetto di

annullarsi a vicenda. Se invece  $\theta = 0$ , le due onde producono una interferenza costruttiva e raddoppiano l'ampiezza della deformazione. In una dimensione l'effetto è un po' banale. In due o tre dimensioni può dar luogo a figure d'interferenza interessanti. Si pensi al classico esempio dei due sassi lanciati nello stagno o all'esperimento di Young con la doppia fenditura.

Un altro esempio è quello di due onde in fase, sempre nello stesso sistema unidimensionale, che abbiano lunghezze d'onda e pulsazioni di poco diverse:

$$\varphi_1(x,t) = A \sin(q_1 x - \omega_1 t)$$
  

$$\varphi_2(x,t) = A \sin(q_2 x - \omega_2 t)$$
(3.21)

dove  $q = (q_1 + q_2)/2$  e  $\Delta q = (q_1 - q_2) \ll q$  e, analogamente,  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  e  $\Delta \omega = (\omega_1 - \omega_2) \ll \omega$ . Come prima, nella regione in cui si sovrappongono, la deformazione totale sarà la somma

$$\varphi(x,t) = A[\sin(q_1 x - \omega_1 t) + \sin(q_2 x - \omega_2 t)], \qquad (3.22)$$

ovvero

$$\varphi(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta q}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin(qx - \omega t) . \qquad (3.23)$$

In un istante generico t, questa funzione corrisponde ad una funzione seno con lunghezza d'onda  $2\pi/q$ , modulata in ampiezza da una funzione coseno di lunghezza d'onda molto maggiore, essendo  $\Delta q \ll q$ . Analogamente, mettendosi in punto x fissato, il sistema oscilla nel tempo con una funzione seno di periodo  $2\pi/\omega$ , modulata in ampiezza da una funzione coseno di periodo molto maggiore. Questo fenomeno si chiama battimento. Un classico esempio è quello che si ottiene quando pizzichiamo contemporaneamente due corde di chitarra che suonano quasi la stessa nota. Le corde generano onde sonore nello spazio circostante fino ai nostri orecchi e, se una delle due corde è intonata sul "la" a frequenza 440 Hz mentre l'altra è leggermente stonata a 442 Hz, noi sentiremo un unico suono di frequenza 441 Hz ma con un'intensità che ha massimi (e minimi) che si ripetono a intervalli di tempo pari a  $2\pi/\Delta\omega = 1/\Delta f = 0.5$  s, ovvero con frequenza  $\Delta f = 2$  Hz. Possiamo utilizzare questo effetto per intonare la corda, agendo sulla chiave per aumentarne o diminuirne la tensione Tfino ad annullare  $\Delta f$ , facendo così sparire il battimento.

Come ultimo caso, supponiamo che nel sistema si propaghino due onde identiche in tutto, ma che traslano in verso opposto:

$$\varphi_1(x,t) = A\sin(qx - \omega t)$$
  

$$\varphi_2(x,t) = A\sin(qx + \omega t) . \qquad (3.24)$$

Il segno + nella seconda ci dice che la velocità è negativa e l'onda trasla verso sinistra, mentre la prima trasla verso destra. La loro somma è

$$\varphi(x,t) = A[\sin(qx - \omega t) + \sin(qx + \omega t)], \qquad (3.25)$$

ovvero

$$\varphi(x,t) = 2A\cos(\omega t)\sin(qx) . \qquad (3.26)$$

Questa non è un'onda che si propaga. È un'onda "stazionaria". Fissato x è un'oscillazione armonica in t; fissato t è un'oscillazione armonica in x. Ci sono dei punti nello spazio in cui l'ampiezza è sempre nulla (i nodi) o sempre massima (i ventri). Soluzioni di questo tipo caratterizzano una moltitudine di sistemi. Inclusa la corda di chitarra di cui si parlava appena sopra. Avremo modo di tornarci diffusamente. Per il momento, la parte generale sugli oscillatori e le onde la finisco qui.

### Capitolo 4

### Algebra lineare e oscillatori

#### 4.1 Due masse e tre molle uguali

Da qui in poi riprendo il ragionamento sugli oscillatori accoppiati, ma con un approccio diverso. Voglio sfruttare il linguaggio dell'algebra lineare e degli spazi vettoriali N-dimensionali, che gli studenti hanno cominciato ad imparare nei corsi di matematica, ma che forse vedono ancora come un linguaggio troppo astratto. Per renderlo più concreto non c'è nulla di meglio, dal punto di vista di un fisico, che usare molle e masse. Vediamo come.

Consideriamo lo stesso sistema costituito da due particelle di massa m collegate a tre molle uguali di costante elastica k, che avevamo già discusso all'inizio del capitolo 3. Usiamo la stessa notazione: gli spostamenti delle masse dalle rispettive posizioni di equilibrio sono  $\varphi_a(t) \in \varphi_b(t)$  e obbediscono alle leggi di Newton

$$m\ddot{\varphi}_{a} = -k\varphi_{a} + k(\varphi_{b} - \varphi_{a})$$
  

$$m\ddot{\varphi}_{b} = -k\varphi_{b} - k(\varphi_{b} - \varphi_{a})$$
(4.1)

ovvero

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2 (2\varphi_a - \varphi_b)$$
  
$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2 (-\varphi_a + 2\varphi_b) . \qquad (4.2)$$

 $\cos \omega_0^2 = k/m.$ 

 $\varphi_{b}$ 

Diversamente da quanto fatto nel capitolo 3, qui trasformiamo queste equazioni in equazioni algebriche lineari cercando soluzioni della forma  $\cos(\omega t + \theta)$ , oppure equivalentemente  $\sin(\omega t + \theta)$ , o anche  $\exp[\pm i(\omega t + \theta)]$ . Ad esempio cerchiamo soluzioni fatte così:

$$\varphi_a = a\cos(\omega t + \theta) \tag{4.3}$$

$$\varphi_b = b\cos(\omega t + \theta) , \qquad (4.4)$$

dove  $a \in b$  sono delle costanti numeriche reali. Inserendo queste funzioni nelle equazioni del moto si ottengono le equazioni

$$-\omega^2 a \cos(\omega t + \theta) = -\omega_0^2 (2a - b) \cos(\omega t + \theta) \tag{4.5}$$

$$-\omega^2 b \cos(\omega t + \theta) = -\omega_0^2 (-a + 2b) \cos(\omega t + \theta) .$$
(4.6)

Affinché queste equazioni abbiano soluzione ad ogni tempo t occorre che i coefficienti del coseno siano uguali. Dunque

$$-\omega^2 a = -\omega_0^2 (2a - b) \tag{4.7}$$

$$-\omega^2 b = -\omega_0^2 (-a + 2b) . (4.8)$$

Chiamiamo $\lambda=\omega^2/\omega_0^2.$ Allora le equazioni diventano

$$2a - b = \lambda a \tag{4.9}$$

$$-a + 2b = \lambda b . \tag{4.10}$$

Un sistema di due equazioni algebriche come questo può essere scritto anche in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
(4.11)

e le equazioni del moto delle particelle si sono così trasformate in un problema agli autovalori in uno spazio vettoriale bidimensionale,

$$\mathcal{M}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} , \qquad (4.12)$$

con la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

e il vettore

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ . \tag{4.14}$$

Notiamo subito che la matrice  $\mathcal{M}$  è reale ed è anche simmetrica (è uguale alla sua trasposta), dunque ammette due autovalori reali a cui corrispondono due autovettori linearmente indipendenti. Per trovare autovalori e autovettori

basta trovare la base che diagonalizza la matrice. In pratica, si può riscrivere l'equazione nella forma  $(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{M})\mathbf{u} = 0$ , ovvero

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 , \qquad (4.15)$$

e questa equazione ha soluzioni non banali solo se il determinante della matrice si annulla. La cosiddetta equazione caratteristica  $det(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{M}) = 0$  diventa

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0 \tag{4.16}$$

ovvero

$$[(\lambda - 2) - 1][(\lambda - 2) + 1] = 0$$
(4.17)

da cui

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \tag{4.18}$$

che ha soluzioni per  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 3$  questi sono i due autovalori. Se ricordiamo la definizione di lambda, essi corrispondono alle due pulsazioni

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{4.19}$$

е

$$\omega_2 = \sqrt{3} \,\,\omega_0 = \sqrt{3k/m} \,. \tag{4.20}$$

Per trovare gli autovettori basta sostituire ciascun autovalore nell'equazione (4.15). Per l'autovalore  $\lambda_1 = 1$  si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b \end{pmatrix} = 0.$$
 (4.21)

che implica a = b. L'autovettore è dunque un vettore con le componenti uguali. Possiamo scriverlo in forma generica come  $A_1$ **w**<sub>1</sub> dove  $A_1$  è la generica ampiezza dell'oscillazione e **w**<sub>1</sub> è l'autovettore

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} . \tag{4.22}$$

che ha norma 1, dove la norma è la radice quadrata del prodotto interno  $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1$ . La soluzione con pulsazione  $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$  ha quindi la forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t)\\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) .$$
(4.23)

Le grandezze reali  $A_1 e \theta_1$  sono costanti d'integrazione che sono fissate, caso per caso, dalle condizioni iniziali. La soluzione corrisponde ad una oscillazione di entrambe le particelle in fase e con la stessa ampiezza. Dato che un'oscillazione del genere non modifica la lunghezza della molla intermedia, la forza attiva su ciascuna particella è quella della sola molla laterale, e questo giustifica il fatto che la pulsazione è uguale a quella del singolo oscillatore libero.

Per l'autovalore  $\lambda_1 = 3$  si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 .$$
 (4.24)

che implica a = -b. L'autovettore è dunque un vettore con le componenti opposte. Analogamente a prima, possiamo scriverlo in forma generica come  $A_2\mathbf{w}_2$  dove  $A_2$  è la generica ampiezza dell'oscillazione e  $\mathbf{w}_2$  è l'autovettore normalizzato a 1

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\-1 \end{pmatrix} . \tag{4.25}$$

La soluzione con pulsazione  $\sqrt{3} \omega_0$  ha quindi la forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t)\\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$
(4.26)

e si tratta di una oscillazione in anti-fase delle due particelle, con uguale ampiezza  $A_2$ . Una oscillazione di questo tipo produce una deformazione della molla centrale doppia di quelle laterali e questo rende il sistema equivalente a due oscillatori disaccoppiati ma con molle di costante elastica tripla.

È interessante notare a questo punto che i due vettori  $\mathbf{w}_1 \in \mathbf{w}_2$  sono ortogonali, dato che  $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$ , e costituiscono una base ortonormale di uno spazio vettoriale in due dimensioni. I vettori di tale spazio rappresentano l'insieme di tutte le possibili oscillazioni delle particelle. La forma generale delle oscillazioni possibili, soluzioni delle equazioni del moto di partenza, può essere scritta come combinazione lineare dei due vettori di base:

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t)\\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) . \quad (4.27)$$

Questa espressione contiene quattro costanti d'integrazione,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , come ci si aspetta per due equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine.

