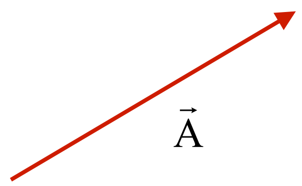
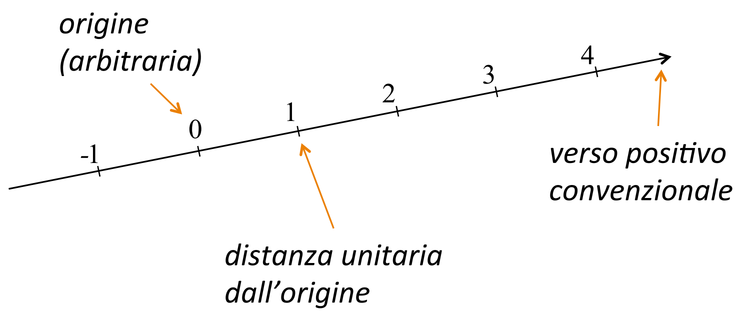
Parentesi matematica: vettori



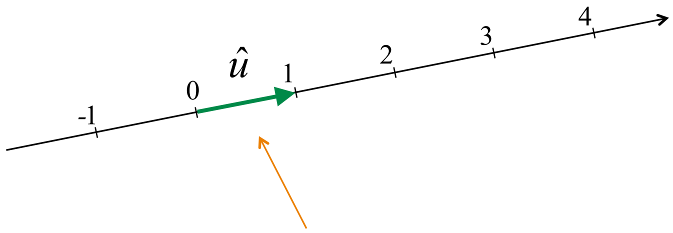
Un'introduzione elementare del formalismo dei vettori ad uso dei fisici

[*per una trattazione più rigorosa si veda il corso di Geometria*]

Retta orientata



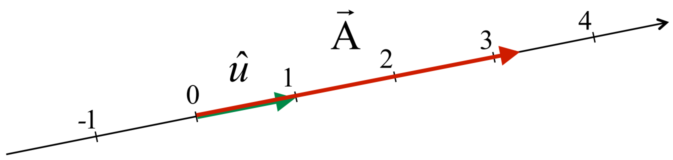
Versore



versore: segmento orientato di lunghezza unitaria, nella stessa direzione della retta e con verso concorde.

Vettore

$$\boxed{\vec{A} = \hat{u}\, A}$$

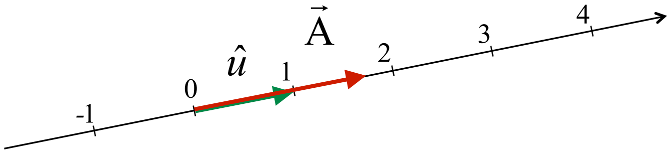


A = *lunghezza con segno*

$|\vec{A}| \equiv |A|$ = *modulo (lunghezza, presa positiva)*

Vettore

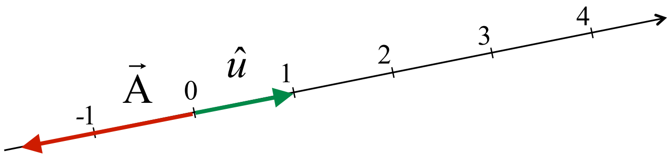
$$\boxed{\vec{A} = \hat{u}\,A}$$



$A > 0$

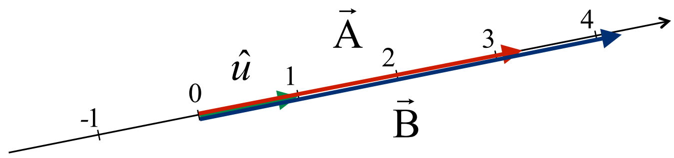
Vettore

$$\boxed{\vec{A} = \hat{u}\,A}$$



$A < 0$

Prodotto di un numero (scalare) per un vettore



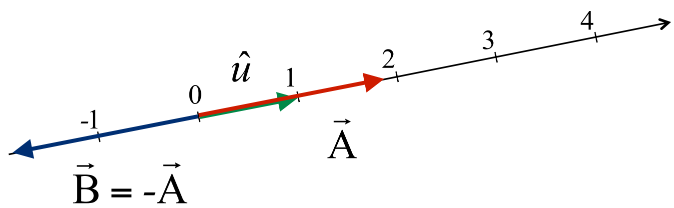
Se k è un numero e $\vec{A}$ è un vettore, il loro prodotto è definito come

