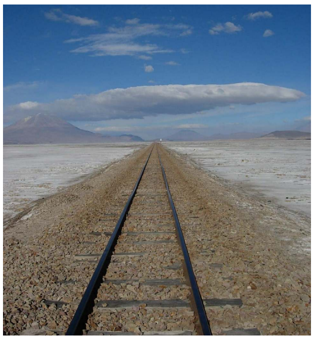
Cinematica

Cinematica: descrizione quantitativa del moto, senza riferimento alle cause che lo producono.

Assegnate le traiettorie e/o le leggi orarie e/o le accelerazioni, si determinano le altre informazioni incognite, usando le definizioni di posizione, velocità, accelerazione, e tutte le relazioni matematiche che ne seguono.

Fornisce strumenti formali/matematici per risolvere problemi relativi al moto. Prelude allo studio della dinamica.

1° esempio: moto rettilineo

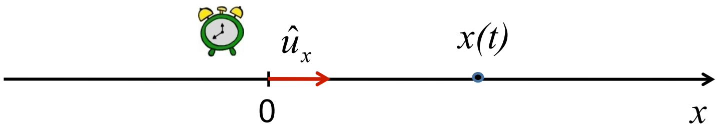


Il moto avviene in 1D:

$$\vec{r}(t) = \hat{u}_x x(t)$$

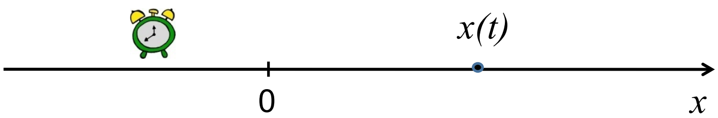
$$\vec{v}(t) = \hat{u}_x v(t) = \hat{u}_x \frac{dx}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \hat{u}_x a(t) = \hat{u}_x \frac{dv}{dt} = \hat{u}_x \frac{d^2x}{dt^2}$$



[parentesi sulla notazione]

1° esempio: moto rettilineo



Basta scrivere le relazioni tra le funzioni scalari $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$

$$x = x(t)\,; \quad v = \frac{dx}{dt}\,; \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

e le loro inverse

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'\,; \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

dove $x_0 = x(t_0)$ e $v_0 = v(t_0)$ sono la posizione e la velocità iniziali.

1° esempio: moto rettilineo

Caso più semplice: **moto uniforme**.
Per definizione è il moto con accelerazione nulla.

$$v(t) = v_0 + \cancel{\int_{t_0}^{t} a(t')dt'} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 = \text{costante}$$

Per la posizione si ottiene

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\,dt' = x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt' = x_0 + v_0(t - t_0)$$

che corrisponde a $\Delta x = v_0 \Delta t$
Velocità media e velocità istantanea coincidono.

1° esempio: moto rettilineo

Altro caso semplice: **moto uniformemente accelerato**.
Per definizione è il moto con accelerazione costante.
Per la velocità si ottiene

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')dt' = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt' = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt' = v_0 + a(t - t_0)$$

Per la posizione si ottiene

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t' - t_0)]dt'$$

$$= x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt' + a\int_{t_0}^{t} (t' - t_0)dt' = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

1° esempio: moto rettilineo

moto uniformemente accelerato.

In sintesi

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a(t-t_0) \\ x(t) &= x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \end{aligned}}$$

Comprendono il moto **uniforme** come caso particolare in cui $a = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_0 \\ x(t) &= x_0 + v_0(t-t_0) \end{aligned}}$$

[*nota sul significato geometrico dell'integrale*]

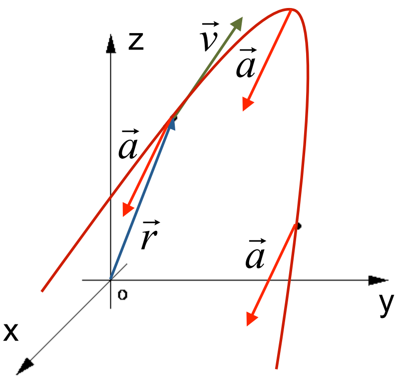
2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

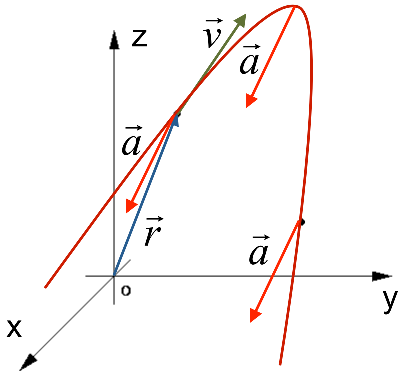
Se $\vec{a}$ è costante

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt' = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)$$