Per arrivare a questa soluzione il formalismo dei vettori e delle matrici non era strettamente necessario. C'eravamo già arrivati nel capitolo 3 ragionando in termini fisici: avevamo individuato, a occhio, le due soluzioni corrispondenti alle oscillazioni delle particelle in fase e in anti-fase e avevamo verificato, per sostituzione nelle equazioni del moto, che si trattava di soluzione buone. Tuttavia, come vedremo, il linguaggio dell'algebra lineare ci permette di comprendere meglio la fisica degli oscillatori accoppiati in generale e fornisce uno strumento potente per risolvere le equazioni nei casi più complicati di questo. Rimanendo in questo caso semplice, ragioniamo sulla forma della matrice  $\mathcal{M}$  rispetto alla scelta dello spazio vettoriale. La forma (4.13) equivale alla rappresentazione delle equazioni del moto quando si usano come vettori di base i vettori { $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ } identificati dalle oscillazioni di ciascuna delle due masse separatamente:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

In questa base, gli autovettori di  $\mathcal{M}$  sono

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\-1 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Ora consideriamo la matrice  $\mathcal{U}$  costruita usando come colonne i due vettori  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{4.30}$$

Notiamo che si tratta di una matrice simmetrica,  $\mathcal{U}^T = \mathcal{U}$ , ma non solo, è anche ortogonale, dato che  $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^T = \mathcal{U}$ . Ricordiamo in proposito che l'inversa di una matrice si calcola in questo modo: se

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \qquad (4.31)$$

allora

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} , \qquad (4.32)$$

mentre la matrice trasposta è

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} , \qquad (4.33)$$

e si vede facilmente che  $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^T = \mathcal{U}$ . Questa matrice ortogonale  $\mathcal{U}$  è la matrice che realizza il cambiamento di base. Appplicata ad un vettore generico nella vecchia base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , fornirà lo stesso vettore ma nella nuova base  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ . Allo stesso modo, trasforma le matrici. Ad esempio, se vogliamo rappresentare la matrice  $\mathcal{M}$  nella nuova base dobbiamo usare la matrice di cambiamento di base  $\mathcal{U}$  in questo modo:

$$\mathcal{M}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{U} , \qquad (4.34)$$

ovvero

$$\mathcal{M}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
(4.35)

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
(4.36)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$
(4.37)

Abbiamo così ottenuto la matrice diagonale, con gli autovalori sulla diagonale.

I due vettori che formano la base ortonormale  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  sono detti *modi* normali di oscillazione del sistema e ogni oscillazione generica sarà combinazione lineare dei modi normali. Inoltre notiamo che, se le condizioni iniziali delle particelle sono tali da eccitare al tempo iniziale uno solo dei due modi normali, il moto rimarrà per sempre in quello stesso modo normale; la matrice in quella base è diagonale e i due modi normali rimangono disaccoppiati.

### 4.2 Due masse uguali e tre molle diverse



Ora consideriamo due particelle di massa m e tre molle come prima, ma stavolta la molla centrale abbia costante elastica k' diversa dalle altre. Partiamo dalle equazioni del moto per le oscillazioni delle due masse accoppiate e cerchiamo di ricavarci la matrice da diagonalizzare per trovare i modi normali. Le equazioni del moto sono

$$m\ddot{\varphi}_a = -k\varphi_a + k'(\varphi_b - \varphi_a) = -(k+k')\varphi_a + k'\varphi_b \tag{4.38}$$

$$m\ddot{\varphi}_b = -k\varphi_b - k'(\varphi_b - \varphi_a) = -(k+k')\varphi_b + k'\varphi_a . \tag{4.39}$$

Chiamiamo $\omega_0^2=k/m$ e $\epsilon=k'/k.$  Allora le equazioni diventano

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2 [(1+\epsilon)\varphi_a - \epsilon\varphi_b] \tag{4.40}$$

$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2 \left[ -\epsilon \varphi_a + (1+\epsilon) \varphi_b \right].$$
(4.41)

Possiamo cercare soluzioni del tipo

$$\varphi_a = a\cos(\omega t + \theta) \tag{4.42}$$

$$\varphi_b = b\cos(\omega t + \theta) . \tag{4.43}$$

Inserendole nelle equazioni precedenti, queste ci danno

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1+\epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1+\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
(4.44)

e se chiamiamo $\lambda=\omega^2/\omega_0^2$ possiamo scrivere l'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 1+\epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1+\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
(4.45)

ovvero

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 - \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \lambda - 1 - \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 .$$
(4.46)

È lo stesso problema di prima, ma con una matrice un po' diversa. Ora c'è un parametro in più,  $\epsilon$ , che misura il diverso effetto delle molle. Notiamo che per  $\epsilon = 1$  tutto si riduce al caso precedente delle molle uguali.

Per determinare i modi normali dobbiamo annullare il determinante della matrice appena scritta qui sopra,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 - \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \lambda - 1 - \epsilon \end{pmatrix} = 0.$$
(4.47)

Si ottiene

$$(\lambda - 1 - \epsilon)^2 - \epsilon^2 = 0 \tag{4.48}$$

ovvero

$$[(\lambda - 1 - \epsilon) - \epsilon][(\lambda - 1 - \epsilon) + \epsilon] = 0$$
(4.49)

da cui

$$(\lambda - 1 - 2\epsilon)(\lambda - 1) = 0 \tag{4.50}$$

che ha soluzioni per  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 1 + 2\epsilon$ . Questi sono i due autovalori e le pulsazioni corrispondenti sono  $\omega_1 = \omega_0$  e  $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\epsilon} \omega_0$ . È facile vedere che gli autovettori sono gli stessi che nel caso precedente. Infatti, inserendo  $\lambda_1$  nell'equazione (4.46) si ha

$$\begin{pmatrix} -\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 , \qquad (4.51)$$

che implica a = b, ovvero l'oscillazione in fase delle masse, con la molla centrale non sollecitata. Invece inserendo  $\lambda_2$  si ha

$$\begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 , \qquad (4.52)$$

che implica a = -b, ovvero un'oscillazione in anti-fase. I due autovettori ortonormali sono gli stessi  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  del caso precedente,

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\-1 \end{pmatrix}, \qquad (4.53)$$

e, di conseguenza, anche la matrice di cambiamento di base,  $\mathcal{U}$ , rimane la stessa. Ciò che cambia è solo la pulsazione dell'oscillazione in anti-fase, che stavolta dipende dal rapporto tra le costanti elastiche  $\epsilon$ .



Figura 4.1: Oscillazione delle due particelle secondo le espressioni (4.60) con A = 1 e  $\epsilon = 1/20$ . Il tempo è espresso in unità di  $\omega_0^{-1}$ . La curva di  $\varphi_a(t)$  è viola, mentre quella di  $\varphi_b(t)$  è verde.

La soluzione generale del problema è una combinazione lineare dei due modi normali:

$$\begin{pmatrix} \varphi_a(t)\\ \varphi_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) , \quad (4.54)$$

con  $\omega_1 = \omega_0$  e  $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\epsilon} \omega_0$ , e le solite quattro costanti d'integrazione da fissare con le condizioni iniziali.

Un caso particolare interessante è quello che si ottiene ponendo  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  e  $A_1 = A_2 = A$ . In tal caso la soluzione diventa

$$\varphi_a(t) = A[\cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{1 + 2\epsilon} \ \omega_0 t)] \tag{4.55}$$

$$\varphi_b(t) = A[\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{1 + 2\epsilon} \ \omega_0 t)] . \tag{4.56}$$

Ora supponiamo che la molla centrale sia molto meno rigida di quelle laterali, in modo che  $\epsilon = k'/k \ll 1$ . In tal caso l'accoppiamento tra le due particelle è debole. In tale situazione possiamo espandere la radice quadrata al primo ordine in  $\epsilon$ ,

$$\sqrt{1+2\epsilon} \simeq 1+\epsilon , \qquad (4.57)$$

e la soluzione di prima diventa

$$\varphi_a(t) = A\{\cos(\omega_0 t) + \cos[(1+\epsilon)\omega_0 t]\}$$
(4.58)

$$\varphi_b(t) = A\{\cos(\omega_0 t) - \cos[(1+\epsilon)\omega_0 t]\}$$
(4.59)

che, usando le formule di prostaferesi, fornisce il risultato finale

$$\varphi_a(t) = 2A\cos(\omega_0 t)\cos(\epsilon\omega_0 t/2)$$
  

$$\varphi_b(t) = -2A\sin(\omega_0 t)\sin(\epsilon\omega_0 t/2). \qquad (4.60)$$

Questa soluzione è interessante perché rappresenta il battimento tra due oscillatori debolmente accoppiati. Ciascuna delle due particelle compie oscillazioni con periodo  $2\pi/\omega_0$ , ma l'ampiezza delle oscillazioni è modulata da una funzione coseno per la prima particella e una funzione seno per la seconda, aventi periodo molto più lungo,  $4\pi/(\epsilon\omega_0)$ . Un esempio è mostrato nella figura precedente; con i parametri scelti, ciascuna particella compie 20 oscillazioni complete di pulsazione  $\omega_0$  nell'intervallo di tempo compreso tra due nodi della funzione modulante. Si vede chiaramente che le due particelle si scambiano periodicamente il moto oscillatorio e, quindi, anche l'energia meccanica.



Lo stesso tipo di soluzione si ottiene anche per due pendoli accoppiati da una molla, come nella figura qui sopra. Infatti, se prendiamo come coordinate gli spostamenti delle due masse, misurati a partire dalla posizione verticale dei due pendoli, e ci mettiamo nel limite di piccole oscillazioni, le equazioni del moto avranno la stessa forma delle equazioni (4.38)-(4.39), avendo definito  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  e  $\epsilon = kl/(mg)$ , dove l è la lunghezza del filo e g l'accelerazione di gravità. Fatte queste sostituzioni, tutti i passaggi rimangono uguali a prima e nulla cambia nei risultati.

Infine, un ultimo commento interessante riguarda il fatto che la matrice  $\mathcal{M}$  in tutti i casi precedenti è reale e simmetrica. Che sia reale è ovvio dal fatto che tutte le quantità che entrano nelle equazioni del moto sono grandezze fisiche e come tali sono numeri reali (almeno in fisica classica). Che sia anche simmetrica è una conseguenza del principio di azione e reazione. Infatti, gli elementi fuori diagonale della matrice sono quelli che accoppiano le oscillazioni delle due particelle, ma l'accoppiamento avviene tramite la stessa molla, che agisce a destra e a sinistra in egual modo. Se anche considerassimo il caso di tre molle diverse, è facile vedere che la matrice  $\mathcal{M}$  sarebbe ancora simmetrica, anche se i due elementi sulla diagonale sono diversi. Quindi anche quel sistema ammette due autovalori distinti e due modi normali di oscillazione, salvo che il calcolo sarebbe più complicato e, inoltre, non sarebbe facile intuire la forma dei modi normali a priori sulla base di semplici argomenti fisici, come invece si poteva fare nei casi precedenti.

### 4.3 Tre masse e quattro molle uguali



A questo punto siamo in grado di affrontare anche casi più complessi. Ad esempio prendiamo tre oscillatori accoppiati come in figura. Le molle siano tutte uguali e definiamo la pulsazione  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Ora è più difficile intuire quali siano i modi normali di oscillazione. Uno in realtà lo si trova subito: è quello in cui le due particelle laterali oscillano in anti-fase e quella centrale sta ferma. Infatti, è facile convincersi che tale oscillazione è equivalente a quella di due oscillatori disaccoppiati identici, uno a destra e uno a sinistra della massa centrale, che si comporta come un muro, e i due oscillatori laterali corrispondono ciascuno ad una singola particella soggetta ad una molla con costante elastica 2k. La pulsazione attesa per questo modo normale è  $\omega = \sqrt{2k/m}$ . Detto questo però, gli altri modi normali non sono così evidenti e bisogna per forza procedere con la soluzione formale del problema. Usiamo dunque l'algebra lineare come sappiamo fare.

