Forze

La forza e la seconda legge di Newton

Partiamo da

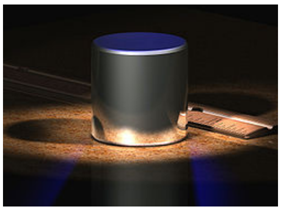
$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}$$

e trattiamo alcuni esempi di forze

Prima un commento sulle **dimensioni** e sui **campioni** di misura.

Massa

Il campione è un cilindro di altezza e diametro pari a 0,039 m di una lega di platino-iridio depositato presso l'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure a Sèvres . Per definizione, la sua massa è il **chilogrammo** (1 Kg).



Prima un commento sulle **dimensioni** e sui **campioni** di misura.

Quantità di moto

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Per come è definita, si misura in Kg m/s.
Non necessita di un campione (è una grandezza "derivata").

Prima un commento sulle **dimensioni** e sui **campioni** di misura.

Forza

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

Per come entra nella II legge, si misura in Kg m/s^2 .
Storicamente si è introdotta un'unità di misura apposita:

1 Newton (N) = 1 Kg m/s^2

è la forza che produce un'accelerazione di 1 m/s^2 se applicata ad una massa di 1 Kg.

La forza e la seconda legge di Newton

Chiusa la parentesi sulle dimensioni, ripartiamo da

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}$$

e trattiamo alcuni esempi di forze

1° esempio: Forza costante

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{F}_0 = \text{costante}}$$

Allora, la soluzione dell'equazione del moto è $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_0}{m}$

Il moto con **accelerazione costante**, l'abbiamo già studiato in cinematica:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

A seconda delle condizioni iniziali, si ottiene un moto rettilineo o un moto con traiettoria parabolica in un piano.

1° esempio: Forza costante

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{F}_0 = \text{costante}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m}$$

Rivediamo lo stesso problema dal punto di vista dell'integrazione dell'equazione del moto. In 1D per semplicità.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} \Rightarrow \int dv = \int \frac{F_0}{m} dt \Rightarrow v = \frac{F_0}{m} t + c_1$$

costante d'integrazione

1° esempio: Forza costante

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{F}_0 = \text{costante}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m}$$

$$v = \frac{F_0}{m}t + c_1$$

Ora integriamo ancora:

$$\int dx = \int v dt = \int \left(\frac{F_0}{m}t + c_1\right) dt$$

da cui:

$$x = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + c_1 t + c_2$$

altra costante d'integrazione

1° esempio: Forza costante

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{F}_0 = \text{costante}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m}$$

L'eq. del moto è una equazione differenziale al II ordine. La sua soluzione generale contiene due costanti arbitrarie.

$$v = \frac{F_0}{m}t + c_1$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + c_1 t + c_2$$

In un dato problema fisico, le costanti di integrazione sono fissate dalla **conoscenza della posizione e della velocità iniziali**.

1° esempio: Forza costante

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{F}_0 = \text{costante}}$$

$$v = \frac{F_0}{m}t + c_1 \qquad\qquad x = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2 + c_1 t + c_2$$

Ad esempio, se $x=x_0$ e $v=v_0$ al tempo $t=0$, allora

$$c_1 = v_0 \qquad\qquad c_2 = x_0$$

$$v = v_0 + \frac{F_0}{m}t \qquad\qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2$$

1° esempio: Forza costante

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = \vec{F}_0 = \text{costante}}$$

Esistono forze costanti in natura**?**
Sì, ad esempio la **forza peso**.
È la forza con cui la terra attrae verso di sé qualsiasi corpo, in prossimità della sua superficie.

Galileo aveva mostrato che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione g. Usando la II legge di Newton questa osservazione empirica implica l'esistenza di una forza costante, proporzionale alla massa dei corpi.

1° esempio: Forza costante

Forza peso:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{g}}$$

Usando la II legge di Newton con questa forza, si ottiene

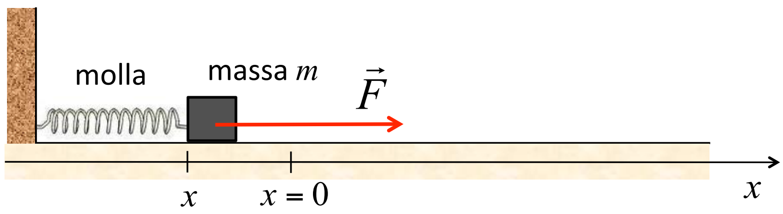
$$\cancel{m}\vec{a} = \cancel{m}\vec{g}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Negli esperimenti si può misurare l'accelerazione di gravità: $\boxed{g \cong 9.8\,\mathrm{m/s^2}}$