$$\boxed{\vec{B} = k\vec{A} \equiv \hat{u}\,(kA)}$$

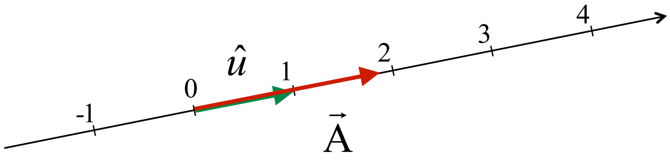
nota: vettori concordi se $k > 0$, discordi se $k < 0$

Opposto di un vettore

$$\boxed{\vec{B} = -\vec{A} \equiv (-1)\vec{A} = \hat{u}\,(-A)}$$



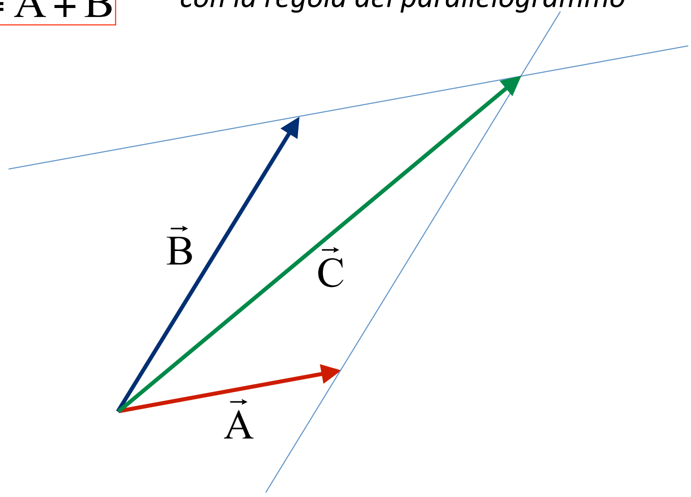
Vettore nullo



$\vec{B} = k\vec{A}$ è un vettore nullo se *k=0*

Somma di vettori

$\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}}$ *con la regola del parallelogrammo*

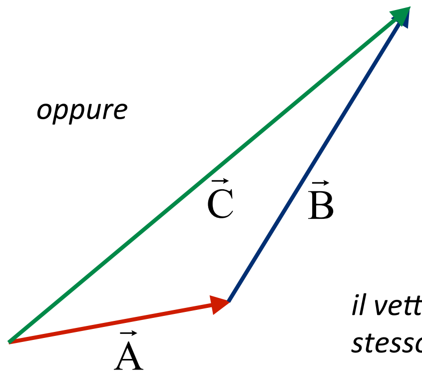


Somma di vettori

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}}$$

con la regola del parallelogramma

oppure

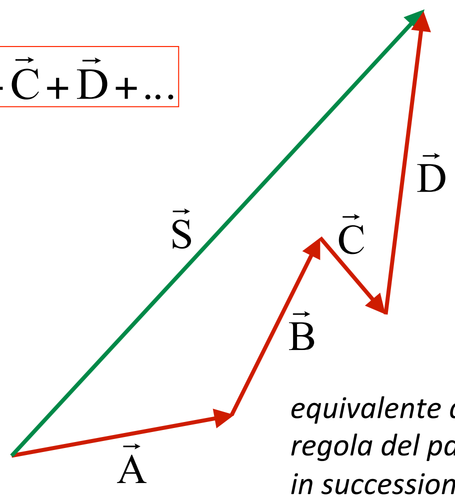


il vettore somma è lo stesso nei due casi

Somma di vettori

In generale

$$\boxed{\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \ldots}$$



equivalente ad applicare la regola del parallelogrammo in successione

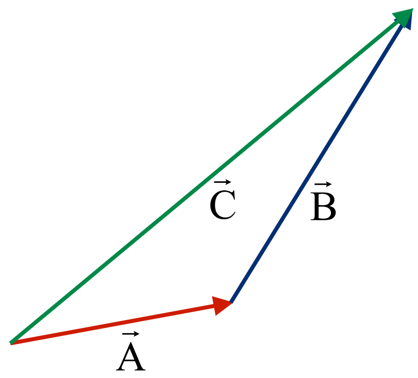
Somma di vettori

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}}$$

attenzione a non confondere la somma dei vettori con la somma dei moduli (lunghezze dei vettori) ***!!***