Partiamo dalle equazioni del moto per i tre spostamenti delle masse

$$m\ddot{\varphi}_a = -k\varphi_a + k(\varphi_b - \varphi_a) \tag{4.61}$$

$$m\ddot{\varphi}_b = -k(\varphi_b - \varphi_a) + k(\varphi_c - \varphi_b) \tag{4.62}$$

$$m\ddot{\varphi}_c = -k(\varphi_c - \varphi_b) - k\varphi_c . \qquad (4.63)$$

dove gli indici a, b, c identificano le particelle da sinistra a destra. Le stesse equazioni possono essere scritte in questa forma

$$\ddot{\varphi}_a = -\omega_0^2 (2\varphi_a - \varphi_b) \tag{4.64}$$

$$\ddot{\varphi}_b = -\omega_0^2 (-\varphi_a + 2\varphi_b - \varphi_c) \tag{4.65}$$

$$\ddot{\varphi}_c = -\omega_0^2 (-\varphi_b + 2\varphi_c) . \tag{4.66}$$

Ora cerchiamo soluzioni della forma

$$\begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cos(\omega t + \theta) .$$
(4.67)

Inserendole nelle equazioni sopra, si trova

$$-\omega^{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\omega_{0}^{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
(4.68)

ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} , \qquad (4.69)$$

dove  $\lambda = \omega^2 / \omega_0^2$ . L'equazione ha la forma  $\mathcal{M} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$  e la matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
(4.70)

è simmetrica e reale e dunque ammette tre autovalori reali. I corrispondenti autovettori, che sono i modi normali del sistema, costituiranno la base dello spazio vettoriale, che stavolta è tridimensionale, dato che gli oscillatori sono tre.

L'equazione caratteristica  $\det(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{M}) = 0$  è

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = 0 , \qquad (4.71)$$

che risolta dà

$$(\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 1] - (\lambda - 2) = 0$$
(4.72)

ovvero

$$(\lambda - 2)[(\lambda - 2)^2 - 2] = 0 \tag{4.73}$$

e ancora

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2 - \sqrt{2})(\lambda - 2 + \sqrt{2}) = 0$$
(4.74)

ottenendo così i tre autovalori cercati:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2} , \qquad \lambda_2 = 2 , \qquad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$$
 (4.75)

che corrispondono alle pulsazioni

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \,\omega_0 \,, \qquad \omega_2 = \sqrt{2} \,\omega_0 \,, \qquad \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \,\omega_0 \,.$$
 (4.76)

Notiamo che  $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$  è proprio la pulsazione prevista in base alle nostre considerazioni iniziali sulle oscillazioni in anti-fase delle particelle laterali con quella centrale ferma. Verifichiamo che l'autovettore corrispondente sia proprio di questo tipo. Basta sostituire  $\lambda = 2$  nell'equazione agli autovalori  $(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{M})\mathbf{u} = 0$ . Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 , \qquad (4.77)$$

che implica b = 0 e c = -a, che è il risultato che ci aspettavamo. Sostituendo gli altri due autovalori si trova invece

$$\begin{pmatrix} \mp \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \mp \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 ,$$
 (4.78)

che implica  $b = \pm \sqrt{2}a$  e c = a. Si tratta quindi di una oscillazione in fase delle particelle laterali, accompagnata da un'oscillazione di ampiezza maggiore della particella centrale, in fase con le altre per l'autovalore  $\lambda_1$  e in anti-fase per l'autovalore  $\lambda_3$ . Usando vettori normalizzati a 1, possiamo scrivere gli autovettori in questo modo:

$$\mathbf{w}_{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\\0\\-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\\-\sqrt{2}\\1 \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

e si può verificare facilmente che si tratta di vettori ortogonali:  $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = 0$ . La matrice ortogonale e simmetrica di cambiamento di base è

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$
(4.80)

e la matrice  $\mathcal{M}'$  che rappresenta gli oscillatori nella base dei modi normali diventa

$$\mathcal{M}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$
(4.81)

Potremmo ragionare in termini fisici sul perché il modo normale di oscillazione con frequenza più bassa sia quello con tutte tre le particelle in fase, ma con ampiezza maggiore per la centrale. La ragione è abbastanza semplice: si tratta del modo che deforma meno le molle, nel complesso, a parità di ampiezza di oscillazione al centro. Ma su questo ci torneremo più avanti, dopo aver trattato il caso di una catena di N oscillatori.

Infine, suggerisco un esercizio: si tolgano di mezzo le pareti laterali e si riscrivano le equazioni del moto per le tre particelle. Dato che lo spostamento delle particelle laterali non sollecita più tali molle, ma solo quelle che le legano alla particella centrale, la nuova matrice  $\mathcal{M}$  sarà

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
(4.82)

ed è facile vedere che gli autovalori sono 0, 1, 3. Si ha quindi un autovalore nullo. Qual è il significato fisico di questo risultato?

### Capitolo 5

### Catene di oscillatori e limite del continuo

### 5.1 Catena di N oscillatori, con N grande



Prendiamo N particelle di massa m collegate da molle uguali, di costante elastica k. Le molle laterali siano vincolate a pareti. Già sappiamo che il sistema ammetterà N modi normali, che possono essere visti come una base ortonormale di uno spazio vettoriale N-dimensionale. Per trovarli possiamo procedere come prima. Come avevamo già fatto nella sezione 3.2, enumeriamo le particelle da sinistra a destra con un indice intero i = 1, 2, 3, ..., N e indichiamo con  $\varphi_i(t)$  lo spostamento della particella *i*-esima. Poi cerchiamo soluzioni del tipo  $\cos(\omega t)$ , e definiamo  $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$  con  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . In questo modo arriviamo ad un'equazione agli autovalori, con una matrice  $N \times N$  che rappresenta le equazioni del moto:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$
(5.1)

Il caso  $3 \times 3$  l'abbiamo appena visto. Il caso con N generico sarà ovviamente più difficile da risolvere analiticamente, data il grado crescente dei polinomi

da risolvere. Un'alternativa consiste nel dare la matrice in pasto ad un calcolatore, che sia dotato di algoritmi standard di diagonalizzazione, e aspettare che ne escano gli autovalori e gli autovettori in forma numerica. Qui però facciamo una cosa diversa: cerchiamo di capire come sono fatti gli autovettori con frequenza più bassa nel limite di N molto grande.

Se la distanza tra le pareti laterali è L, ed è fissata, il fatto di prendere un numero di oscillatori che tende a infinito equivale a trasformare la catena discreta in un continuo, ovvero passare da una configurazione molla-massamolla-ecc. ad una corda elastica. Chiamata x la coordinata spaziale nella direzione della catena, l'indice i di ciascuna particella identifica la coordinata  $x_i$  della particella *i*-esima e la grandezza  $\varphi_i(t)$  sarà il suo spostamento dall'equilibrio al tempo t. Possiamo identificare  $\varphi_i(t)$  come il valore di una funzione  $\varphi(x,t)$  calcolato nel punto  $x_i$  nell'istante t, ovvero  $\varphi(x_i,t)$ . Questa funzione di due variabili contiene tutte le deformazioni delle molle lungo la catena o, equivalentemente, la deformazioni locali della corda, inclusa la loro dipendenza dal tempo.

Concentriamoci sull'equazione del moto della particella *i*-esima, che è

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x_i,t) = -k(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + k(\varphi_{i+1} - \varphi_i)$$
(5.2)

ovvero

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x_i, t) = -(k/m) [\varphi(x_i, t) - \varphi(x_{i-1}, t)] + (k/m) [\varphi(x_{i+1}, t) - \varphi(x_i, t)] \\ = -\omega_0^2 [-\varphi(x_{i-1}, t) + 2\varphi(x_i, t) - \varphi(x_{i+1}, t)].$$
(5.3)

Dato che  $\varphi$  è una funzione di due variabili,  $x \in t$ , abbiamo espresso la derivata temporale nella forma di derivata parziale. A questo punto ragioniamo su come ci aspettiamo che sia la funzione  $\varphi$  per i modi normali di bassa frequenza. Nel caso N = 3 abbiamo già visto che la frequenza più bassa corrisponde al moto in fase delle tre particelle, dato che questo corrisponde alla minor deformazione complessiva delle molle. Analogamente nel caso di N grande ci aspettiamo che, per i modi di bassa frequenza, le particelle vicine tendano ad oscillare in fase o, in altri termini, che gli spostamenti  $\varphi$  differiscano di poco tra particelle vicine. Se la distanza tra due particelle all'equilibrio è h, ciò che stiamo assumendo è che la funzione  $\varphi(x, y)$  vari lentamente sulla scala di h. Dunque, dato il valore di  $\varphi(x, y)$  nel punto  $x_i$ , i valori nei punti  $x_{i-1} \in x_{i+1}$  possono essere ottenuti, in buona approssimazione, con una espansione in serie di potenze:

$$\varphi(x_{i-1},t) = \varphi(x_i,t) - h \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_i,t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x_i,t) + \dots$$
(5.4)

$$\varphi(x_{i+1},t) = \varphi(x_i,t) + h\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x_i,t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x_i,t) + \dots$$
(5.5)

Inserendo queste espressioni nell'equazione del moto precedente, all'ordine più basso in h si trova

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x_i,t) = \omega_0^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x_i,t)$$
(5.6)

e questa deve valere per ogni particella lungo la catena, ovvero per ogni x compreso tra x = 0 a x = L. Il prodotto  $\omega_0 h$  è una costante con le dimensioni di una velocità; lo chiamiamo v. Allora possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) = 0$$
(5.7)

che è l'equazione delle onde, o equazione d'onda classica, quella che avevano già derivato, in modo euristico, al capitolo 3.2.

Per una catena infinita e aperta, senza vincoli ai bordi, l'equazione delle onde ammette soluzioni della forma  $\varphi(x,t) = A\cos(qx-\omega t)$ , che corrispondono a onde progressive, periodiche nel tempo e nello spazio, dove il numero d'onda q e la pulsazione  $\omega$  sono legati dalla relazione  $v = \omega/q$ . La velocità v è detta velocità di fase. Invece, nel nostro caso della catena vincolata negli estremi, con condizioni al contorno  $\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0$ , la stessa equazione ha come soluzioni

$$\varphi_n(x,t) = A_n \sin(q_n x) \cos(\omega_n t + \vartheta_n) \tag{5.8}$$

con

$$q_n = n \frac{\pi}{L}$$
  $n = 1, 2, 3, \dots$  (5.9)

е

$$\omega_n = vq_n , \qquad (5.10)$$

mentre l'ampiezza  $A_n$  e la fase  $\vartheta_n$  sono costanti d'integrazione.



Queste oscillazioni, che non sono onde progressive ma bensì onde stazionarie, costituiscono l'insieme dei modi normali della corda. La funzione  $\varphi_n(x,t)$  ha nodi e ventri fissi nel tempo. In particolare, la soluzione con frequenza più bassa, corrispondente a n = 1, ha nodi solo negli estremi della corda e il ventre al centro, mentre le soluzioni con n > 1 hanno n - 1nodi all'interno dell'intervallo (0, L), equispaziati, come in figura [il disegno è basato su una bitmap image Image:Overtone.jpg di pubblico dominio in https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4344186].