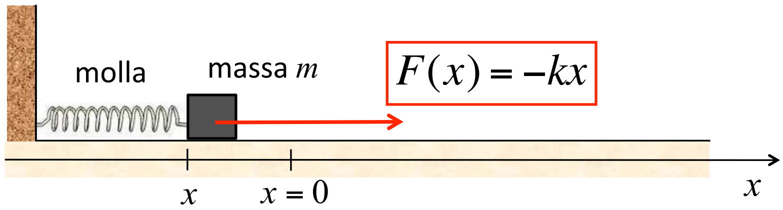
2° esempio: Forza elastica



La molla reagisce alle deformazioni opponendo una forza proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio (lunghezza a "riposo"):

$$\boxed{\vec{F} = \hat{u}_x(-kx)}$$

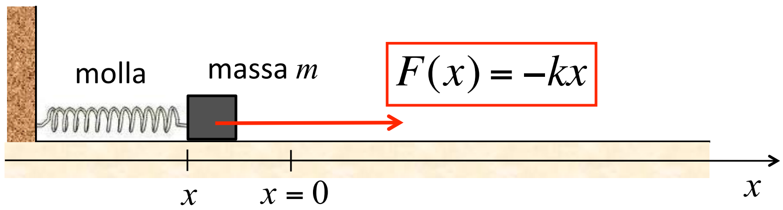
2° esempio: Forza elastica



È la **legge di Hooke**. È una legge **empirica** che approssima bene qualsiasi risposta a piccole deformazioni di mezzi elastici.

k è detta **costante elastica** ed è una caratteristica di ciascuna molla. Si misura in N/m.

2° esempio: Forza elastica



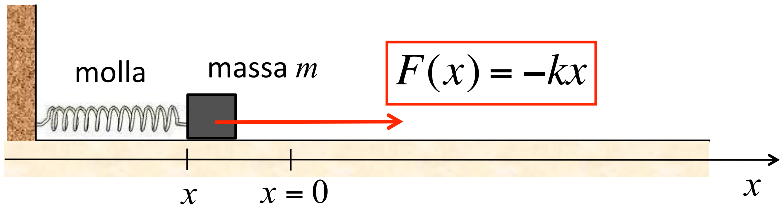
Equazione del moto (in assenza di attriti):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Introduciamo la nuova grandezza: $\omega^2 = k/m$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

2° esempio: Forza elastica



$$\boxed{F(x) = -kx}$$

Equazione del moto:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

pulsazione: $\omega = (k/m)^{1/2}$

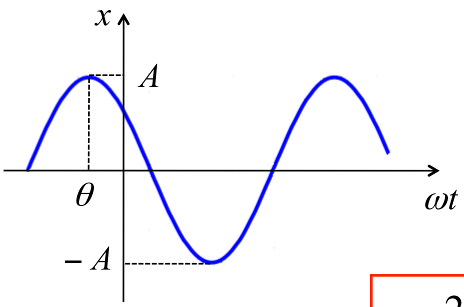
Soluzione generale: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \theta)}$

costanti di integrazione

[alla lavagna: verifica che si tratta della soluzione giusta]

2° esempio: Forza elastica

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \Rightarrow \boxed{x(t) = \overset{\text{ampiezza}}{A}\cos(\underbrace{\omega t + \theta}_{\text{fase}})}$$



è una funzione periodica con periodo $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

e frequenza $\nu = 1/T = \omega/2\pi$

2° esempio: Forza elastica

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \Rightarrow \boxed{x(t) = \overset{\text{ampiezza}}{A}\cos\underbrace{(\omega t + \theta)}_{\text{fase}}}$$

Note [alla lavagna]:
- *esempi di soluzioni particolari;*
- *controllo dimensionale dell'equazione;*
- *velocità e posizione sono sfasate di $\pi/2$.*

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$$

2° esempio: Forza elastica

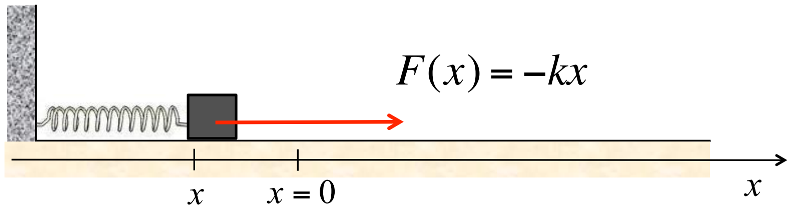
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \theta)}$$

Questo si chiama **moto armonico**. L'equazione del moto si chiama **equazione armonica**.