2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)}$$



Inoltre:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

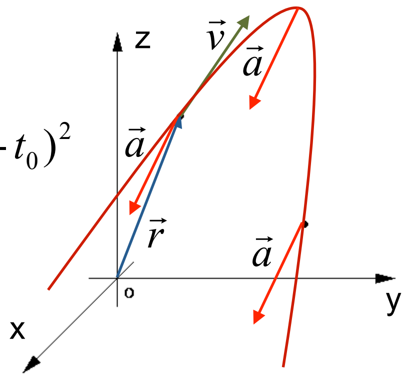
$$= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{v}_0 + \vec{a}(t' - t_0)]dt'$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} dt' + \vec{a} \int_{t_0}^{t} (t' - t_0)dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$



Notiamo che, per qualsiasi Δt, lo spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ è un vettore che sta sempre nel piano individuato dai vettori costanti $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$. **Il moto è planare!!**

2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)} \qquad \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2}$$

In coordinate cartesiane:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + 1/2\, a_x(t - t_0)^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + 1/2\, a_y(t - t_0)^2$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + 1/2\, a_z(t - t_0)^2$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0)$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y(t - t_0)$$

$$v_z(t) = v_{0z} + a_z(t - t_0)$$

2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

$$\text{Leggi orarie} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + 1/2\, a_x(t - t_0)^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + 1/2\, a_y(t - t_0)^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z}(t - t_0) + 1/2\, a_z(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Dietro queste equazioni c'è un'idea fisica importante: un moto generico nello spazio può essere decomposto in moti lungo direzioni indipendenti. Questa **composizione dei moti** fu una delle idee chiave della cinematica di **Galileo**. Viene tradotta formalmente dall'uso dei **vettori** per rappresentare la posizione, la velocità e l'accelerazione di un corpo**!!**

2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi**

Galileo scoprì che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione (trascurando l'attrito).

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \text{costante}}$$

Se scegliamo y come coordinata verticale:

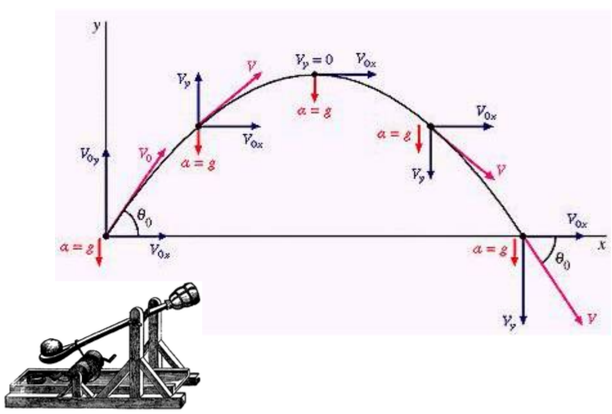
$$v_y(t) = v_{0y} - g(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi** $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \text{costante}}$

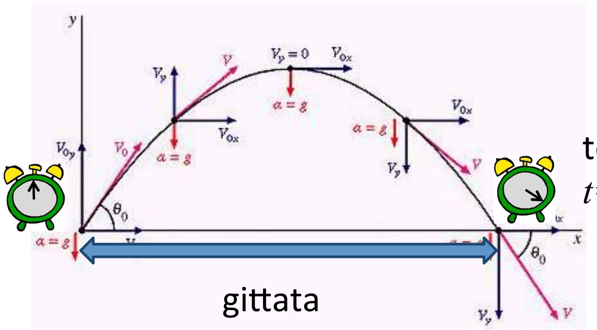
Problema balistico:



2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi** $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \text{costante}}$

t=0



tempo di volo
$t=t_v$

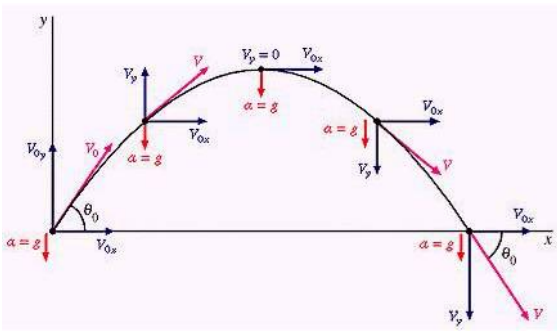
2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi** $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \hat{u}_y(-g)}$