Soluzioni della stessa forma le avremmo trovate se avessimo considerato spostamenti verticali delle particelle. In tal caso le onde stazionarie sarebbero state onde trasversali, come le vibrazioni di una coda di chitarra. La sequenza di soluzioni è anche nota come successione degli armonici naturali, dove n = 1è la prima armonica, o tono fondamentale, e le altre sono armoniche superiori. Il numero 1/n, come in figura, rappresenta la frazione di corda che separa due nodi. Nel linguaggio musicale, la differenza tra due armoniche successive è l'intervallo di ottava.

Torniamo alla definizione di velocità  $v = \omega_0 h$  e cerchiamo di capirne il significato fisico. Per come entra nell'equazione delle onde è chiaro che si tratta della velocità di propagazione delle deformazioni lungo la corda. D'altra parte, eravamo partiti da masse e molle. Nel prendere il limite  $N \to \infty$  con la distanza L fissata, dobbiamo tener conto che h tende a zero. Dunque, per capire come vanno le cose in questo limite, riscriviamo il quadrato della velocità in questo modo:

$$v^{2} = \omega_{0}^{2}h^{2} = \frac{k}{m}h^{2} = \frac{kh}{(m/h)}.$$
(5.11)

È facile convincersi che sia il numeratore che il denominatore di questa frazione tendono ad un valore finito nel passaggio da una catena discreta ad una corda continua. Tanto per cominciare, il denominatore  $\mu = m/h$  non è altro che la densità lineare di massa della catena, ovvero la massa per unità di lunghezza. Nel passaggio al continuo questa quantità rimane finita, perché è come prendere particelle di massa sempre più piccola a distanze sempre più piccole, ma facendo in modo di convergere alla densità lineare propria della corda. In modo analogo, nello stesso limite il prodotto kh, che ha le dimensioni di una forza, tende ad una costante fissata dalla natura della corda elastica. In particolare, un tratto di corda elastica di lunghezza l, quando viene allungato di una lunghezza  $\Delta l$ , produce una forza di richiamo ai suoi estremi pari in modulo a  $|F| = ES\Delta l/l$ , dove E è una caratteristica della corda detta modulo di Young e S è la sua sezione. Nel sistema fatto di molle e masse, la deformazione relativa è  $\varphi/h$  e la forza l'avevamo scritta come  $|F| = k\varphi$ . Se la forza deve essere la stessa, nel limite in cui la catena discreta diventa una corda continua, allora deve valere la relazione k = ES/h, e dunque il prodotto kh tende al valore ES, che ha un valore finito, determinato solo dalle proprietà della corda. Con questa definizione e tenendo conto che in una corda omogenea la massa per unità di volume,  $\rho$ , è legata alla densità lineare da  $\rho = \mu/S$ , otteniamo

$$v = \sqrt{E/\rho} \,, \tag{5.12}$$

che è l'espressione usuale per la velocità di propagazione delle onde in una corda elastica.

#### 5.2 Modi normali e serie di Fourier

Dal punto di vista del nostro approccio algebrico, i modi normali di oscillazione della corda nel limite continuo corrispondono agli autovettori di una matrice  $\infty \times \infty$ . Quindi lo spazio vettoriale è infinito-dimensionale e i modi normali sono in numero infinito, con pulsazione crescente. Ma dal punto di vista fisico dobbiamo tener conto del fatto che esiste un limite naturale all'applicazione di questo modello ai modi ad alta frequenza: il modello infatti perde di significato quando la lunghezza d'onda delle deformazioni diventa confrontabile con la scala microscopica, a livello molecolare, e dobbiamo limitarci a considerare buone solo le soluzioni con lunghezze d'onda sufficientemente lunghe e pulsazioni basse (quanto basse dipende dalla natura della corda). Il problema non si pone nel caso della catena discreta di N particelle, dove i modi normali sono N ed esiste un valore massimo ben definito della pulsazione. E facile convincersi che il modo con pulsazione massima è quello in cui particelle vicine sono sempre in anti-fase, dato che si tratta dell'oscillazione che produce la massima deformazione complessiva delle molle a parità di ampiezza. In termini delle funzioni  $\varphi_n(x,t)$  questo modo corrisponde a piazzare una particella per ogni ventre e, dato che il numero di ventri è uguale all'indice n dell'armonica, si avrà al massimo n = N, a cui corrisponde la massima pulsazione  $\omega_N$  dell'ordine di  $\pi\omega_0$ , da confrontare con la pulsazione minima  $\omega_1$  che è dell'ordine di  $\pi\omega_0/N$ ed è molto più piccola.

Per una catena di N oscillatori, con N grande, il generico autovettore che rappresenta uno dei modi normali della catena può essere scritto così:

$$\mathbf{w}_{n} = C_{n} \begin{pmatrix} \sin(n\pi x_{1}/L) \\ \sin(n\pi x_{2}/L) \\ \sin(n\pi x_{3}/L) \\ \vdots \\ \sin(n\pi x_{N}/L) \end{pmatrix} , \qquad (5.13)$$

dove n = 1, 2, ..., N indica il modo normale mentre  $x_1, x_2, ..., x_N$  sono le posizioni delle masse lungo la catena all'equilibrio. La costante  $C_n$  è arbitraria e potrebbe essere fissata per normalizzare il vettore. Ricordiamo che il modulo quadro del vettore è la somma dei quadrati delle componenti. Nel nostro caso questa somma sarà dell'ordine di N/2, dato che i termini in sin<sup>2</sup> hanno in media un valore 1/2 e ne sommiamo N. Conviene quindi scrivere  $C_n = \sqrt{2/N}C'_n$ , dove  $C'_n$  è indipendente da N e, senza perdere di generalità, possiamo sceglierlo uguale a 1. Ora, se prendiamo  $N \to \infty$  la variabile discreta  $x_i$  diventa una variabile continua x e le componenti del vettore, che diventano infinite, si trasformano nei valori della funzione continua  $\sin(n\pi x/L)$ . Invece di autovettori abbiamo autofunzioni. Il prodotto scalare tra due autovettori, che è la somma dei prodotti delle componenti

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n'} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sin(n\pi x_i/L) \sin(n'\pi x_i/L)$$
(5.14)

diventa un integrale del prodotto di autofunzioni

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n'} = \frac{2}{L} \int_0^L dx \, \sin(n\pi x/L) \sin(n'\pi x/L) \tag{5.15}$$

dove l'intervallo infinitesimo dx non è altro che la distanza tra gli oscillatori  $\Delta x = h = L/N$  nel limite di N infinito. L'intervallo (0, L) contiene un numero intero di semi-lunghezze d'onda di entrambe le funzioni nell'integrando. È facile convincersi che se moltiplichiamo due funzioni a caso di quelle tracciate a pagina 15 e integriamo il loro prodotto tra 0 e L il risultato sarà sempre nullo a meno che non si abbia n = n', nel qual caso si ottiene l'integrale della funzione  $\sin^2(n\pi x/L)$  che dà L/2. Dunque

$$\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_{n'} = \delta_{nn'} \tag{5.16}$$

dove  $\delta_{nn'}$  vale 1 se n = n' e vale 0 se  $n \neq n'$ . Questo simbolo è chiamato delta di Kronecker. Abbiamo così trovato che le autofunzioni sono ortonormali e costituiscono una base completa per lo spazio infinito-dimensionale degli oscillatori.

La conseguenza principale è che ogni deformazione  $\varphi(x,t)$  assegnata in un istante t generico può essere decomposta nella base delle autofunzioni che rappresentano i modi normali,  $\{\mathbf{w}_n\}$ , o in altri termini, può essere scritta come somma delle funzioni  $\sin(n\pi x/L)$ , con  $n = 1, 2, \ldots, \infty$ . Ad esempio, supponiamo che al tempo t = 0 la deformazione sia una funzione assegnata  $\varphi_0(x) = \varphi(x, 0)$  e che ogni parte della corda sia ferma in quell'istante, ovvero sia  $\dot{\varphi}(x, 0) = 0$ . Vogliamo calcolare le componenti della  $\varphi_0(x)$  nella base delle autofunzioni. Questo equivale a trovare i coefficienti  $A_n$  nella somma

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) .$$
 (5.17)

Il trucco sta nel moltiplicare entrambi i membri per una funzione  $\sin(n'\pi x/L)$ e integrare in x:

$$\int_0^L dx \ \varphi_0(x) \sin(n'\pi x/L) = \sum_{n=1}^\infty A_n \int_0^L dx \ \sin(n\pi x/L) \sin(n'\pi x/L) \ . \tag{5.18}$$

Ma sappiamo che l'integrale a destra dà L/2 se n' = n ed è nullo per tutti gli altri valori di n. Dunque la somma si riduce ad un singolo termine e il coefficiente  $A_n$  diventa

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \,\,\varphi_0(x) \sin(n\pi x/L)$$
(5.19)

e se questi integrali esistono vuol dire che possiamo calcolare tutti i coefficienti, ottenendo il vettore  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots)$  che rappresenta lo stato iniziale della corda nella base dei suoi modi normali.

Questa decomposizione di una funzione generica nella base dei modi normali passa sotto il nome di analisi di Fourier e, dal punto di vista matematico, fa parte della teoria più generale delle trasformate di Fourier, che si applica ad ampie classi di funzioni, sia reali che complesse. In tale contesto, la somma (5.17) è detta serie di Fourier della funzione  $\varphi_0(x)$ , oppure sviluppo di Fourier. Il termine trasformata viene dal fatto che, tramite le due relazioni (5.17) e (5.19), abbiamo stabilito una relazione biunivoca tra una funzione  $\varphi_0(x)$ , elemento dello spazio vettoriale infinito-dimensionale che rappresenta le deformazioni locali della corda, e un vettore **A** in un altro spazio infinitodimensionale che rappresenta le ampiezze dei modi normali. Nel nostro caso, nella serie di Fourier entrano solo funzioni seno per via delle condizioni al contorno per la corda, che è fissata agli estremi, e dunque  $\varphi_0(0) = \varphi_0(L) = 0$ . Per funzioni periodiche f(x) di periodo  $\lambda$  e prive di questo vincolo, la serie di Fourier conterrebbe anche un termine costante e termini con funzioni coseno, nella forma generale

$$f(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n2\pi x/\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n2\pi x/\lambda) , \qquad (5.20)$$

e si vede che la serie (5.17) è il caso particolare per  $\lambda = 2L$  e f(0) = f(L) = 0.

Un risultato veramente interessante, a questo punto, si trova considerando anche la dipendenza temporale. Ogni modo normale, infatti, evolve nel tempo secondo la relazione (5.8), indipendentemente dagli altri. Notiamo anche che, se la corda è inizialmente ferma allora la derivata temporale di ogni modo normale

$$\dot{\varphi}_n(x,t) = -A_n \omega_n \sin(q_n x) \sin(\omega_n t + \vartheta_n) \tag{5.21}$$

dev'essere nulla per t = 0 per ogni x. Questo implica  $\vartheta_n = 0$  per tutti i modi normali. Dunque, per ottenere la deformazione in qualsiasi istante t, basta prendere la serie di Fourier calcolata al tempo zero (5.17) e moltiplicare ogni modo normale per  $\cos(\omega_n t)$ . Si ottiene

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/L) \cos(\omega_n t) , \qquad (5.22)$$

e l'intero problema del moto è risolto!