Il moto armonico ha un ruolo importantissimo in fisica. L'equazione armonica rappresenta il comportamento di piccole oscillazioni in sistemi anche molto diversi tra loro e con vastissime applicazioni **!!**

[Nota (alla lavagna): proiezione in 1D di un moto circolare uniforme]

3° esempio: forza elastica + forza peso

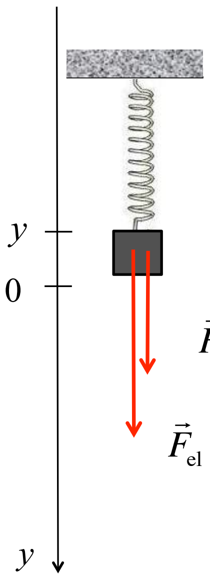


$$F(x) = -kx$$

Se il piano è orizzontale la forza peso non ha alcun effetto nella direzione del moto. Inoltre, stiamo trascurando ogni possibile attrito.

Se invece mettiamo la molla in verticale…

3° esempio: forza elastica + forza peso

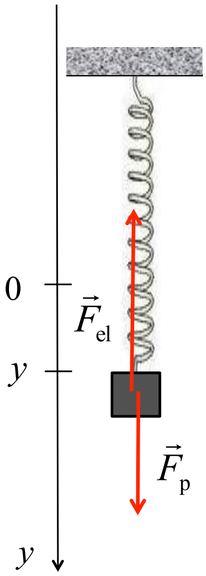


Molla **compressa** rispetto alla sua lunghezza di equilibrio ($y = 0$). Forza peso e forza elastica sono **concordi**.

$$\vec{F}_{\rm p} = \hat{u}_y(mg)$$

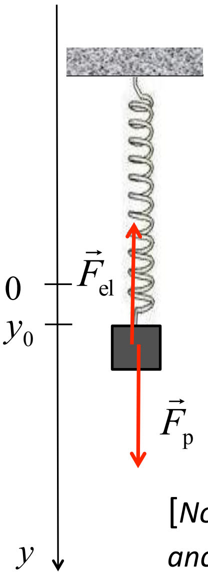
$$\vec{F}_{\rm el} = \hat{u}_y(-ky)$$

3° esempio: forza elastica + forza peso



Molla **estesa** rispetto alla sua lunghezza di equilibrio ($y=0$). Forza peso e forza elastica sono **discordi**.

3° esempio: forza elastica + forza peso



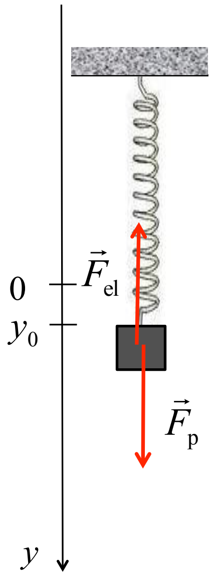
Nuova **condizione di equilibrio** (accelerazione nulla) quando le due forze sono discordi ma eguali in modulo:

$$k y_0 = mg$$

$$y_0 = mg / k$$

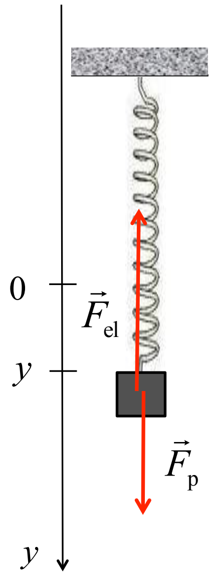
[*Nota: così è possibile misurare il peso di un corpo e anche la sua massa (vedi commento di Newton)*]

3° esempio: forza elastica + forza peso



Nota importante:
Forze diverse che agiscono sullo stesso corpo danno un effetto equivalente a quello di una forza pari alla **somma vettoriale** delle due **!!**
L'una non modifica l'effetto dell'altra.
Basta "sovrapporle" (**principio di sovrapposizione** delle forze).

3° esempio: forza elastica + forza peso



Equazione del moto:

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\,y + mg}$$

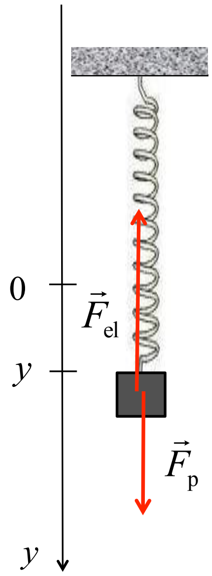
ovvero

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\left(y - \frac{mg}{k}\right) = -k(y - y_0)$$

infine

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_0)$$

3° esempio: forza elastica + forza peso



Equazione del moto:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}(y - y_0)$$

