Spostamento, velocità, accelerazione

Posizione e spostamento

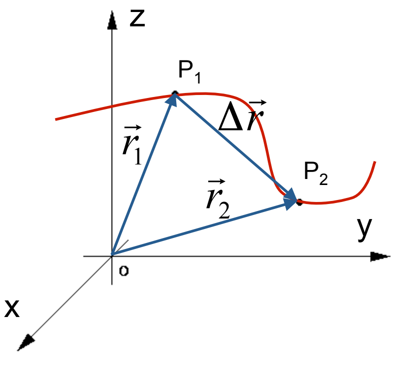
Due istanti assegnati t_1 e t_2, con $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$

Posizione al tempo t_1 :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) \equiv (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$$

Posizione al tempo t_2 :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2) \equiv (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$$



Spostamento:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}$$

Spostamento

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}$$

Nota:
Lo spostamento esprime la variazione di posizione nello spazio.
In un percorso chiuso, lo spostamento (vettoriale) è nullo!!

[*Si potrebbe definire anche uno spostamento (scalare) lungo una traiettoria assegnata. Questo lo vedremo più avanti.*]

Velocità

Idea intuitiva:
corpi in movimento lungo la stessa traiettoria possono superarsi o essere superati, a seconda della loro velocità.
Potremmo definire un campione basato su questa idea (ma è poco pratico).

Velocità

Procedura più efficace, ma equivalente:
corpi che si muovono velocemente percorrono distanze più grandi a parità di intervallo di tempo.

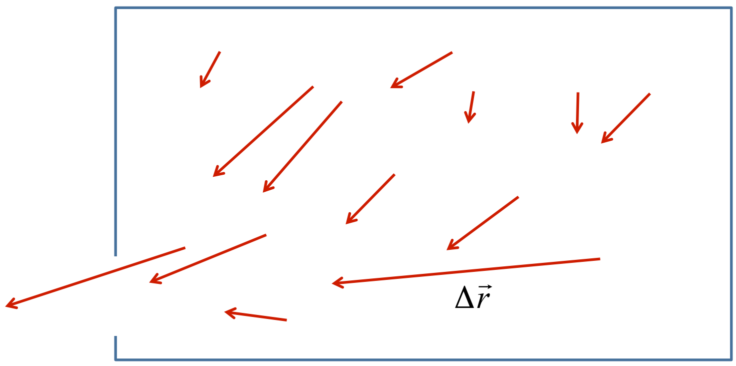
Definiamo la **velocità media** di una particella che compie uno spostamento $\Delta\vec{r}$ nel tempo Δt :

$$\boxed{\vec{v}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

Esempio: due fotografie successive di N persone che escono da una stanza



Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

Essendo il prodotto di un vettore per uno scalare ($1/\Delta t$), la velocità è un vettore.

Contiene informazioni anche su direzione e verso del moto.

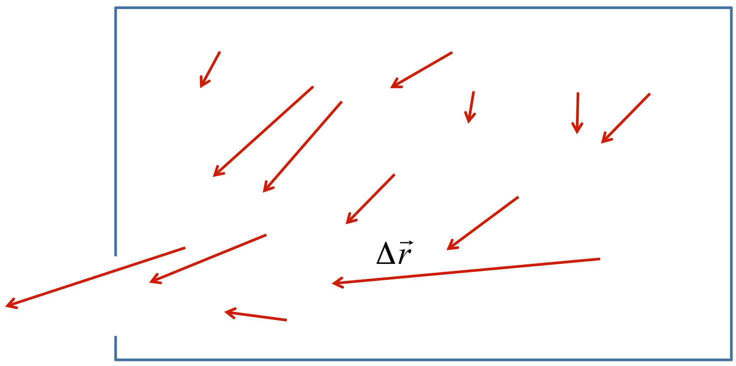
Si misura in metri al secondo (m/s)

Non necessita di un proprio campione.

Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

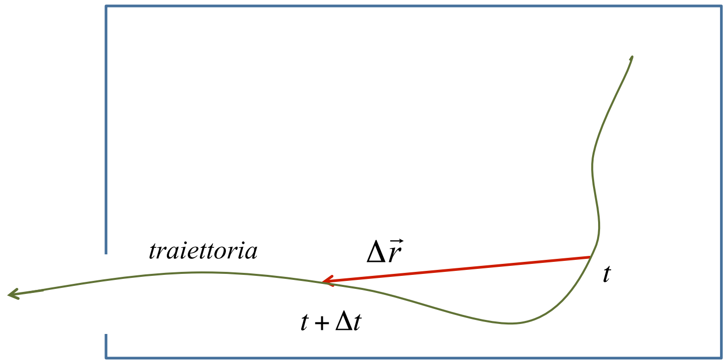
Non fornisce alcuna informazione su cosa succede al moto negli istanti intermedi tra t e $(t + \Delta t)$ **!!**



Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

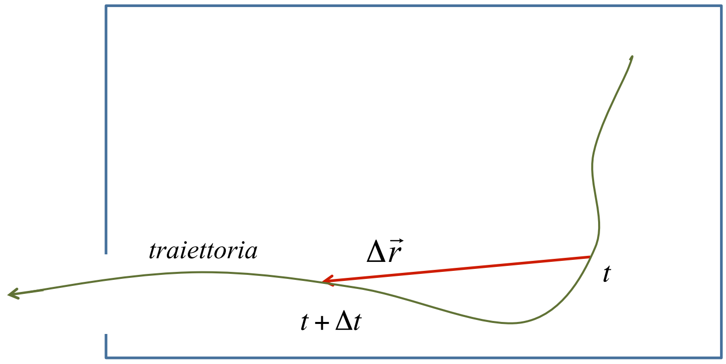
Non fornisce alcuna informazione su cosa succede al moto negli istanti intermedi tra t e $(t + \Delta t)$ **!!**



Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

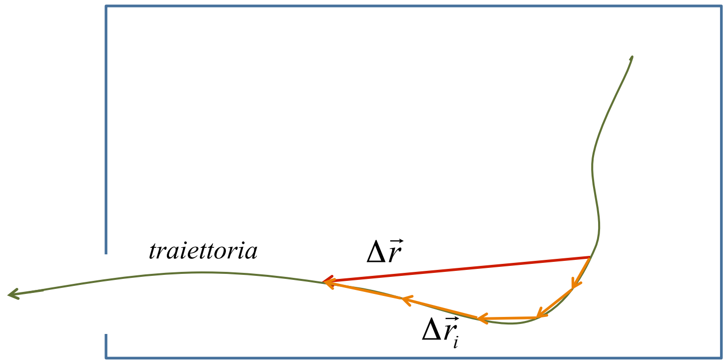
Per avere questa informazione si può dividere l'intervallo di tempo Δt in tanti intervalli più piccoli e calcolare la velocità media in quelli.



Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

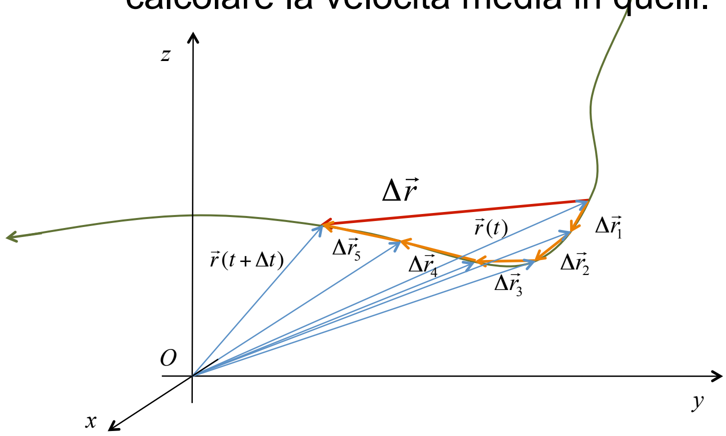
Per avere questa informazione si può dividere l'intervallo di tempo Δt in tanti intervalli più piccoli e calcolare la velocità media in quelli.



Velocità media

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

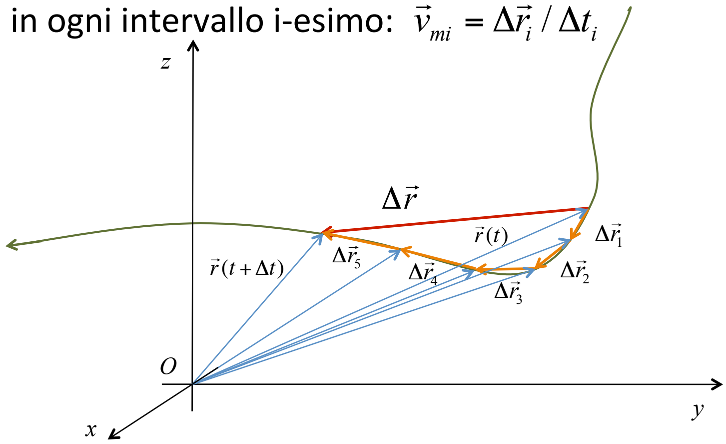
Per avere questa informazione si può dividere l'intervallo di tempo Δt in tanti intervalli più piccoli e calcolare la velocità media in quelli.