Per capire meglio il risultato, facciamo qualche esempio. Cominciamo con il caso in cui la corda viene inizialmente preparata, a t = 0, in modo che la deformazione  $\varphi(x, 0)$  è identica alla forma del tono fondamentale della corda, ovvero la funzione seno con zero nodi nell'intervallo (0, L) nella figura di pagina 15. In questo caso, il calcolo dei coefficienti  $A_n$  della serie di Fourier è banale. L'unico integrale (5.19) non nullo è quello per n = 1 e l'intera serie di Fourier si riduce ad un unico termine. In qualsiasi istante rimane eccitato solo un modo normale, che oscilla con pulsazione  $\omega_1$  e corrisponde al vettore  $\mathbf{A} =$  $(1,0,0,\ldots)$ . Analogo risultato avremmo trovato preparando la corda in modo da eccitare inizialmente un altro modo normale generico n.

Come secondo esempio consideriamo una corda inizialmente deformata in questa forma

$$\varphi(x,0) = C[1 - |1 - (2x/L)|], \qquad (5.23)$$

che corrisponde ad una deformazione triangolare con massimo in x = L/2, dove vale C. Per trovare i coefficienti della serie di Fourier dobbiamo calcolare gli integrali

$$A_n = \frac{2C}{L} \int_0^L dx \, \left[1 - \left|1 - (2x/L)\right|\right] \sin(n\pi x/L) \,, \tag{5.24}$$

da cui

$$A_{n} = \frac{2C}{L} \int_{0}^{L/2} dx \, \frac{2x}{L} \sin(n\pi x/L) + \frac{4C}{L} \int_{L/2}^{L} dx \, \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin(n\pi x/L) = \frac{8C}{\pi^{2}n^{2}} \sin(n\pi/2) , \qquad (5.25)$$

che dà  $A_n = 0$  per tutti gli n pari e

$$A_n = \frac{8C}{\pi^2 n^2} (-1)^{(n-1)/2} , \qquad (5.26)$$

per gli n dispari. La serie di Fourier è quindi

$$\varphi(x,0) = \frac{8C}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin(n\pi x/L) .$$
 (5.27)

Il risultato appare complicato e gli integrali pure (non pretendo che chi legge li sappia calcolare), ma la fisica è abbastanza semplice da capire. Una deformazione triangolare è facile da realizzare. Nel caso di una corda elastica fissata agli estremi, basta afferrarla con le dita nel punto di mezzo e spostare questo punto lateralmente di un po', tenendolo poi fermo. In questo modo la deformazione è in buona approssimazione quella scritta in (5.23). Poi si lascia andare la corda e quello che succede è che i modi normali presenti nella serie (5.27)iniziano ad oscillare ciascuno con la propria frequenza. Lo stesso accade se si considera la deformazione trasversa di una corda di chitarra, dove le equazioni sono le stesse a meno di una diversa definizione della velocità di propagazione delle onde. Deformare la corda di chitarra come nella (5.23) è banale: basta prendere il punto di mezzo della corda e tenerlo sollevato. Quando la corda viene lasciata andare produce un suono che contiene il tono fondamentale, n = 1, la terza armonica, n = 3, e tutte le altre armoniche dispari, con ampiezze fissate dai coefficienti  $A_n$  trovati sopra e con diverse frequenze, a due ottave di distanza l'una dall'altra, nel gergo musicale. Il nostro orecchio misura l'intensità del suono che è proporzionale al quadrato delle ampiezze e dunque scala come  $1/n^4$ . Il tono fondamentale sarà quindi molto intenso rispetto alle armoniche superiori, come ci si aspetta, ma la serie di Fourier (5.27) vi dice anche di quanto.

Un ultimo esempio è quello di una deformazione inizialmente localizzata nello spazio, come ad esempio quella rappresentata da questa funzione gaussiana:

$$\varphi(x,0) = C \exp\left[-\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma^2}\right] .$$
(5.28)

Si tratta di una deformazione a campana, con il massimo a metà corda, in x = L/2, e con una larghezza dell'ordine di  $\sigma$ , che possiamo prendere molto minore di L se vogliamo rappresentare una deformazione localizzata. I coefficienti della serie di Fourier si trovano, al solito, integrando la gaussiana moltiplicata per ciascun modo normale, come in (5.19). Qui tralascio i calcoli; lo studente curioso e che sappia come integrare funzioni gaussiane, può svolgerli come esercizio. Mi limito a commentare il risultato principale: i coefficienti di Fourier di una gaussiana seguono anch'essi una distribuzione gaussiana: la deformazione della corda si comporta come un *pacchetto d'onde* composto dal tono fondamentale e le sue armoniche dispari con coefficienti distribuiti secondo una gaussiana del tipo

$$A_n \propto \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 \sigma^2}{2L^2}\right]$$
, (5.29)

che ha una larghezza proporzionale a  $1/\sigma$ . Dunque, più la deformazione è localizzata in una regione stretta dello spazio delle coordinate, più è delocalizzata nello spazio di modi normali, cioè coinvolge modi normali con n grande. In altri termini, se chiamiamo  $\Delta x$  l'ampiezza spaziale della zona interessata dalla deformazione e  $\Delta n$  l'ampiezza dell'intervallo dei valori di n dei modi normali coinvolti nella deformazione, allora vale  $\Delta x \Delta n = \text{costante.}$  Si tratta di una relazione interessante che lo studente avrà modo di apprezzare particolarmente quando, in un contesto diverso dagli oscillatori classici ma formalmente simile, si troverà ad affrontare il principio di indeterminazione di Heisenberg.

L'evoluzione temporale della deformazione gaussiana (5.28) è molto istruttiva. Se si prendono in coefficienti (5.29) e li si mette nell'espressione (5.22), si trova che, al passare del tempo, la gaussiana iniziale si separa in due gaussiane identiche di ampiezza C/2 che si muovono in direzioni opposte a velocità  $v \in -v$ senza modificare la loro forma. Raggiunto il bordo tornano indietro con segno opposto, raggiungono il bordo dall'altra parte, ricambiano il segno, e così via. Dopo un intervallo di tempo pari a 2L/v le due gaussiane si ritrovano nella stessa configurazione che avevano all'inizio per formare la gaussiana (5.28), e il tutto si ripete periodicamente. Il risultato non ci dovrebbe stupire. L'equazione delle onde, per costruzione, ammette soluzioni della forma f(x - vt) che traslano con velocità  $v_{i}$  e le oscillazioni stazionarie della corda possono essere viste come l'effetto dell'interferenza di due onde, con la stessa  $\omega$  e lo stesso q, che traslano in verso opposto. Vale la pena tuttavia sottolineare quali sono le assunzioni cruciali per ottenere la traslazione rigida delle gaussiana (5.28): in primo luogo il sistema di oscillatori è lineare (l'equazione delle onde è lineare), così che ogni deformazione  $\varphi(x,t)$  può essere scritta come combinazione lineare dei modi normali (autofunzioni dell'equazione); in secondo luogo, la velocità di fase  $v = \omega/q$  è la stessa per tutti i modi normali, ovvero  $\omega(q) = vq$ . Un sistema di oscillatori lineari di questo tipo è anche detto non-dispersivo, proprio perché un pacchetto d'onde mantiene la sua forma nel tempo. Se la pulsazione  $\omega$  dipendesse da q in modo diverso, i modi normali che compongono un pacchetto, come quello gaussiano in (5.28), viaggerebbero con velocità diverse e il pacchetto, inizialmente localizzato, darebbe luogo, dopo un certo tempo, a oscillazioni estese su tutta la corda, disperdendosi. In tal caso, il sistema di oscillatori si direbbe *dispersivo*. Analogamente, ci si aspetta dispersione del pacchetto anche quando la dinamica è non-lineare, dato che non si potrà più rappresentare il sistema in termini di modi normali di oscillazione.

### Capitolo 6

### Dinamica non-lineare, solitoni e caos

### 6.1 Oscillatori non-lineari e modello di Fermi-Pasta-Ulam

È importante sottolineare che in tutti i casi trattati fin qui la linearità delle equazioni differenziali che descrivono il moto degli oscillatori è essenziale per poter utilizzare l'apparato formale dell'algebra lineare in spazi finitodimensionali (catene discrete) o infinito-dimensionali (corde continue). Se le particelle fossero soggette a forze di tipo diverso da quelle elastiche, ad esempio proporzionali a  $\varphi^2$  o altre potenze, non avremmo potuto usare gli spazi vettoriali come abbiamo fatto fin qui. Sembrerebbe quindi che ci sia un limite forte alla applicabilità di questo approccio matematico ai casi di interesse fisico. Ma non è così. In realtà gli oscillatori armonici sono onnipresenti in fisica, dato che ogni sistema tende a manifestare moti armonici in risposta a piccole perturbazioni attorno a stati di equilibrio. Ma il linguaggio dell'algebra lineare e il concetto di modi normali trovano applicazioni in un contesto ancora più ampio al di fuori della fisica classica, nell'ambito della meccanica quantistica che, ai suoi albori, si chiamava meccanica matriciale, non certo a caso; ma questa è un'altra storia.

Possiamo chiederci però cosa succede se, invece, la dinamica è non-lineare. Per farlo, torniamo alla catena con N masse collegate da molle uguali come al capitolo 5.1. Supponiamo che le molle agiscano fuori dalle condizioni di applicabilità della legge di Hooke, in particolare, detta  $\Delta l$  la variazione di lunghezza della molla, la forza esercitata da questa sia per ipotesi  $-k\Delta l(1 + \alpha\Delta l)$ . In questo modo la risposta è armonica solo per piccolissime deformazioni, fintanto che  $\alpha\Delta l \ll 1$ , mentre per deformazioni finite la forza contiene un termine quadratico aggiuntivo. Possiamo ora studiare cosa succede alla catena con queste molle anarmoniche. Il punto di partenza sono le equazioni del moto delle particelle. Se prendiamo la particella i-esima lungo la catena, questa interagisce solo con quelle accanto. La sua equazione del moto è

$$m\ddot{\varphi}_{i} = -k[1 + \alpha(\varphi_{i} - \varphi_{i-1})](\varphi_{i} - \varphi_{i-1}) + k[1 + \alpha(\varphi_{i+1} - \varphi_{i})](\varphi_{i+1} - \varphi_{i}) \quad (6.1)$$

che, con un semplice riarrangiamento dei termini e definendo al solito  $\omega_0^2 = k/m$ , può essere scritta nella forma

$$\ddot{\varphi}_i = -\omega_0^2 (-\varphi_{i-1} + 2\varphi_i - \varphi_{i+1}) [1 + \alpha (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})] .$$
(6.2)

Questa equazione è molto simile alla (5.3), ma la fisica che ne risulta è assai diversa. In effetti, questa equazione corrisponde ad un modello ben noto e, potremmo dire, storico: è il modello di Fermi-Pasta-Ulam (FPU), sviluppato da Enrico Fermi, John Pasta, e Stanislaw Ulam tra il 1953 e il 1954 (anno della morte di Fermi, tra l'altro). Si trattò in pratica della prima simulazione numerica nella storia della fisica, e il computer utilizzato era il pionieristico MANIAC I, un calcolatore elettronico a disposizione dei laboratori nazionali di Los Alamos. Fu Fermi ad avere l'idea di testare un modello fisico facendo eseguire i calcoli ad un computer, inventando così il concetto di esperimento numerico, e l'equazione qui sopra fu la prima ad essere usata in questo modo. Lo scopo era quello di verificare come l'energia associata ad una eccitazione, inizialmente prodotta in una certa regione limitata della catena, si disperdesse poi in tutta la catena negli istanti successivi, e in quanto tempo ciò avvenisse. Il risultato però fu diverso e inatteso: esistevano forme particolari dell'eccitazione iniziale che rimanevano localizzate anche a tempi lunghi, oppure si disperdevano nella catena per poi tornare a localizzarsi. Il modello quindi, non permetteva di "termalizzare" l'energia inizialmente impressa, come invece Fermi si sarebbe aspettato.