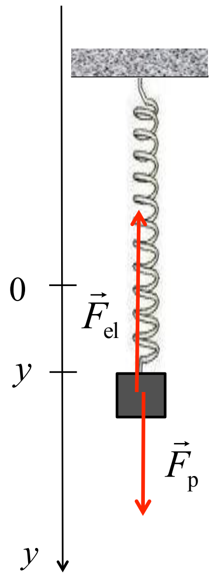
Come prima chiamiamo: $\omega = (k/m)^{1/2}$
e introduciamo la nuova coordinata:

$$\eta = y - y_0$$

L'equazione diventa: $$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{k}{m}\eta$$

È ancora un'equazione armonica **!!**

3° esempio: forza elastica + forza peso



$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{k}{m}\eta \qquad \text{con} \qquad \eta = y - y_0 \qquad \omega = (k/m)^{1/2}$$

La soluzione generale ha la forma

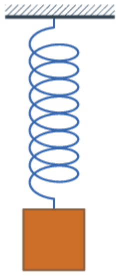
$$\eta(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

che riscritta per y diventa

$$\boxed{y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \theta)}$$

Il corpo oscilla attorno alla nuova posizione di equilibrio.

3° esempio: forza elastica + forza peso

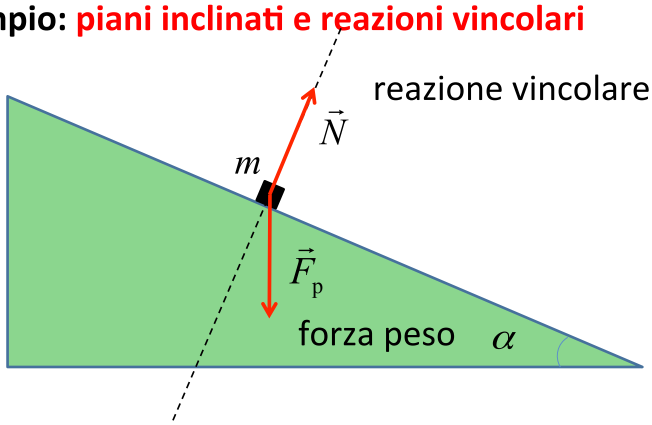


$$\boxed{y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \theta)}$$

3° esempio: forza elastica + forza peso

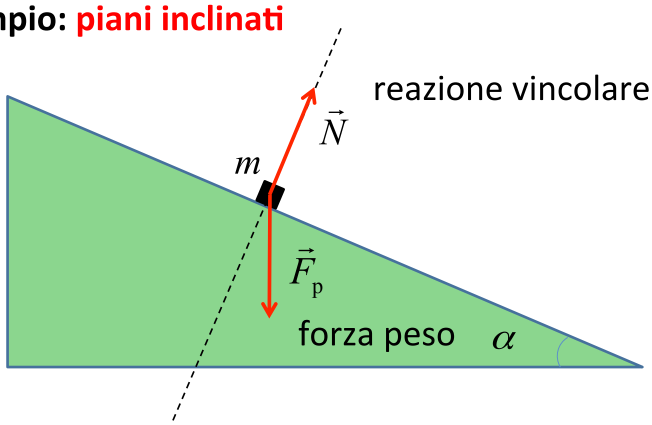
La forza elastica può equilibrare una forza incognita F. Se la costante elastica è nota, la misura dell'allungamento della molla fornisce una misura di F (l'abbiamo visto per la forza peso, ma è vero in generale).
Le molle usate in questo modo si chiamate **dinamometri**. Sono strumenti di misura delle forze.
Tramite dinamometri si può verificare, ad esempio, anche la validità della composizione vettoriale delle forze.

4° esempio: piani inclinati e reazioni vincolari



Le reazioni vincolari dipendono dal tipo di vincolo.
Nel caso di una superficie **liscia** (**senza attrito**), la reazione vincolare è **perpendicolare** al piano.
[*nota: un vincolo può impedire accelerazioni in certe direzioni, in presenza di altre forze, non può invece indurle da sé*]

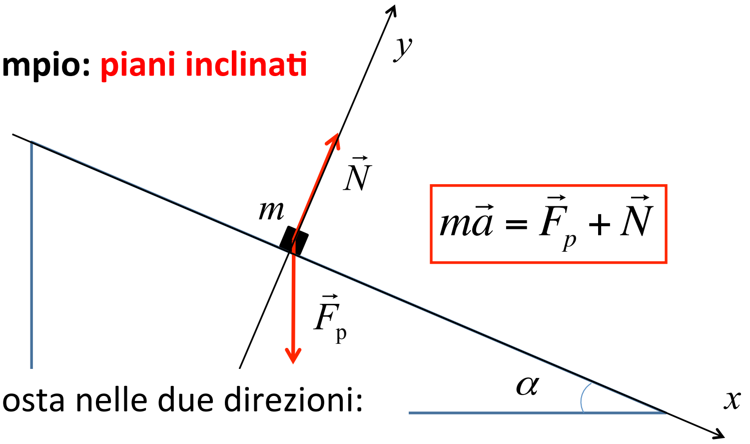
4° esempio: piani inclinati



In questo caso, la reazione vincolare impone che il corpo non abbia accelerazioni perpendicolari al piano.