Equazioni per la posizione e la velocità:

$$x(t) = v_{0x}t \qquad v_x(t) = v_{0x}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt$$



2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi** $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \hat{u}_y(\text{-}g)}$

Equazioni per la posizione e la velocità:

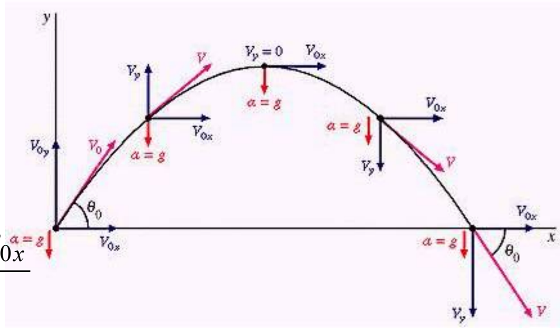
$$x(t) = v_{0x}t \qquad v_x(t) = v_{0x}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt$$

$y = 0$ quando $t = 0$ e

$$t = t_v = \frac{2v_{0y}}{g}$$

$$\text{gittata} = x(t_v) = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g}$$

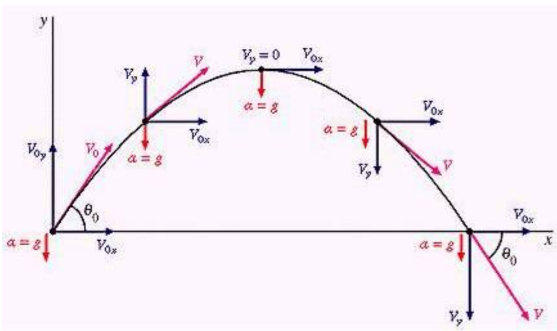


2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi** $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \hat{u}_y(\text{-}g)}$

$$\boxed{t_v = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g}} \qquad \boxed{x(t_v) = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0}{g}}$$

La traiettoria si ottiene eliminando il tempo dalle due leggi orarie per *x(t)* e *y(t)*

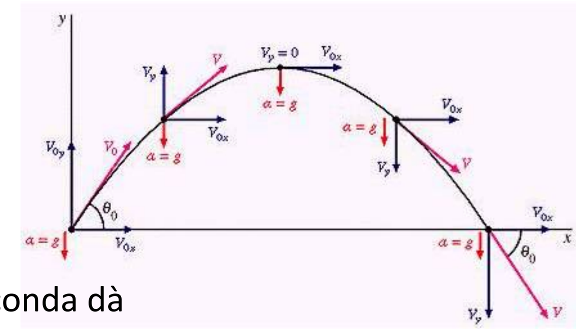


2° esempio: moto con accelerazione costante in 3D

Caso particolare: **caduta dei gravi** $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \hat{u}_y(-g)}$

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$



dalla prima

$$t = x / v_{0x}$$

che inserito nella seconda dà

$$\boxed{y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2}$$

parabola!

[*nota: no attrito*]

Esercizio

Usain Bolt è fuori forma e impiega ben 10 secondi a coprire i 100 m piani, con 4 secondi di accelerazione e 6 di velocità costante.
Calcolare la velocità media, l'accelerazione e la velocità massima.

Esercizio

Due particelle vengono lanciate verso l'alto con la stessa velocità iniziale verticale e dallo stesso punto, ma in istanti di tempo diversi. Sia t_0 l'intervallo di tempo tra i due lanci.
Calcolare
- la quota a cui si incontrano
- le velocità nel punto di incontro
- il tempo a cui si incontrano

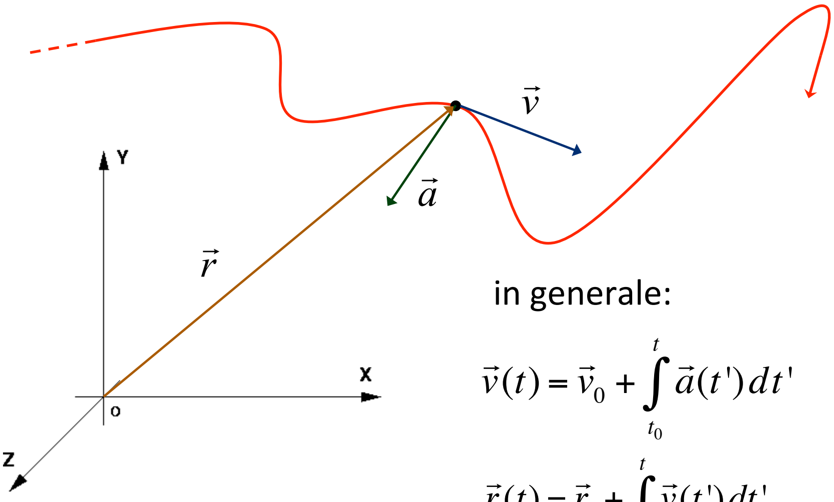
e disegnare il diagramma del moto.