Si può capire meglio perché il modello FPU ammette soluzioni localizzate che non si disperdono se si guarda al limite del continuo dell'equazione (6.2). Come avevamo fatto per l'equazione (5.3), dobbiamo assumere che la funzione  $\varphi(x,t)$  vari lentamente sulla scala della distanza h tra le masse, in modo da scrivere le  $\varphi_{i-1}$  e la  $\varphi_{i+1}$  tramite uno sviluppo in serie di potenze, ma stavolta dobbiamo andare ad ordini superiori:

$$\varphi_{i\pm 1} = \varphi_i \pm h \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4} .$$
(6.3)

Inserendo queste espressioni nella (6.2) si ottiene

$$\ddot{\varphi}_i = \omega_0^2 \left( h^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4} \right) \left[ 1 + \alpha \left( 2h \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3} \right) \right] . \tag{6.4}$$

Nel limite della corda continua, la lunghezza delle molle h tende a zero. Come abbiamo fatto nel capitolo 4, possiamo definire  $v^2 = \omega_0^2 h^2 = kh^2/m$  che tende

a una costante; assumiamo invece che  $\alpha$  tenda a zero, in modo che  $h/\alpha$  tenda ad una costante. L'indice discreto *i* si trasforma nella variabile continua *x* e la deformazione locale della corda diventa la funzione  $\varphi(x,t)$ . Prendiamo l'espressione precedente, svolgiamo i prodotti ed eliminiamo tutti i termini in  $h^3$  o in  $\alpha h^2$  e ordini superiori. Il risultato è

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -2h\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \,. \tag{6.5}$$

Se  $\alpha$  fosse zero, il primo termine a destra sarebbe nullo, ma potremmo trascurare anche il secondo nel limite del continuo,  $h \to 0$ . In questo modo otterremmo l'usuale equazione delle onde (5.7) per la catena infinita di oscillatori lineari. I due termini al secondo membro dell'equazione precedente rappresentano la correzione all'equazione delle onde nel caso anarmonico del modello FPU. Dobbiamo tenerli entrambi, anche se il secondo non contiene  $\alpha$ , perché sono dello stesso ordine, entrambi quadratici, nei due parametri piccoli  $\alpha e h$ . Se introduciamo le nuove variabili  $\xi = x - vt e \tau = \alpha hvt$ , e definiamo  $\delta = \sqrt{h/(24\alpha)}$ , possiamo riscrivere l'equazione precedente in termini di una nuova funzione  $f(\xi, \tau) = \partial \varphi(\xi, \tau)/\partial \xi$  in questo modo:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \delta^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + f \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0 , \qquad (6.6)$$

che è nota come equazione di Korteweg - de Vries (KdV). Qui ho omesso i passaggi per non appesantire la trattazione, e non ritengo nemmeno necessario che lo studente li sappia svolgere. È sufficiente cogliere l'idea di fondo, cioè il fatto che un modello di oscillatori non-lineari, come il modello FPU, porta in modo diretto ad equazioni del moto, come l'equazione KdV, che ammettono soluzioni localizzate nello spazio e che non si disperdono durante la successiva evoluzione temporale. La forma di queste soluzioni non è rappresentabile come combinazione di oscillazioni stazionarie e la velocità con cui la deformazione si muove lungo la corda non è la velocità di fase v che entra nel membro di sinistra della (6.5). Inoltre, possiamo anche produrre due deformazioni locali di questo tipo che si propagano in direzioni opposte: si incontreranno e si separeranno mantenendo ciascuna la propria forma. Soluzioni di questo tipo si chiamano solitoni e l'equazione KdV è una delle equazioni fondamentali della fisica dei solitoni, con applicazioni in diversi campi della fisica. Tra questi vale la pena citare la propagazione delle onde di superficie in acque poco profonde; la prima osservazione di onde solitarie di questo tipo, infatti, fu quella effettuata da John Scott Russell nell'agosto del 1834 nello Union Canal in Scozia. Ciò che lega le onde solitarie viste da Russell sull'acqua del canale, dietro una barca trainata da cavalli, e la catena di oscillatori anarmonici delle simulazioni numeriche di Fermi, Pasta e Ulam, è il ruolo dei termini non-lineari nelle equazioni del moto.

#### 6.2 Sistemi non-lineari e caos

Il fatto di ammettere soluzioni solitoniche non è l'unica caratteristica interessante della catena anarmonica del modello FPU descritto nel capitolo precedente. Accanto a tali soluzioni, infatti, il modello ammette anche soluzioni caotiche. Per capire il senso di questa affermazione, cercheremo ora di caratterizzate il comportamento caotico di un sistema fisico.

Per iniziare ricordiamo che la fisica classica newtoniana è deterministica per costruzione. Con questo intendiamo che, se un sistema è descrivibile tramite N grandezze che variano nel tempo, come le coordinate di un sistema di particelle ad esempio, ci basta conoscere il valore di 2N grandezze in un dato istante, ad esempio le coordinate e le rispettive componenti delle velocità delle particelle, per conoscere tutta l'evoluzione futura del sistema. Un'esposizione elegante di questo determinismo delle leggi classiche è quella data sinteticamente in un celebre passaggio dell'*Essai philosophique sur les probabilités* di Pierre-Simon Laplace (1749-1827):

Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro, proprio come il passato, sarebbe evidente davanti ai suoi occhi.

Ciò in effetti è meraviglioso, ma non funziona. Il punto debole sta nelle premesse: per realizzare il sogno di Laplace bisogna conoscere le condizioni iniziali, ma con quale precisione? In linea di principio con infinita precisione, ma questo non è realizzabile, perchè la conoscenza delle coordinate e le velocità delle particelle richiede misure, e gli strumenti di misura non hanno precisione infinita. Il determinismo della teoria è innegabile, ma l'uso della teoria per fare previsioni sul futuro, date le condizioni iniziali, è soggetto inevitabilmente a incertezze legate ai limiti nella conoscenza delle condizioni iniziali stesse. Lo stesso Laplace ne era consapevole e, infatti, nella stessa opera scriveva:

ma l'ignoranza delle diverse cause che concorrono alla formazione degli eventi come pure la loro complessità, insieme con l'imperfezione dell'analisi, ci impediscono di conseguire la stessa certezza rispetto alla grande maggioranza dei fenomeni. Vi sono quindi cose che per noi sono incerte, cose più o meno probabili, e noi cerchiamo di rimediare all'impossibilità di conoscerle determinando i loro diversi gradi di verosimiglianza.

Il problema è aggirabile se si dimostra che, migliorando la precisione degli strumenti di misura, l'incertezza sulle condizioni iniziali è sufficientemente piccola da dare effetti piccoli nelle predizioni sul comportamento futuro del sistema; è come prendere la bella affermazione di Laplace e tradurla nell'affermazione, più prosaica, "se il presente è all'incirca questo, allora il futuro sarà all'incirca questo", avendo la possibilità di migliorare a piacere i margini di impredicibilità. È meno elegante, ma può essere molto efficace nella pratica. Peccato che anche questo non funziona, o almeno non funziona sempre. Ci sono sistemi che si ostinano a darci risultati molto incerti nel futuro anche quando riduciamo al massimo l'incertezza sul presente. Di questo ci si è resi conto già alla fine dell'ottocento. In *Scienza e metodo*, Henri Poincaré (1854-1912) diceva:

Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non è così, può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un enorme errore nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

Ecco dunque ciò che definiamo come sistema caotico: un sistema che manifesta forte dipendenza dalle condizioni iniziali, talmente forte da rendere praticamente impredicibile l'evoluzione futura del sistema a partire da condizioni iniziali note con precisione a piacere. Questa in realtà è una delle varie definizioni adottate dalla comunità dei fisici. Ve ne sono altre analoghe, ma questa per il momento ci basta.

Per ritornare al nostro punto di partenza, è chiaro a questo punto cosa significa che il modello FPU, descritto dall'equazione (6.2), è caotico. Tramite simulazioni numeriche si dimostra facilmente che, se la condizione di partenza non è una di quelle che hanno natura solitonica, la soluzione evolve in modo da essere estremamente sensibile alle condizioni iniziali: due simulazioni che partano da valori iniziali che differiscono di poco, anche di molto poco, dopo un certo tempo danno luogo a soluzioni completamente diverse: si tratta di traiettorie non periodiche e molto complicate nello spazio delle configurazioni di un sistema deterministico classico. Visto ad un tempo t generico, il comportamento del sistema appare completamente casuale, anche se le condizioni iniziali erano apparentemente sotto controllo e malgrado le leggi deterministiche che lo governano. Questo, in fisica, è il caos.

Invece di analizzare la caoticità del modello FPU, preferisco illustrare un altro esempio che, pur non avendo attinenza diretta con la fisica degli oscillatori meccanici, ha però il vantaggio di far apprezzare la generalità del problema e, inoltre, permette di cogliere la fisica del caos nel momento della sua nascita: il modello di Lorenz.

Edward N. Lorenz era un giovane meteorologo del Massachusetts Institute of Technology, che nel 1961 stava lavorando ad alcune equazioni che erano intese a descrivere, entro opportuni modelli, la circolazione convettiva delle masse d'aria in un'atmosfera soggetta a gradienti di temperatura. Il suo primo passo fu quello di sfrondare i modelli esistenti da tutti i dettagli che, a suo modo di vedere, potevano essere superflui, mantenendo però intatte le caratteristiche essenziali del sistema da descrivere. Il suo modello semplificato descriveva il moto di un fluido quando la circolazione avveniva in celle convettive contenute tra due termostati planari, uno sotto e uno sopra, a temperature diverse, in un campo di gravità. Il tutto si riduceva a tre equazioni differenziali accoppiate di questo tipo:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{6.7}$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y \tag{6.8}$$

$$\dot{z} = -bz + xy , \qquad (6.9)$$

dove  $x, y \in z$  sono funzioni del tempo incognite, mentre  $\sigma, r \in b$  sono costanti. Qui non importa sapere quale sia il significato delle funzioni incognite, che sono legate al campo di velocità dell'aria e alla temperatura, nè quello delle costanti. Ci basta sapere qual è la struttura delle equazioni, in particolare che si tratta di equazioni differenziali del primo ordine accoppiate e non-lineari, dove la non-linearità appare nei termini  $xz \in xy$ .