Conviene scomporre l'equazione del moto nelle due direzioni perpendicolare e parallela al piano.

4° esempio: piani inclinati



$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{N}}$$

scomposta nelle due direzioni:

$$\begin{cases} ma_x = mg\,\mathrm{sen}\alpha \\ m\cancel{a}_y = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

questa è nulla a causa del vincolo

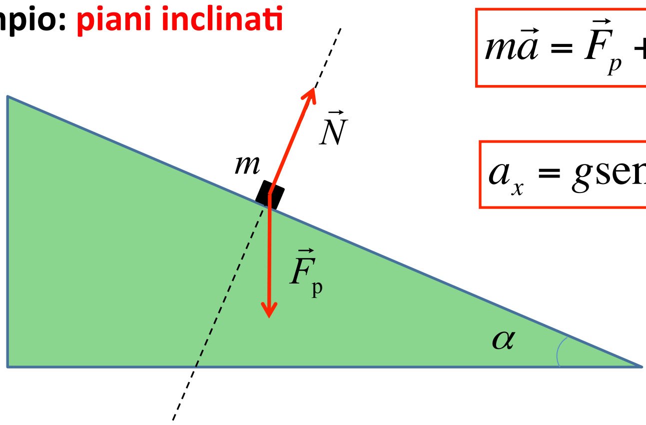
$$\boxed{a_x = g\,\mathrm{sen}\alpha}$$

$$N = mg\cos\alpha$$

4° esempio: piani inclinati

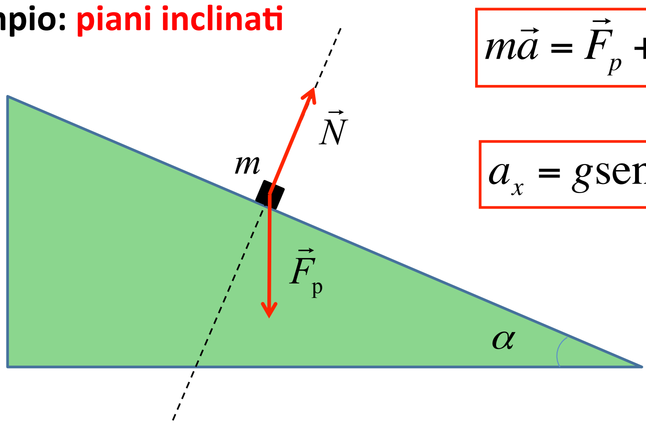
$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{N}}$$

$$\boxed{a_x = g\,\mathrm{sen}\alpha}$$



*Nota: la scelta dell'orientazione degli assi era **arbitraria**. Potevamo scegliere x orizzontale e y verticale. Il calcolo sarebbe stato **più complicato**, ma l'accelerazione lungo il piano la stessa**!** (Esercizio suggerito)*

4° esempio: piani inclinati



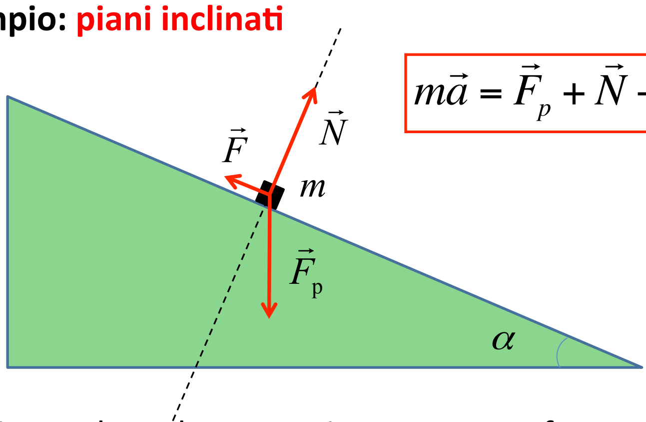
$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{N}}$$

$$\boxed{a_x = g\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Altra nota:

- *se l'angolo è di $\pi/2$ si ritrova $a=g$ (caduta libera);*
- *se l'angolo è 0, l'accelerazione è nulla;*
- *se l'angolo è piccolo, l'accelerazione è piccola (vedi Galileo)*