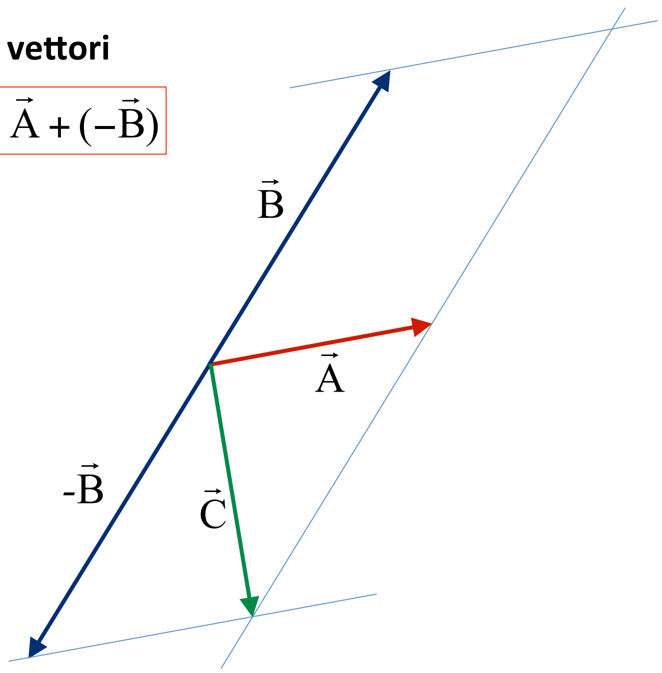
$$\boxed{\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| \neq \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|}$$

vale l'eguaglianza solo se i due addendi sono vettori con uguale direzione e verso.



Differenza di vettori

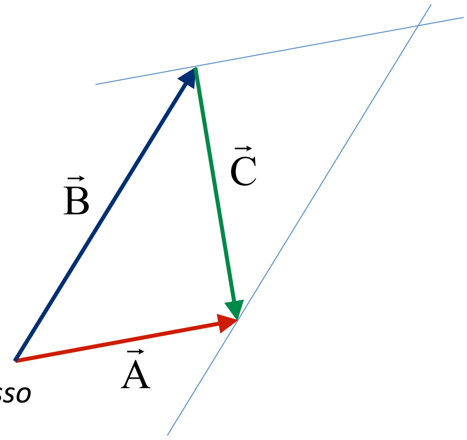
$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} \equiv \vec{A} + (-\vec{B})}$$



Differenza di vettori

$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} \equiv \vec{A} + (-\vec{B})}$$

oppure

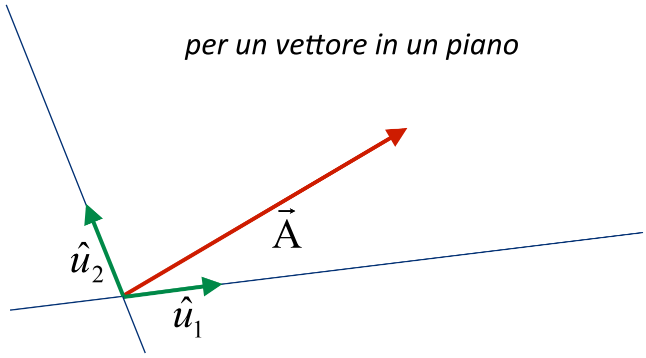


il vettore differenza è lo stesso nei due casi (stesso modulo, direzione, verso)

Nota: stiamo assumendo che vettori che differiscono per una semplice traslazione, sono lo ***stesso vettore !!***