Usando le regole per le somme di vettori si può scrivere lo spostamento totale nella forma

$$\Delta\vec{r} = \sum_i \Delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{v}_{mi}\Delta t_i$$

avendo usato la precedente definizione di velocità media in ogni intervallo i-esimo: $\vec{v}_{mi} = \Delta\vec{r}_i / \Delta t_i$



Usando le regole per le somme di vettori si può scrivere lo spostamento totale nella forma

$$\Delta\vec{r} = \sum_i \Delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{v}_{mi}\Delta t_i$$

avendo usato la precedente definizione di velocità media in ogni intervallo i-esimo: $\vec{v}_{mi} = \Delta\vec{r}_i / \Delta t_i$

Notiamo che, se il numero di intervalli in cui dividiamo Δt è molto grande, tendente all'infinito, sia il numeratore che il denominatore tendono a zero. Chiamiamo **velocità istantanea** nell'intervallo i-esimo il limite della velocità media i-esima:

$$\vec{v}(t_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t_i}$$

Velocità istantanea

Nel limite $\Delta t_i \rightarrow 0$ la variabile discreta t_i può essere rimpiazzata dalla variabile continua t, la velocità media corrisponde al **rapporto incrementale** della funzione $\vec{r}(t)$, e il limite del rapporto incrementale coincide, nel linguaggio matematico, con la **derivata** della funzione rispetto a t:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Velocità istantanea

Lo spostamento totale nell'intervallo finito $\Delta t = t_2 - t_1$ diventa

$$\Delta \vec{r} = \sum_i \Delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{v}_{mi} \Delta t_i \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt$$

dove abbiamo sostituito la somma di spostamenti finiti con l'integrale degli spostamenti infinitesimi

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)\, dt$$

Velocità istantanea $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$

Dal punto di vista fisico la velocità istantanea può essere vista come la **velocità media in un intervallo di tempo piccolo** attorno all'istante t, molto più piccolo della scala dei tempi entro cui la velocità varia sensibilmente.

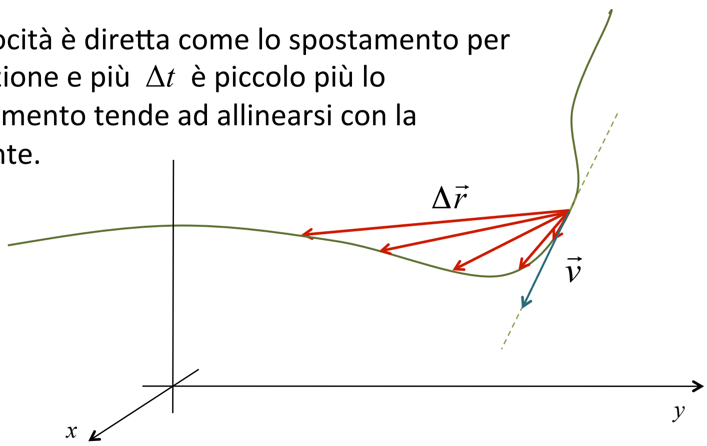
Dal punto di vista matematico la velocità istantanea è la **derivata prima della posizione** rispetto al tempo.

*[Stiamo assumendo che sia possibile conoscere la posizione di una particella come funzione (vettoriale) del tempo e che questa **funzione sia continua e derivabile**. È un'assunzione ragionevole nell'ambito dei fenomeni descritti dalla **fisica classica**, ma potrebbe non esserlo nel contesto di teorie diverse].*

Velocità istantanea $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$

È facile vedere che la **velocità istantanea è sempre diretta lungo la tangente alla traiettoria**, punto per punto.

La velocità è diretta come lo spostamento per definizione e più Δt è piccolo più lo spostamento tende ad allinearsi con la tangente.



Velocità istantanea

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Possiamo esprimere i vettori usando le coordinate cartesiane

$$\vec{r} \equiv (x, y, z) = \hat{u}_x x + \hat{u}_y y + \hat{u}_z z$$

$$d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz) = \hat{u}_x dx + \hat{u}_y dy + \hat{u}_z dz$$

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) = \hat{u}_x v_x + \hat{u}_y v_y + \hat{u}_z v_z$$

x, y, z sono funzioni del tempo, mentre i versori $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$ sono fissi.

Allora la definizione di velocità istantanea diventa:

$$\boxed{v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}}$$

Accelerazione

Anche la velocità può cambiare nel tempo. Assumiamo che si comporti come una funzione continua e derivabile di t.

Identifichiamo la derivata della velocità rispetto al tempo con una nuova grandezza che chiamiamo accelerazione:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Possiamo definire anche l'accelerazione media:

$$\boxed{\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

Accelerazione

Consideriamo un intervallo finito di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e suddividiamolo in tanti intervalli Δt_i . In ciascuno di essi la variazione di velocità è data, per definizione di accelerazione media, da $\Delta\vec{v}_i = \vec{a}_{mi}\Delta t_i$

e la variazione totale sarà $\Delta\vec{v} = \sum_i \vec{a}_{mi}\Delta t_i$

Nel limite in cui gli intervalli sono infiniti ma di ampiezza infinitesima, la somma diventa un integrale e l'accelerazione media diventa quella istantanea, così che

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,dt}$$

Accelerazione

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Per come è stata definita, l'accelerazione ha dimensioni di lunghezza su tempo al quadrato e si misura in m/s^2

[nota sul controllo dimensionale delle equazioni]