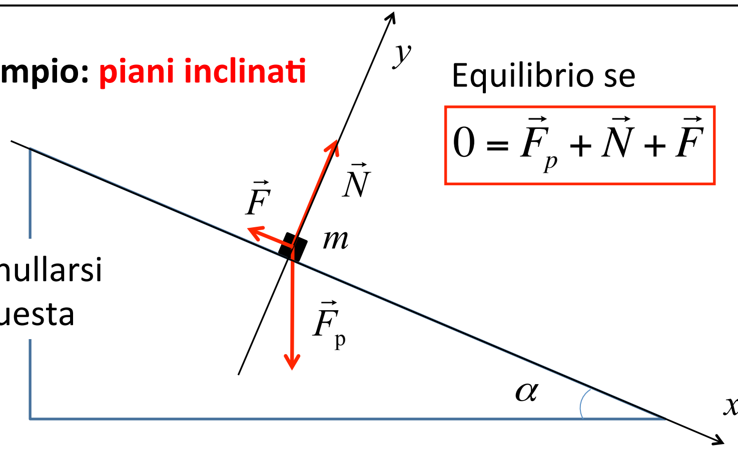
4° esempio: piani inclinati



$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F}}$$

Supponiamo che sul corpo agisca una terza forza. Come deve essere affinché il corpo rimanga fermo **in equilibrio?** Basta che **l'accelerazione sia nulla** (se il corpo è in quiete, rimane in quiete).

4° esempio: piani inclinati



Equilibrio se

$$\boxed{0 = \vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F}}$$

deve annullarsi
anche questa

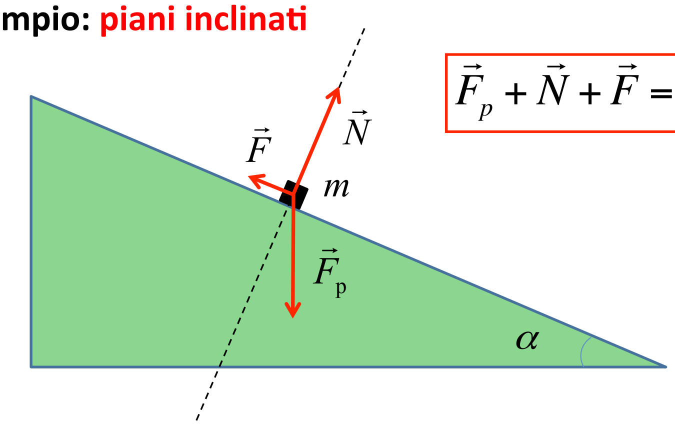
$$\begin{cases} m\cancel{a_x} = mg\,\mathrm{sen}\alpha - F \\ m\cancel{a_y} = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

questa è nulla a
causa del vincolo

$$\boxed{F = mg\,\mathrm{sen}\alpha}$$

$$N = mg\cos\alpha$$

4° esempio: piani inclinati

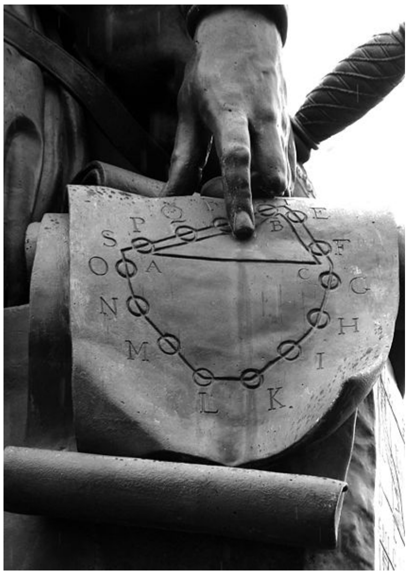


$$\boxed{\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F} = 0}$$

Lo studio delle condizioni di equilibrio si chiama **statica**. La condizione per l'equilibrio statico di una particella è che **la risultante delle forze si annulli**.

4° esempio: piani inclinati

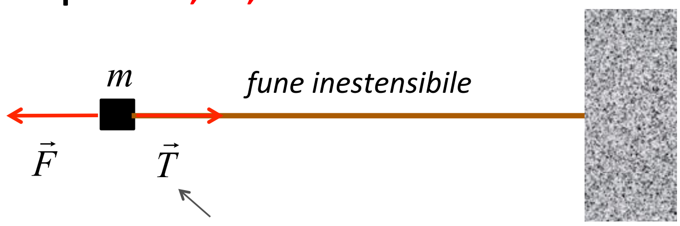
Nota: non occorre la dinamica per ricavare leggi di statica (vedi Stevino).



5° esempio: funi, fili, carrucole…

Tra le reazioni vincolari possiamo inserire le forze prodotte da dispositivi (funi, corde, aste,…) che oppongono resistenza a variazioni di distanza tra due o più corpi.