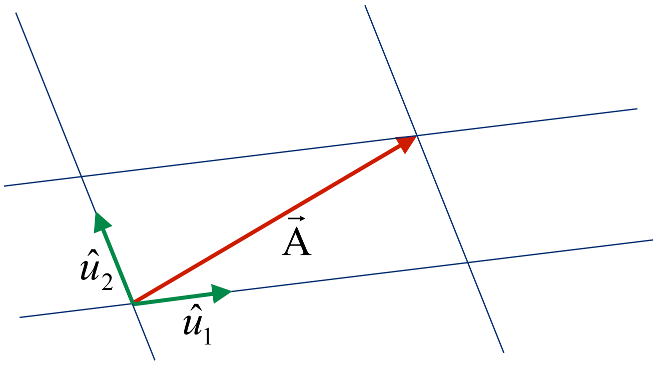
Componenti di un vettore in direzioni assegnate

per un vettore in un piano



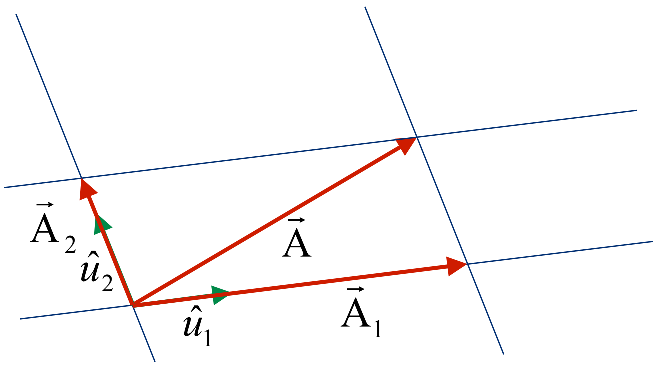
i versori stabiliscono le direzioni in cui si vuole scomporre il vettore

Componenti di un vettore in direzioni assegnate



Si costruisce il parallelogrammo a partire dalle direzioni assegnate

Componenti di un vettore in direzioni assegnate



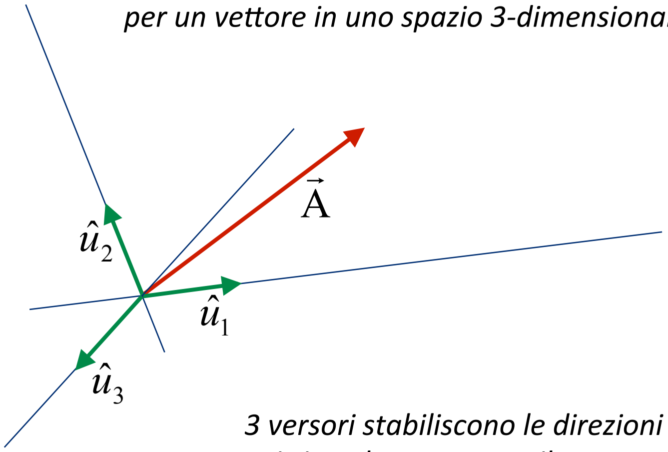
Si scrive il vettore iniziale come somma di due vettori nelle direzioni assegnate

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \hat{u}_1 A_1 + \hat{u}_2 A_2$$

Il vettore è univocamente determinato da questi due numeri

Componenti di un vettore in direzioni assegnate

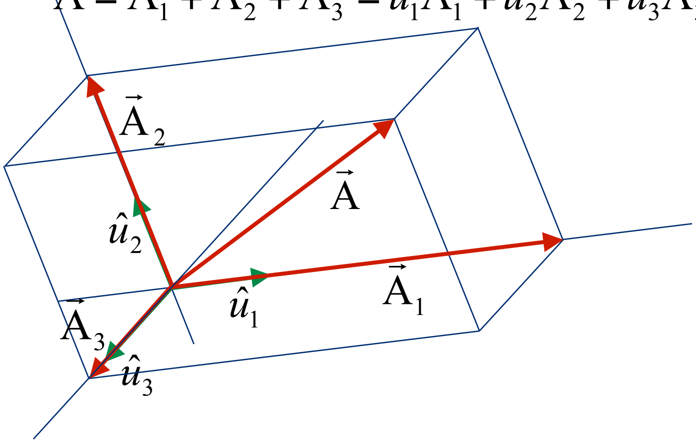
per un vettore in uno spazio 3-dimensionale