[*Esercizio 3.2 Dalba-Fornasini, svolto alla lavagna; Si consiglia di svolgere anche gli esercizi 3.1 e 3.3*]

Esercizio

Una biglia scivola da un tetto inclinato di 30 gradi, raggiunge il bordo ad una velocità di 10 m/s e poi cade. Il bordo del tetto si trova a 10 m dal suolo. Un muro verticale si trova di fronte alla casa ad una distanza di 5 m. Si scriva l'equazione della traiettoria della biglia in caduta. Si calcoli a quale altezza colpisce il muro di fronte e con quale velocità. A quale velocità la biglia dovrebbe staccarsi dal bordo del tetto per non colpire il muro?

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

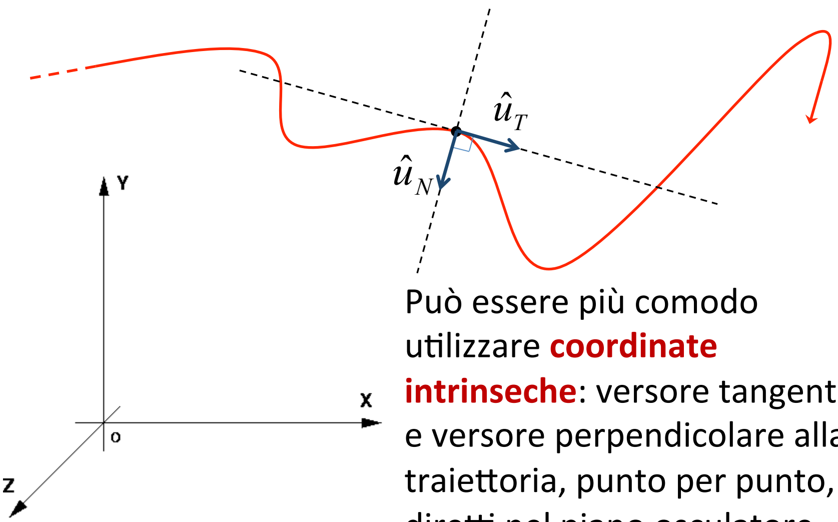


in generale:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

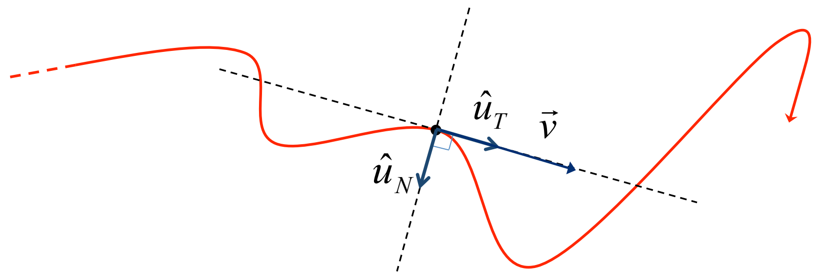
3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata



Può essere più comodo utilizzare **coordinate intrinseche**: versore tangente e versore perpendicolare alla traiettoria, punto per punto, diretti nel piano osculatore.

[*nota sul piano e sul cerchio osculatore, e sulla curvatura*]

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

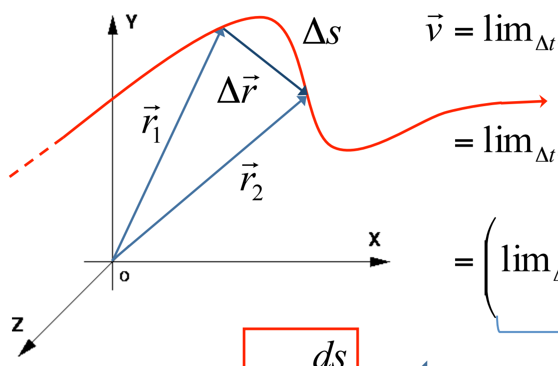


Per definizione, la velocità istantanea è tangente: $\vec{v} = \hat{u}_T v$

Essendo $\hat{u}_T$ concorde con $\vec{v}$ allora v è una grandezza scalare positiva. Si può chiamare **velocità scalare**. Rappresenta la velocità, in modulo, con cui la particella percorre la traiettoria, misurando lo spostamento lungo la traiettoria stessa. Infatti… (continua)