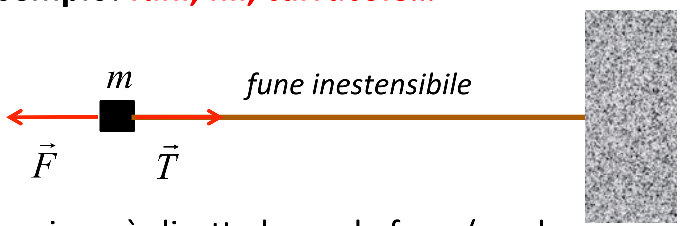
5° esempio: funi, fili, carrucole…



La tensione della fune T si oppone all'azione della forza F mantenendo il corpo in equilibrio a distanza fissa dalla parete.

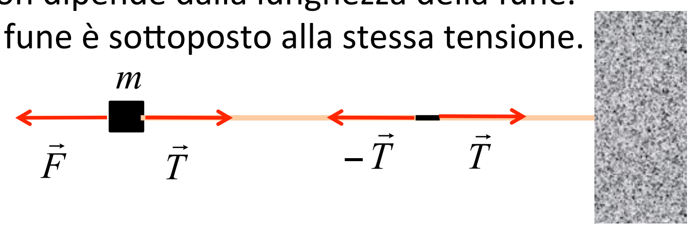
Qui la tensione T è tale da tenere fissa la distanza tra i due corpi.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

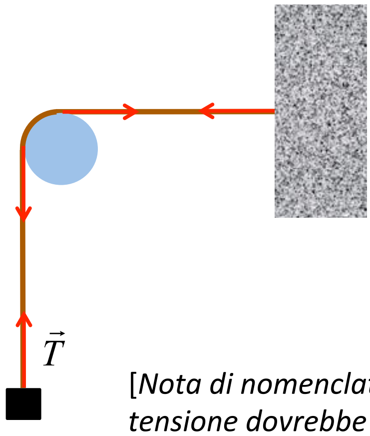


La tensione è diretta lungo la fune (corde, fili, funi non oppongono resistenza a movimenti trasversi).

La tensione non dipende dalla lunghezza della fune. Ogni tratto di fune è sottoposto alla stessa tensione.



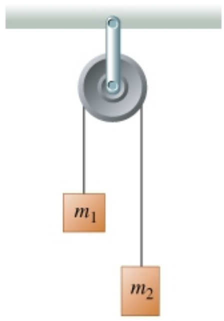
5° esempio: **funi, fili, carrucole…**



Ogni tratto di fune è sottoposto alla stessa tensione, anche quando la fune ruota attorno ad un perno fisso e liscio, oppure attorno ad una carrucola, purché di massa trascurabile.

[*Nota di nomenclatura: la tensione dovrebbe essere una forza per unità di superficie, invece qui è una forza; è una semplificazione ininfluente a questo livello*]

5° esempio: **funi, fili, carrucole…**



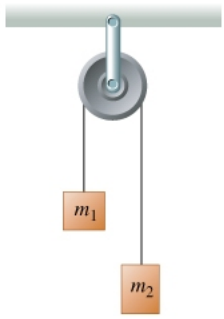
Caso interessante:
macchina di Atwood

Ipotesi:
- filo inestensibile e di massa trascurabile
- carrucola di massa trascurabile
- no attriti

Problema:
Calcolare l'accelerazione delle due masse.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

I corpi in movimento sono due.
Occorre rappresentare graficamente le forze che agiscono su **ciascuno** di essi (**diagramma di corpo libero**).

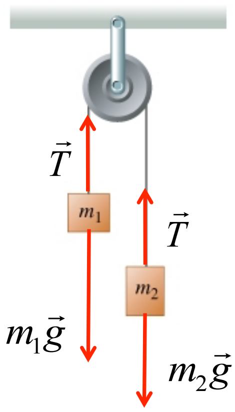


5° esempio: funi, fili, carrucole…

I corpi in movimento sono due.
Occorre rappresentare graficamente le forze che agiscono su **ciascuno** di essi (**diagramma di corpo libero**).

Sappiamo che la tensione esercitata dal filo sui due corpi è la stessa.
Inoltre la lunghezza del filo è costante.

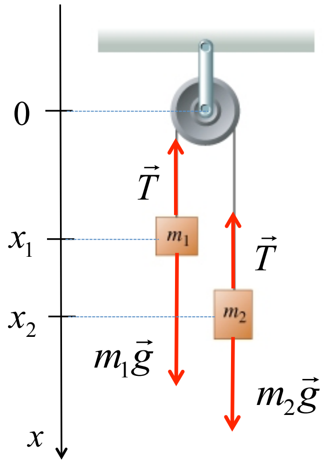
Per scrivere le due equazioni del moto ci servono coordinate opportune.