3 versori stabiliscono le direzioni in cui si vuole scomporre il vettore

Componenti di un vettore in direzioni assegnate

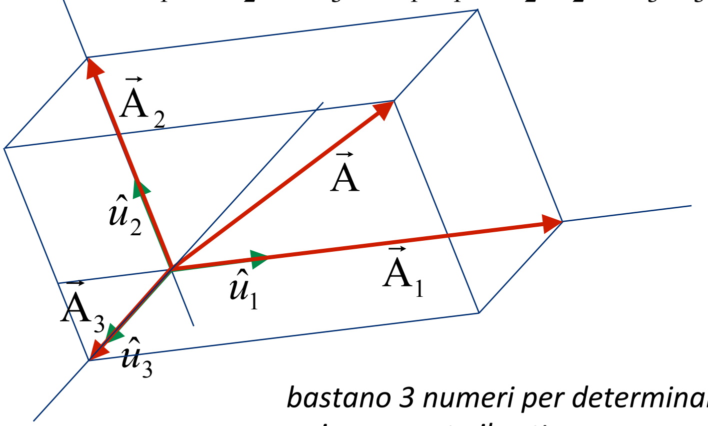
$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \hat{u}_1 A_1 + \hat{u}_2 A_2 + \hat{u}_3 A_3$$



si disegnano le parallele alle direzioni assegnate e si tracciano le componenti del vettore

Componenti di un vettore in direzioni assegnate

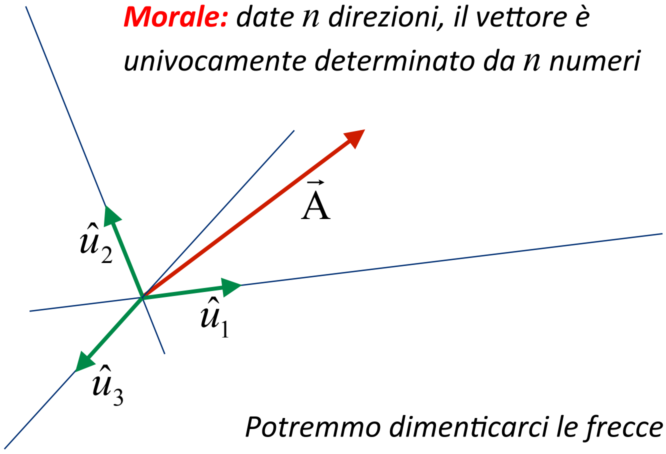
$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \hat{u}_1 A_1 + \hat{u}_2 A_2 + \hat{u}_3 A_3$$



bastano 3 numeri per determinare univocamente il vettore

$$(A_1, A_2, A_3)$$

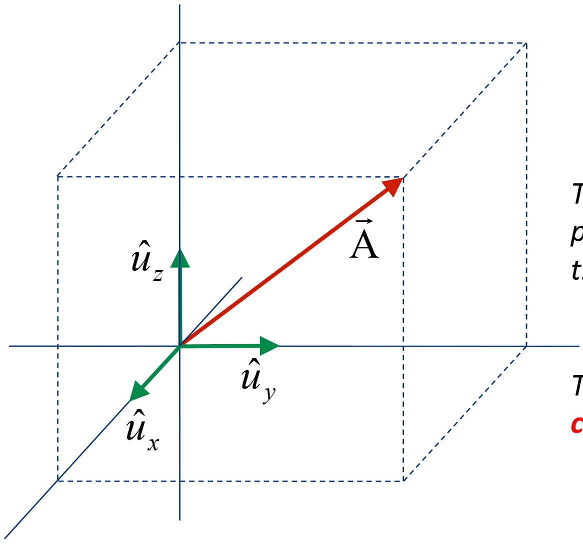
Componenti di un vettore in direzioni assegnate