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

[…] Infatti, se Δs è la distanza percorsa lungo la traiettoria nel tempo Δt , allora



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

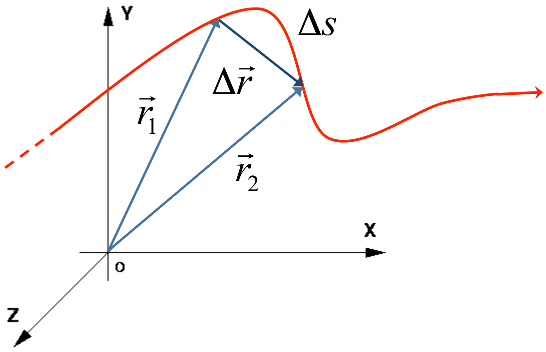
$$= \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right)}_{\hat{u}_T} \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)}_{\frac{ds}{dt}}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

velocità scalare.
È quella misurata, ad esempio, dal tachimetro di un automobile.



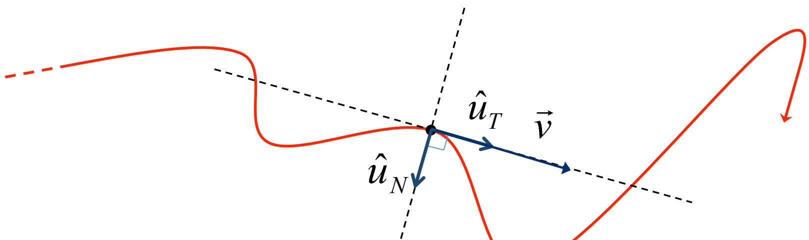
Notiamo che

$$\Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt$$

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

sono grandezze diverse!!

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata



Dunque: $\vec{v} = \hat{u}_T v$

Cosa si può dire dell'accelerazione in queste coordinate?

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \left(\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right)v + \hat{u}_T\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

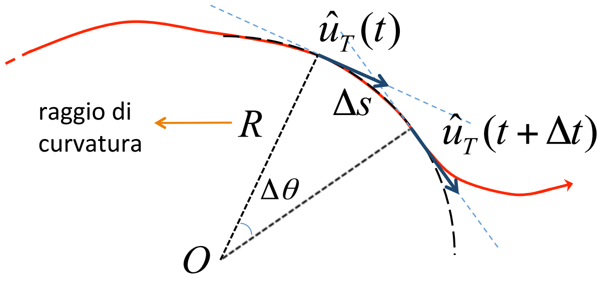
?

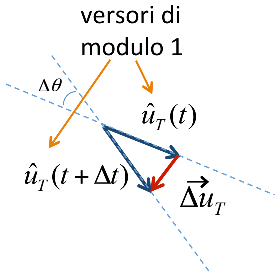
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

$$\left(\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right) = ?$$

Consideriamo uno spostamento piccolo, tale da poter approssimare la traiettoria con un arco di cerchio osculatore





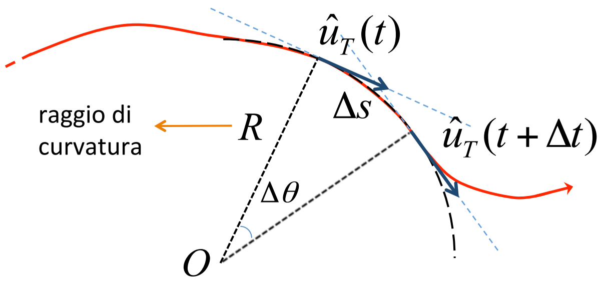
$$\left|\Delta\vec{u}_T\right| = 2\left|\hat{u}_T\right| \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} \cong 2\left|\hat{u}_T\right|\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$$