Il secondo passo fu quello di dare in pasto queste equazioni ad un calcolatore. Nel 1963 l'idea di usare i calcolatori elettronici per effettuare simulazioni numeriche non era nuova. Il calcolatore a valvole e circuiti elettrici a disposizione di Lorenz faceva ben sessanta (!) operazioni al secondo: bastava inserire le condizioni iniziali e lasciare che risolvesse le equazioni con una sequenza di passi temporali, registrando ad ogni passo i valori ottenuti per le funzioni incognite. La novità fu la scoperta, peraltro del tutto accidentale, della estrema sensibilità alle condizioni iniziali. In breve, un giorno, vedendo che una simulazione, appena conclusa, mostrava un comportamento non-periodico diverso da quello che si aspettava, Lorenz decise di rifare la stessa simulazione per verificare cosa succedeva a tempi più lunghi. Invece di rimettere i dati iniziali e ripetere la simulazione da capo, ma per un durata maggiore, decise di farla partire ad un tempo intermedio t tra quello iniziale t = 0 e quello finale  $t_f$  della simulazione precedente, inserendo a mano, come nuovi valori iniziali, i valori di x(t),  $y(t) \in z(t)$  che stavano nel tabulato, stampato su carta, già fornito dal calcolatore. Poi fece partire la simulazione da t e uscì per una pausa. Al ritorno rimase colpito dal fatto che la soluzione, anche nella parte tra  $t e t_f$ era completamente diversa dalla precedente, come nella figura. Dato che si trattava pur sempre di un modello perfettamente deterministico, l'unica differenza ammissibile tra i due casi stava in un possibile errore nell'immissione dei valori iniziali, ma non c'era alcun errore apparente. L'inghippo era ben più subdolo: il calcolatore lavorava con numeri a sei cifre significative, in tutte le operazioni, ma i valori venivano stampati su carta solo a tre cifre, per comodità. Dunque Lorenz, invece di inserire il valore esatto calcolato nella prima simulazione al tempo  $\tilde{t}$ , ad esempio 0.506127, aveva inserito il valore troncato 0.506, modificando di meno di un millesimo il valore delle variabili tra le due simulazioni nello stesso istante. Questa piccola variazione aveva indotto traiettorie totalmente diverse.



La figura è interessante, ma dà un'informazione solo qualitativa e non dice molto più di quanto abbiamo appena affermato: il modello fornisce risultati estremamente sensibili alle condizioni iniziali. Possiamo essere più quantitativi? Un metodo efficace consiste nel definire la distanza tra le soluzioni ottenute a partire da diversi valori delle variabili a t = 0. Dato che le variabili sono solo tre,  $x, y \in z$ , e sono funzioni del tempo, possiamo considerare la terna (x(t), y(t), z(t)) come un vettore che rappresenta lo stato del sistema governato dalle equazioni (6.9) istante per istante. Se i vettori  $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e  $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$  sono le soluzioni delle equazioni (6.9) ottenute a partire da due diverse terne di valori iniziali, possiamo definire la distanza tra le due traiettorie come  $\delta(t) = |(x_2(t) - x_1(t), y_2(t) - y_1(t), z_2(t) - z_1(t))|$ . Se tracciamo la funzione  $\delta(t)$  per soluzioni sensibili alle condizioni iniziali, troveremo che questa diverge, ma sapremo anche in quale modo. Un esempio è mostrato qui sotto, nel caso  $\sigma = 10$ , r = 28 e b = 8/3, che sono gli stessi valori usati da Lorenz nella simulazione citata in precedenza (il grafico è tratto da University of Oxford and the Chebfun Developers, http://www.chebfun.org/examples/odenonlin/LyapunovExponents.html). La distanza tra le condizioni iniziali è  $10^{-9}$ . La scala verticale è logaritmica. La curva continua che rappresenta la distanza  $\delta(t)$  mostra delle piccole oscillazioni quasi periodiche sovrapposte ad una crescita esponenziale. La crescita si ferma a tempi lunghi ad un valore finito compreso tra 1 e 10. Questo valore massimo si comprende dal fatto che le funzioni x(t),  $y(t) \in z(t)$  del modello non assumono valori illimitati, a per tempi lunghi oscillano tra valori dell'ordine di 1. La distanza tra le traiettorie non può quindi crescere all'infinito. L'informazione più significativa che viene dal grafico è l'andamento esponenziale

$$\delta(t) \simeq \delta(0) e^{\lambda t} \tag{6.10}$$

che è una delle caratteristiche fondamentali dei sistemi dinamici caotici. L'esponente  $\lambda$  è detto esponente di Lyapunov e, nel caso del modello di Lorenz vale circa 0.9 (curva tratteggiata in figura).



Il fatto che traiettorie inizialmente vicine si allontanino esponenzialmente è uno dei modi per dire che un sistema dinamico è caotico. Ogni sistema caotico avrà equazioni diverse per variabili diverse e sarà caratterizzato da propri esponenti di Lyapunov. Ciò che li accomuna è l'impossibilità di fare predizioni affidabili sul valore futuro delle incognite a partire dai valori iniziali. Infatti, per quanto sia accurata la misura delle condizioni a t = 0, anche la minima incertezza iniziale crescerà in modo da rendere l'incertezza sui valori finali tanto grande da far sembrare la dinamica del tutto casuale, pur essendo il sistema deterministico. Lo sforzo per migliorare ulteriormente la precisione delle condizioni iniziali non paga, perché il tempo tipico entro il quale la dinamica diventa imprevedibile è comunque fissato dall'inverso dell'esponente di Lyapunov. Infatti, supponiamo che l'incertezza iniziale sia  $\delta(0) = \epsilon$  e che per rendere utile la predizione al tempo t non si possa tollerare un'incertezza sul valore finale superiore ad un certo valore  $\Delta$ ; usando la (6.10), la condizione  $\delta(t) \leq \Delta$  diventa  $\epsilon \exp(\lambda t) \leq \Delta$ , ovvero

$$t \le t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\Delta}{\epsilon} . \tag{6.11}$$

Il tempo  $t^*$  è il tempo oltre al quale qualsiasi previsione è inaffidabile. Ora, dato che  $\lambda$  è fissato dalla natura del sistema, l'unica quantità che possiamo variare

al fine di aumentare  $t^*$  è  $\epsilon$ , che va preso il più piccolo possibile. Tuttavia la dipendenza da  $\epsilon$  è logaritmica e questo significa che anche grandi variazioni di  $\epsilon$  danno piccole variazioni di  $t^*$ . Ad esempio, se volessimo aumentare  $t^*$  di un fattore 20 dovremmo diminuire  $\epsilon$  di una fattore  $e^{20} \sim 10^9$ . Sarebbe uno sforzo enorme per un risultato ben magro. Di fatto, il tempo utile per le previsioni, come si diceva, è fissato da  $1/\lambda$ , ovvero dalla natura stessa del sistema.

Quello di Lorenz è un modello meteorologico e il fatto di aver scoperto che si tratta di un modello caotico forse non ci sorprende. Siamo pronti a accettare che la dinamica dell'atmosfera sia complicata perché coinvolge un sacco di variabili e fattori incontrollabili. Ma questo ragionamento ci porta fuori strada per almeno due motivi. Il primo è che il modello di Lorenz ha soltanto tre gradi di libertà e, in questo senso, è un modello molto semplice, le variabili sono tre e non c'è nulla di incontrollabile. Il fatto che sia caotico non è quindi legato alla complessità dell'atmosfera che descrive, ma alla struttura delle equazioni differenziali su cui si basa; ad esempio al fatto che le equazioni contengono due termini non-lineari, quadratici nelle funzioni incognite. Il secondo è che esistono sistemi ancora più semplici che sono anch'essi caotici.

Per fare un esempio, torniamo agli oscillatori, e prendiamo un pendolo doppio con due masse uguali m e due aste sottili di lunghezza uguale l, come quello in figura. Si tratta di un sistema effettivamente semplice, con due soli



gradi di libertà. Mostra un comportamento dinamico semplice? No, è un sistema caotico. Le equazioni che lo descrivono non le ricaviamo qui, perché la derivazione non è immediata, ma sono queste:

$$2\ddot{\theta}_{1} + \ddot{\theta}_{2}\cos(\theta_{1} - \theta_{2}) + \dot{\theta}_{2}^{2}\sin(\theta_{1} - \theta_{2}) + \frac{2g}{l}\sin\theta_{1} = 0$$
  
$$\ddot{\theta}_{2} + \ddot{\theta}_{1}\cos(\theta_{1} - \theta_{2}) - \dot{\theta}_{1}^{2}\sin(\theta_{1} - \theta_{2}) + \frac{g}{l}\sin\theta_{2} = 0.$$
(6.12)

Sono equazioni differenziali del secondo ordine e accoppiate. Sono non-lineari perché contengono termini con funzioni seno e coseno degli angoli  $\theta_1(t) \in \theta_2(t)$ 

e termini quadratici nelle rispettive velocità angolari. Anche in questo caso la dinamica è estremamente sensibile alle condizioni iniziali. Facendo una ricerca in rete con le parole "double pendulum" si trovano facilmente simulazioni di traiettorie e anche dimostrazioni sperimentali, che mostrano l'estrema sensibilità alle condizioni iniziali (chi vuole divertirsi provi ad esempio le simulazioni nel sito http://complexity.stanford.edu/blog/double-pendulum-simulation).

#### 6.3 Bacini di attrazione e frattali

La non-linearità delle equazioni del moto non è sufficiente a garantire il comportamento caotico. Nel caso precedente, se togliamo il secondo pendolo e ci limitiamo al pendolo semplice con una sola massa appesa al soffitto, sappiamo che l'equazione del moto è

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\sin\theta_1 \tag{6.13}$$

che è un'equazione non-lineare, dato che la funzione incognita  $\theta_1(t)$  entra come argomento della funzione seno. Tuttavia il sistema non è caotico. Le soluzioni infatti possono essere ricavate in modo analitico (si veda ad esempio il testo *Elements of Newtonian Mechanics* di Knudsen e Hjorth) e sono tali da garantire incertezze piccole nelle predizioni future per piccole incertezze nelle condizioni iniziali.

Supponiamo ora di aggiungere ai pendoli anche un termine di attrito, che prima avevamo ignorato, ad esempio proporzionale alla velocità come l'attrito tra la particella appesa e l'aria circostante. Nel caso del pendolo singolo sappiamo che, qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione per tempi lunghi è banale: la particella alla fine si troverà in quiete nel punto più basso. La stessa cosa accade per il doppio pendolo. La posizione verticale è dunque la condizione asintotica per pendoli con attrito. Possiamo chiamare questa posizione *punto fisso stabile* del sistema.

L'esistenza di un punto fisso stabile non ci dice nulla sulla caoticità del sistema, ma è interessante esplorare cosa succede se un sistema ammette più di un punto fisso stabile. Come esempio prendiamo un "pendolo magnetico" così fatto: si prende un pendolo semplice composto da un'asta rigida sottile e da una sferetta di un materiale sensibile a campi magnetici. Sul piano orizzontale sottostante sono fissate tre piccole calamite identiche disposte ai vertici di un triangolo equilatero in modo che la verticale del pendolo cada al centro del triangolo. Ogni calamita ha la polarità orientata in modo da attrarre la sferetta. Se il lato del triangolo è grande, la forza di gravità domina, il punto di minima energia potenziale resta quello sulla verticale, mentre le calamite producono un effetto anarmonico e anisotropo per grandi oscillazioni. Se invece il triangolo è relativamente piccolo e la forza magnetica sufficientemente intensa, i minimi dell'energia potenziale diventano tre e si trovano in corrispondenza dei punti alla minima distanza da ciascuna calamita, mentre sulla verticale l'energia potenziale avrà un massimo locale. Nel primo caso il sistema ha un unico punto fisso stabile, nel secondo ne ha tre.