Morale: *date n direzioni, il vettore è univocamente determinato da n numeri*

Potremmo dimenticarci le frecce e lavorare solo con le n-ple di numeri ***!!***

Componenti cartesiane ortogonali

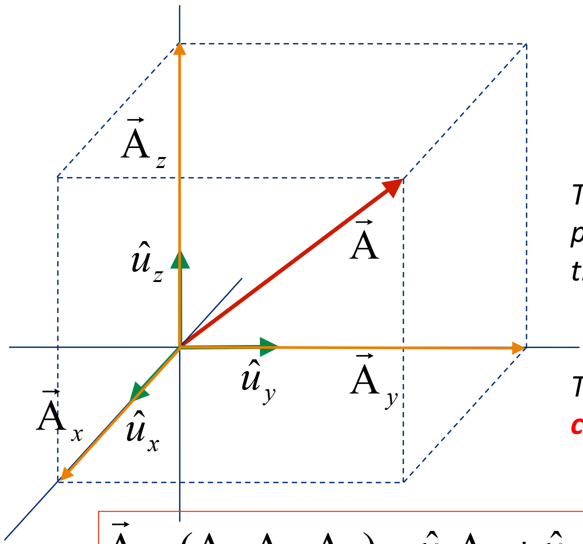


Tre assi perpendicolari tra loro

⇩

Tre ***coordinate cartesiane !!***

Componenti cartesiane ortogonali



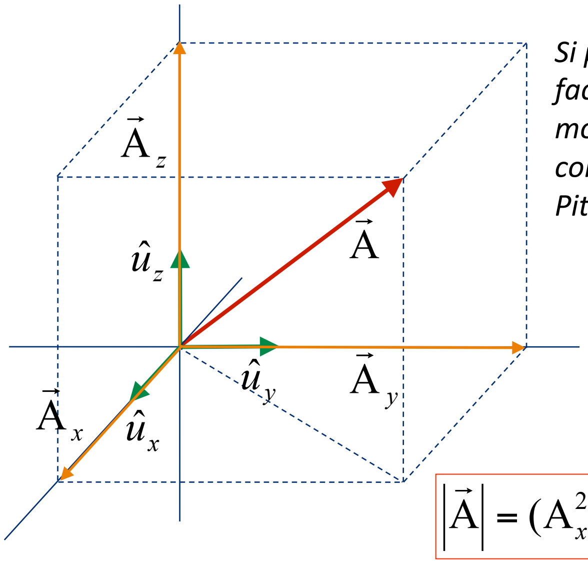
Tre assi perpendicolari tra loro

⇩

Tre ***coordinate cartesiane !!***

$$\boxed{\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z) \equiv \hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z}$$

Componenti cartesiane ortogonali

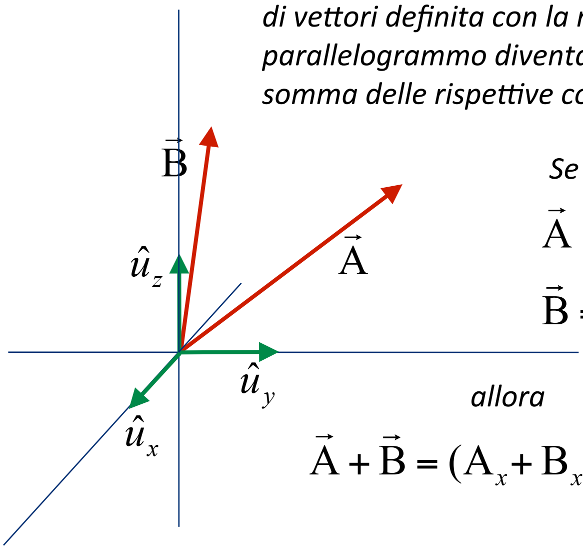


Si può calcolare facilmente il modulo del vettore con il teorema di Pitagora

$$\boxed{|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}}$$

Somme e prodotti per componenti cartesiane

Usando le coordinate dei vettori, la ***somma*** *di vettori definita con la regola del parallelogrammo diventa una semplice somma delle rispettive coordinate*



Se

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

allora

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$$

Somme e prodotti per componenti cartesiane

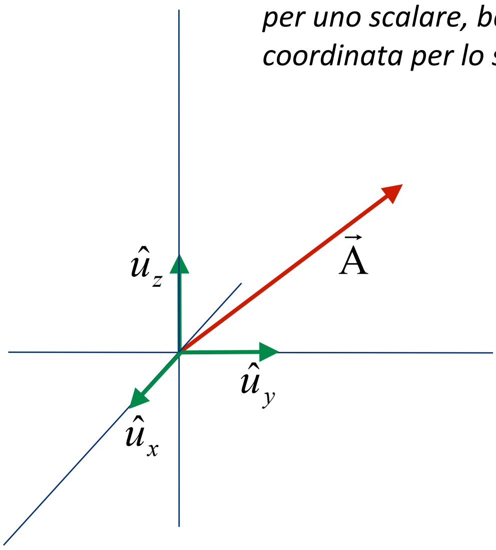
*Usando le coordinate dei vettori, la **somma** di vettori definita con la regola del parallelogrammo diventa una semplice somma delle rispettive coordinate*

Vale per un numero qualsiasi di addendi:

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\ldots=(A_x+B_x+C_x+\ldots,A_y+B_y+C_y+\ldots,A_z+B_z+C_z+\ldots)$$