base del triangolo isoscele

piccolo $\Delta\theta$

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

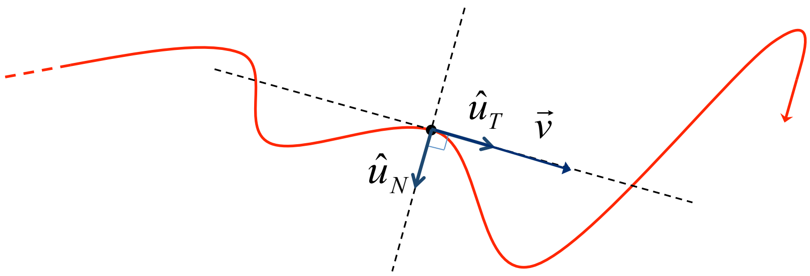
$$\left|\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t}\right| = \frac{1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \left|\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right| = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$



$$\boxed{\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N\frac{v}{R}}$$

D'altre parte, nello stesso limite, $\Delta\vec{u}_T$ si dispone perpendicolarmente alla traiettoria con direzione e verso coincidenti con $\hat{u}_N$

3° esempio: **moto curvilineo con traiettoria assegnata**

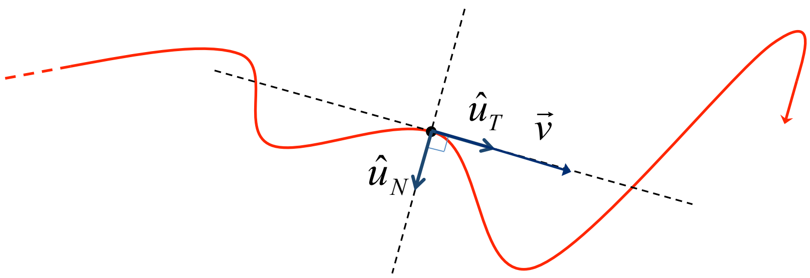


Eravamo arrivati qui:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \left(\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right)v + \hat{u}_T\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} \Downarrow \; ? \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

3° esempio: **moto curvilineo con traiettoria assegnata**

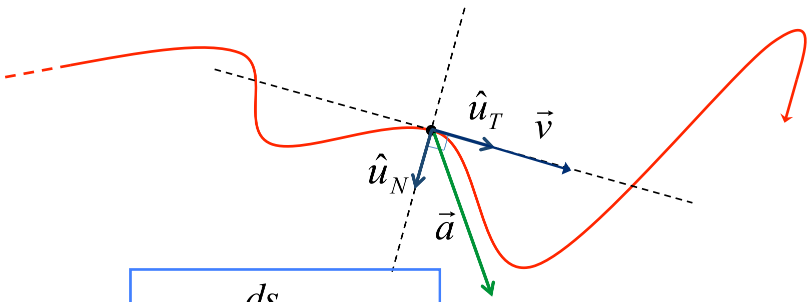


Ora abbiamo ottenuto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \left(\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right)v + \hat{u}_T\left(\frac{dv}{dt}\right) = \hat{u}_N \frac{v^2}{R} + \hat{u}_T \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} \Downarrow \; \hat{u}_N \frac{v}{R} \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

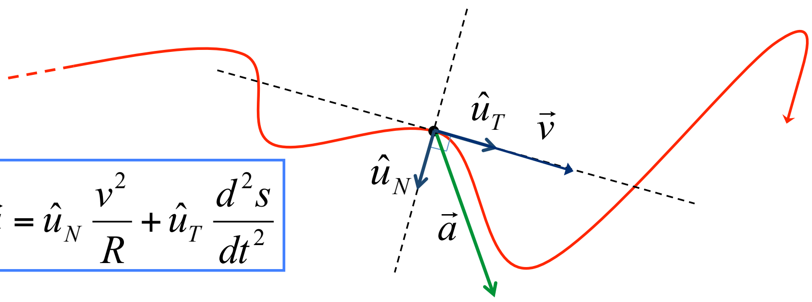


In sintesi:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \hat{u}_T \frac{ds}{dt} \\ \vec{a} &= \underbrace{\hat{u}_N \frac{v^2}{R}}_{\text{acc. centripeta}} + \underbrace{\hat{u}_T \frac{d^2 s}{dt^2}}_{\text{acc. tangenziale}}\end{aligned}}$$

le due accelerazioni rendono conto della variazione di velocità scalare e della variazione di direzione del moto **!!**