Consideriamo la situazione in cui i punti fissi sono tre e facciamo oscillare la sferetta a partire da un punto generico, da ferma. A seconda del punto di partenza la traiettoria può essere più o meno complicata. Il caso più ovvio è quando il punto di rilascio è vicino al punto di minima distanza da una delle calamite. In tal caso, ci aspettiamo piccole oscillazioni armoniche smorzate, con pulsazione fissata dalla curvatura locale dell'energia potenziale attorno al punto fisso. Meno ovvio invece è quanto succede se il punto di rilascio è lontano dai punti fissi, o si trova in una zona intermedia tra essi. Un esperimento che possiamo immaginare di fare, oppure possiamo simulare al calcolatore, consiste nel ripetere l'operazione di rilascio della sferetta per ogni punto nello spazio delle coordinate. Tale spazio è bidimensionale e può essere rappresentato dalla coppia di angoli  $(\phi, \theta)$ , dove  $\theta$  è la deviazione dalla verticale e  $\phi$  è l'angolo associato alla rotazione della sferetta in un piano orizzontale. In alternativa si possono prendere le coordinate del punto (x, y) corrispondente alla proiezione della posizione della sferetta sul piano delle calamite. Essendo il sistema deterministico, data una coppia (x, y) la traiettoria sarà una e una sola e terminerà in uno solo dei punti fissi dopo aver effettuato una serie più o meno complicata di oscillazioni. Dunque, ad ogni punto di partenza possiamo associare una calamita di arrivo. Possiamo identificare ciascuna calamita con un colore, verde, rosso, o blu, e possiamo disegnare una figura in cui il pixel nella posizione (x, y) viene colorato con il colore della calamita su cui termina la traiettoria a partire da (x, y). La dimensione del pixel può rappresentare l'incertezza sulla posizione iniziale nell'esperimento, oppure il passo di griglia tra i punti nella simulazione numerica. Il risultato di questa sequenza sarà una mappa colorata come quella in figura (l'immagine è tratta da Harvey Mudd College, https://www.math.hmc.edu/~jacobsen/demolab/magneticpendulum.html).

La figura corrisponde ad una scelta particolare dei parametri che fissano l'intensità relativa del campo magnetico e della gravità e il valore del coeffi-



ciente di attrito, ma scelte diverse non cambiano gli elementi essenziali dell'immagine. Chiamiamo bacino di attrazione le zone di un colore assegnato. In questa immagine ci sono tre bacini di attrazione perché le calamite sono tre. Possiamo figurarci i bacini come i bacini idrografici in una geografia complicata: data una conformazione di creste e valli, un corso d'acqua segue una traiettoria unica che identifica il bacino. Se la cresta montuosa è tortuosa, il bordo tra i bacini è anch'esso tortuoso. In modo simile, i bacini del pendolo magnetico sono molto evidenti nelle regioni prossime ai punti fissi stabili, ma diventano tortuosi nelle zone di bordo e nelle zone lontane. Una proprietà peculiare e importante di questi bacini è che, se facciamo uno zoom in una delle zone di bordo, la distribuzione dei colori non si semplifica ma, al contrario, mantiene la stessa frammentazione e complessità ad ogni scala: colori diversi si alternano tra pixel vicini anche se facciamo tendere la dimensione dei pixel a zero, mantenendo traccia di strutture regolari a tutti i livelli di zoom, ma impedendo di identificare in modo univoco il bordo tra i bacini. Una struttura complessa di questo tipo, con caratteristiche di self-similarità a tutte le scale, si chiama struttura *frattale*, e nel caso del pendolo magnetico si dirà che il sistema ammette bacini con bordi frattali (fractal basin boundaries). L'esistenza di bacini con bordo frattale è un'altra delle caratteristiche peculiari dei sistemi caotici.

La conseguenza diretta della struttura frattale dei bacini di attrazione del pendolo magnetico è che, una volta scelto il punto (x, y) di partenza del moto, che non sia vicino a una delle calamite, la predizione su quale sarà la calamita di arrivo della traiettoria non può essere affidabile, e rimane inaffidabile anche quando l'incertezza su x e y viene ridotta a piacere. Se poi aggiungiamo anche l'incertezza sulla velocità iniziale della sferetta, allora l'esito del lancio, ovvero su quale calamita la sferetta si arresta, diventa ancor meno predicibile e, anzi, apparirà del tutto casuale.

A questo punto, lo studente attento si sarà chiesto quali siano le equazioni del moto del pendolo e da quale caratteristica di queste equazioni derivi il comportamento caotico. Per scrivere le equazioni basta sapere che l'attrazione tra una sferetta di metallo e una calamita è rappresentabile tramite una forza  $F_{\text{mag}} \propto \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ , dove  $\mathbf{r}$  è la posizione relativa. Se la lunghezza dell'asta è molto maggiore della distanza tra la sferetta e il piano delle calamite, possiamo anche applicare l'approssimazione di piccoli angoli e il moto della sferetta è approssimabile con un moto su un piano orizzontale a distanza fissa d dal piano delle calamite. Questo ci permette di usare il teorema di Pitagora nell'espressione della distanza dalle calamite. Se il punto (0,0) è il centro del triangolo, sulla verticale del pendolo, e le calamite si trovano in  $(x_i, y_i)$  con i = 1, 2, 3, allora l'equazione del moto per  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  diventa

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \beta \sum_{i=1}^{3} \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{g}{l} x = 0$$
  
$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + \beta \sum_{i=1}^{3} \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d^2]^{3/2}} + \frac{g}{l} y = 0, \quad (6.14)$$

con  $\beta$  e  $\gamma$  sono costanti. Si vede così che le equazioni sono accoppiate e non-lineari, la non-linearità essendo dovuta alla forza magnetica. Senza le calamite il moto sarebbe la combinazione lineare di due oscillatori smorzati indipendenti, uno lungo x l'altro lungo y.

Strutture frattali si trovano un po' ovunque nei sistemi caotici, e non necessariamente ai bordi di bacini di attrazione. Ad esempio, possiamo tornare al doppio pendolo descritto dalle equazioni (6.12) e immaginare di compiere un esperimento ideale come quello descritto precedentemente: lasciamo andare il pendolo da fermo a partire da una posizione iniziale individuata da due angoli  $(\theta_1, \theta_2)$  assegnati, e vediamo cosa succede. Le equazioni però non contengono termini dissipativi e, quindi, l'energia meccanica si conserva e il pendolo non si ferma mai. Ciò significa che non possiamo usare i punti fissi per caratterizzare le diverse traiettorie; dobbiamo trovare qualche alternativa. Ad esempio, notiamo che la massa 2 ogni tanto compie un giro completo. Contare i giri completi non aiuta, dato che il moto prosegue all'infinito. Possiamo invece misurare il tempo che passa dall'inizio del moto fino all'istante  $t^*$  al quale l'angolo  $\theta_2$  assume il valore  $\pm \pi$  per la prima volta. Facciamo la stessa cosa per ogni coppia di angoli  $(\theta_1, \theta_2)$  iniziali e poi disegniamo la funzione  $t^*(\theta_1, \theta_2)$  così ottenuta. Il risultato è mostrato nella figura seguente (la figura è tratta da un testo disponibile in rete di Alex Small, Sample Final Project: One Signature of Chaos in the Double Pendulum, 2013). L'angolo  $\theta_1$  va da 0 a  $\pi - 0.01$ , mentre  $\theta_2$  va da  $-\pi + 0.01$  a  $\pi - 0.01$ . Il tempo di attesa  $t^*$  è rappresentato dalla

scala di grigi, in modo che il bianco indica un tempo  $t^*$  superiore al tempo di simulazione (nessun giro completo osservato), mentre il nero rappresenta un tempo  $t^*$  molto breve. Nella figura la scala del tempo è logaritmica, in base 10, e va da  $t^*$  dell'ordine di 0.02T a circa 500T, dove  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  è il tempo caratteristico di un singolo pendolo.



La zona uniformemente bianca corrisponde ad angoli iniziali per i quali il pendolo non compie mai giri completi. Questa zona, ovviamente, è più ampia attorno alla configurazione verticale  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ; la sua forma è determinata dalla conservazione dell'energia meccanica e può essere ricavata in modo analitico. Anche le due zone nere in alto e in basso sono facili da capire: la massa 2 si trova fin dall'inizio molto vicina all'angolo  $\theta_2 = \pm \pi$  e può oltrepassarlo rapidamente, senza compiere un giro completo. Ma la caratteristica principale della figura è piuttosto la parte esterna alle regioni bianche e nere, che ha una struttura frattale. Partendo da un punto ( $\theta_1, \theta_2$ ) appartenente a questa regione non è praticamente possibile predire quando avverrà il primo giro completo, perché anche una variazione infinitesima della posizione iniziale può portare ad una grande variazione del tempo di attesa.

Una struttura frattale può emergere dall'osservazione diretta delle orbite seguite da un sistema a tempi lunghi. Questo è il caso, ad esempio, del modello di Lorenz descritto all'inizio di questo capitolo. Infatti, indipendentemente dai valori iniziali delle variabili (x, y, z), le traiettorie dopo un transiente relativamente breve finiscono per concentrarsi in due strutture vagamente circolari, collegate tra loro e disposte ad un angolo particolare nello spazio tridimensionale, come in figura. Questa zona dove le traiettorie si concentrano è detta *attrattore* e, se l'attrattore ha una struttura frattale, come nel modello di Lorenz, allora viene detto *attrattore strano*. Individuare gli attrattori strani è un altro modo per caratterizzare i sistemi dinamici caotici.



Qui ci fermiamo, perché l'approfondimento della teoria del caos va oltre lo scopo di queste lezioni. Quanto fatto dovrebbe però essere sufficiente per capire che sistemi apparentemente semplici e con pochi gradi di libertà possono esibire un comportamento anche molto complicato. Una conseguenza è che l'osservazione empirica dei fenomeni, per quanto accurata, spesso non basta a comprendere le cause di ciò che vediamo, dato che manca una connessione semplice tra l'evoluzione osservata e le cause iniziali che l'hanno prodotta. Un'altra conseguenza, complementare alla prima, è che non basta avere a disposizione le equazioni classiche e deterministiche che descrivono un sistema per essere certi di poter fare predizioni efficaci e utili riguardo alla sua evoluzione futura. Questo vale per meteorologo che, malgrado gli sforzi e i modelli raffinati, non può fornire predizioni accurate oltre pochi giorni da oggi, perché la natura stessa glielo impedisce, ma vale anche per chi vuole semplicemente predire le oscillazioni di pendoli o le deformazioni di catene di oscillatori non-lineari come quelle che abbiamo discusso in queste pagine.

Scopo di queste lezioni era quello di mettere in connessione la meccanica newtoniana appresa al primo anno di università con alcune nozioni matematiche apprese nei corsi di analisi e geometria svolti in parallelo. In particolare, ho usato gli oscillatori lineari e non-lineari come filo conduttore di un discorso in cui intervengono, di volta in volta, l'algebra dei vettori e delle matrici in spazi *N*-dimensionali, le serie di Fourier e le equazioni differenziali alle derivate parziali. Nei corsi degli anni successivi, gli studenti avranno modo di ritrovare lo stesso formalismo in altri contesti, ma penso sia utile cogliere fin dall'inizio l'importanza di mettere in relazione le nozioni acquisite in matematica e in fisica, non solo perché questo semplifica la soluzione dei problemi fisici una volta trovato un modello che descrive la natura, ma anche perché la scelta stessa dello strumento matematico da utilizzare nell'affrontare i problemi può migliorare notevolmente la nostra capacità di intuire nuove soluzioni, mettendo la natura stessa sotto una nuova luce.

[Le due immagini di copertina sono tratte dalla relazione *Sistemi caotici*, di Riccardo Franchi (esame PAF, Trento 2014), e dalla relazione *Kicked rotor and standard map*, di Mauro Rigo (esame PAF, Trento 2018)]