Somme e prodotti per componenti cartesiane

*Analogamente per il **prodotto** di un vettore per uno scalare, basta moltiplicare ogni coordinata per lo stesso numero*



Se k *è uno scalare e*

$$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$$

allora

$$k\vec{A}=(kA_x,kA_y,kA_z)$$

Somme e prodotti per componenti cartesiane

*Non abbiamo ancora definito il **prodotto tra vettori !***

Nel corso ci serviranno due tipi di prodotti:

prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

è un numero (scalare)

prodotto vettoriale

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

è un vettore

Somme e prodotti per componenti cartesiane

*Non abbiamo ancora definito il **prodotto tra vettori !***

Nel corso ci serviranno due tipi di prodotti:

prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

è un numero (scalare)

questo lo definiamo subito

prodotto vettoriale

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

è un vettore

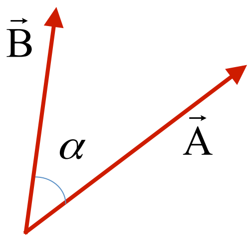
questo lo definiremo più avanti

Prodotto scalare di due vettori

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\alpha}$$

angolo compreso tra i due vettori

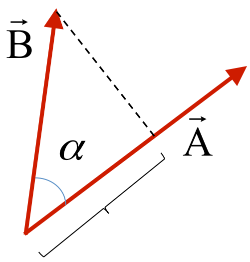
moduli dei vettori



Prodotto scalare di due vettori

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv \left|\vec{A}\right|\underbrace{\left|\vec{B}\right|\cos\alpha}}$$

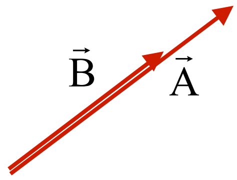
Lunghezza della
proiezione di B
nella direzione di A



Prodotto scalare di due vettori

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

Casi particolari:

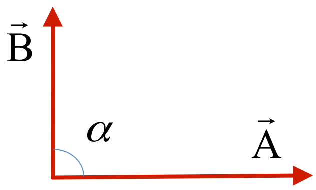


vettori paralleli

$\alpha = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}|$

vettori ortogonali

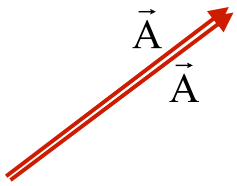
$\alpha = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$



Prodotto scalare di due vettori

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

Inoltre:



modulo quadro di un vettore

$$\vec{A}\cdot\vec{A} \equiv |\vec{A}||\vec{A}| = |\vec{A}|^2$$

modulo

$$|\vec{A}| = (\vec{A}\cdot\vec{A})^{1/2}$$

Prodotto scalare di due vettori

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\alpha}$$

è commutativo:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

è distributivo:

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\cdot\vec{A} + \vec{C}\cdot\vec{B}$$

inoltre:

$$k(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (k\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(k\vec{B})$$

Prodotto scalare di due vettori

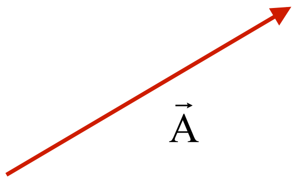
in coordinate cartesiane ortogonali

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= (\hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z)\cdot(\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z) \\
&= (\hat{u}_x \overset{1}{\cdot} \hat{u}_x)A_x B_x + \cancel{(\hat{u}_x \cdot \hat{u}_y)}A_x B_y + \cancel{(\hat{u}_x \cdot \hat{u}_z)}A_x B_z \\
&\quad + \cancel{(\hat{u}_y \cdot \hat{u}_x)}A_y B_x + (\hat{u}_y \overset{1}{\cdot} \hat{u}_y)A_y B_y + \cancel{(\hat{u}_y \cdot \hat{u}_z)}A_y B_z \\
&\quad + \cancel{(\hat{u}_z \cdot \hat{u}_x)}A_z B_x + \cancel{(\hat{u}_z \cdot \hat{u}_y)}A_z B_y + (\hat{u}_z \overset{1}{\cdot} \hat{u}_z)A_z B_z \\
&= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z
\end{aligned}$$

dato che i versori hanno modulo 1 e sono ortogonali tra loro.

Dunque: $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$

Parentesi matematica: vettori



Questo ci basta per il momento e
chiudiamo la parentesi.