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata



$$\boxed{\vec{a} = \hat{u}_N \frac{v^2}{R} + \hat{u}_T \frac{d^2 s}{dt^2}}$$

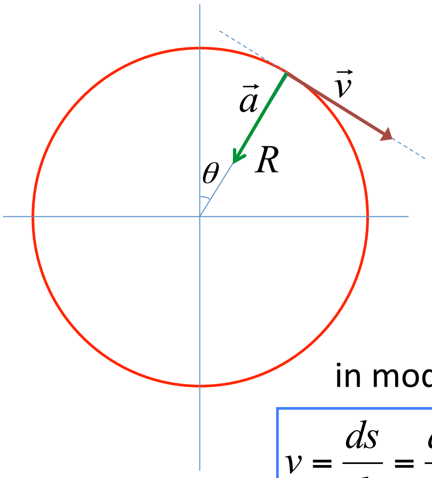
Importante: una corpo che percorre una traiettoria curvilinea è accelerato anche se $dv/dt = 0$, perché la velocità cambia direzione nel tempo.

Caso particolare: **moto circolare uniforme**

3° esempio: **moto curvilineo con traiettoria assegnata**

Caso particolare: **moto circolare uniforme**

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \text{costante} \\ v &= \text{costante} \\ \vec{a} &= \hat{u}_N \frac{v^2}{R} \end{aligned}}$$



Si può introdurre una **velocità angolare**

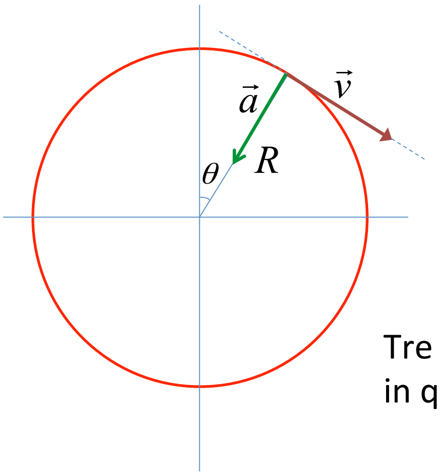
$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

in modo che

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega}$$

3° esempio: **moto curvilineo con traiettoria assegnata**

Caso particolare: **moto circolare uniforme**

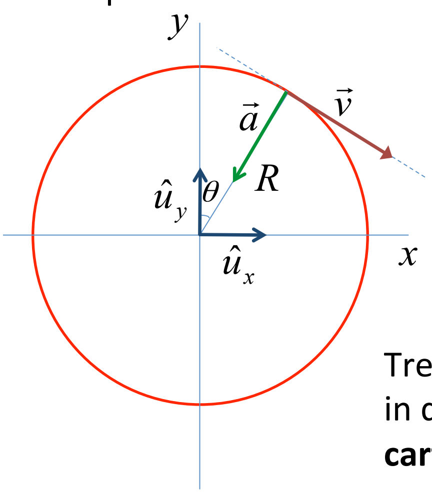


$$\boxed{\begin{aligned} R &= \text{costante} \\ v &= \text{costante} \\ \omega &= \text{costante} \\ \vec{a} &= \hat{u}_N \frac{v^2}{R} = \hat{u}_N R\omega^2 \end{aligned}}$$

Tre tipi di coordinate, utili in questo caso

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

Caso particolare: **moto circolare uniforme**



$R =$ costante

$v =$ costante

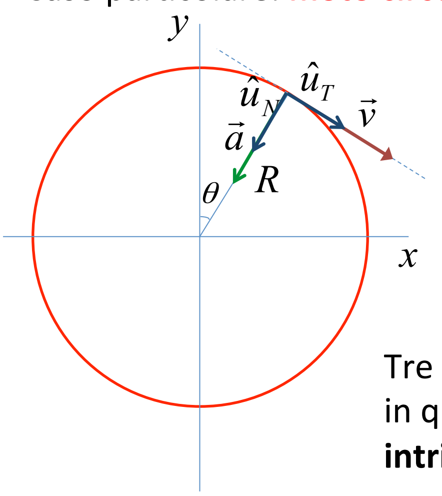
$\omega =$ costante

$$\vec{a} = \hat{u}_N \frac{v^2}{R} = \hat{u}_N R\omega^2$$

Tre tipi di coordinate, utili in questo caso:
cartesiane (2D)

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

Caso particolare: **moto circolare uniforme**



$R =$ costante

$v =$ costante

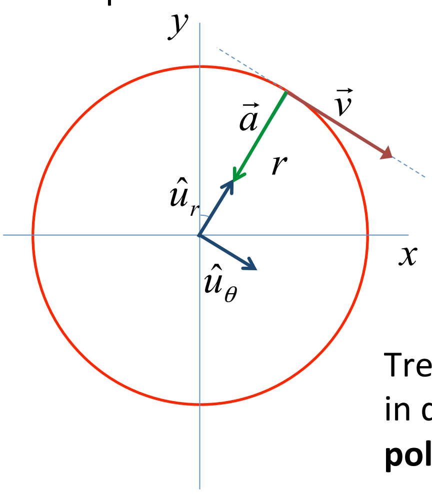
$\omega =$ costante

$$\vec{a} = \hat{u}_N \frac{v^2}{R} = \hat{u}_N R\omega^2$$

Tre tipi di coordinate, utili in questo caso:
intrinseche

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

Caso particolare: **moto circolare uniforme**



R = costante

v = costante

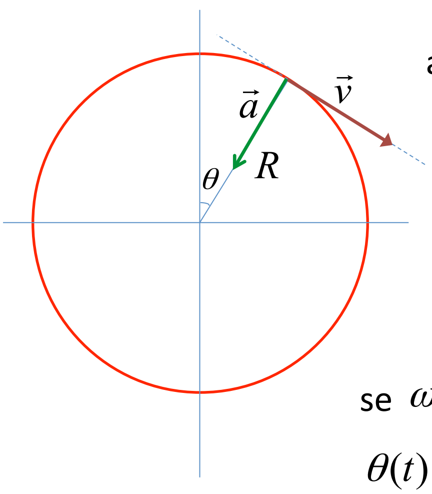
ω = costante

$$\vec{a} = \hat{u}_N \frac{v^2}{R} = \hat{u}_N R\omega^2$$

Tre tipi di coordinate, utili in questo caso:
polari

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

Caso particolare: **moto circolare uniforme**



angolo in funzione del tempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Downarrow$$

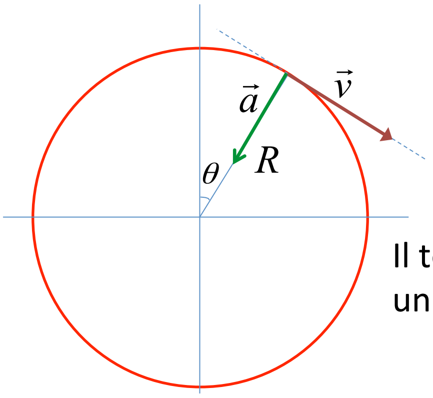
$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt'$$

se ω è costante, allora:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

3° esempio: moto curvilineo con traiettoria assegnata

Caso particolare: **moto circolare uniforme**



$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

un giro corrisponde al caso

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0 = 2\pi$$

Il tempo necessario a compiere un giro si chiama **periodo**, e vale

$$\boxed{T = 2\pi / \omega}$$

La **frequenza** è l'inverso del periodo $f = 1/T = \omega/2\pi$ e si misura in Hertz (1 Hz = 1 s^{-1}).

Esercizio

Assegnata la distanza media Terra-Luna, stimare la velocità di rotazione della Luna attorno alla Terra, la velocità angolare e l'accelerazione centripeta.

Esercizio

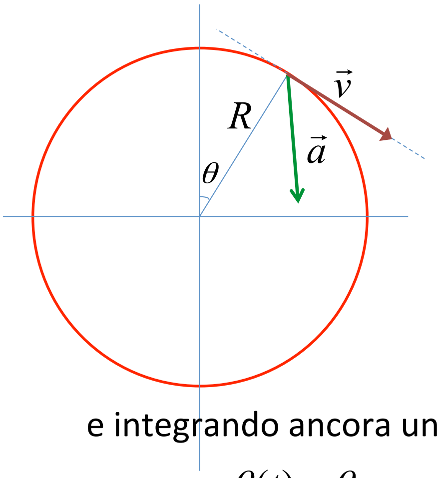
Scrivere le leggi orarie del moto circolare uniforme in coordinate cartesiane ortogonali.

Esercizio

Rotazione della terra sul suo asse. Stimare la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta di un punto generico sulla superficie, in funzione della latitudine.

[*svolti alla lavagna*]

Altro caso semplice: **moto circolare con accelelerazione angolare costante**



se ω non è costante, allora si può definire un'accelerazione angolare
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

da cui segue
$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt'$$

se α è costante, allora:
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

e integrando ancora una volta si ottiene l'angolo:
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Esercizio

Un volano ha velocità angolare in aumento da 20 rad/s a 30 rad/s in 5 minuti.
Calcolare l'accelerazione angolare e l'angolo totale descritto.

[*svolto alla lavagna*]