5° esempio: funi, fili, carrucole…

Allora la II legge di Newton applicata a ciascun corpo diventa:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = m_1 g - T \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g - T \end{cases}$$



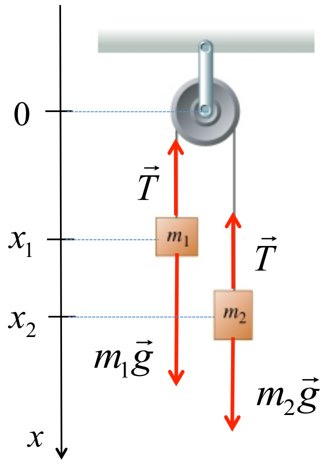
essendo $\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = a_1$, $\dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = a_2$

Nota: 3 incognite (a_1, a_2, T) e 2 equazioni, ma…

5° esempio: funi, fili, carrucole…

… ma abbiamo anche la condizione sulla lunghezza del filo:

$$l = x_1 + x_2 + \text{costante}$$



da cui: $$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}$$

e anche: $$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{d^2 x_1}{dt^2} \Rightarrow \boxed{a_2 = -a_1}$$

Questa è la terza equazione che ci serve.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T \\ m_2 a_2 = m_2 g - T \end{cases}$$

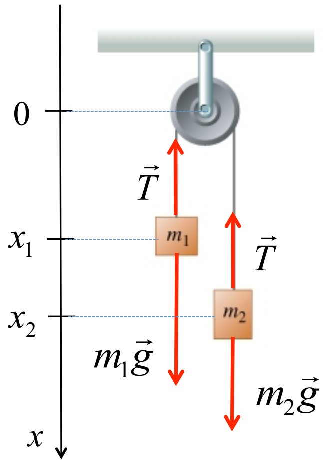
$$\boxed{a_2 = -a_1}$$

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T \\ -m_2 a_1 = m_2 g - T \end{cases}$$

Sottraendo una dall'altra:

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_1 - m_2)g$$

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g}$$



5° esempio: funi, fili, carrucole…

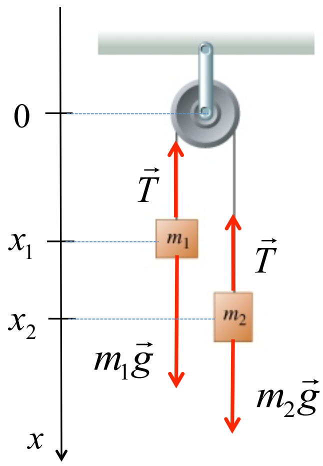
$$\boxed{a_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g}$$

$$\boxed{a_2 = -a_1}$$

L'ultima incognita, T, si trova inserendo il risultato per a_1 in una delle due equazioni del moto:

$$m_1 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g = m_1 g - T$$

$$\boxed{T = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g}$$

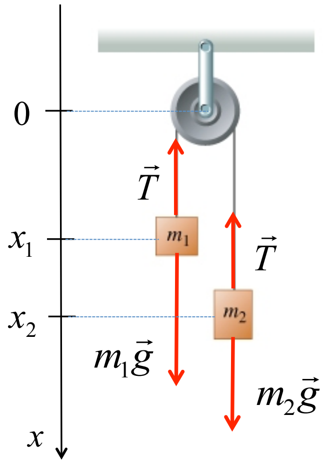


5° esempio: funi, fili, carrucole…

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g}$$

$$\boxed{a_2 = -a_1}$$

$$\boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g}$$



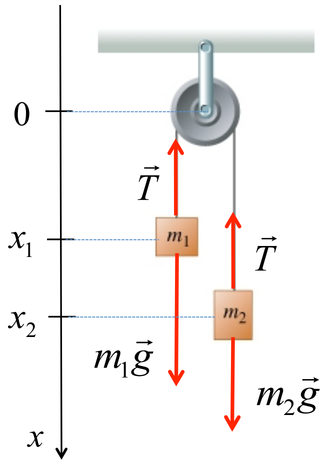
Se m_1=m_2, l'accelerazione è nulla.
È equivalente ad una bilancia a piatti.
Misura la massa m rispetto ad un campione.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g}$$

$$\boxed{a_2 = -a_1}$$

$$\boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g}$$



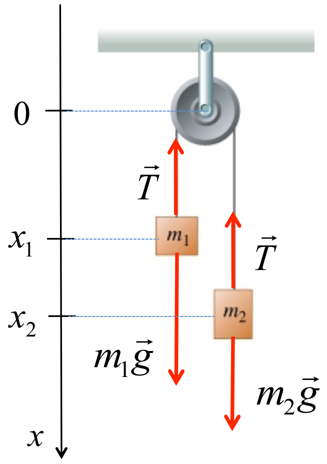
Se m_1 è poco diverso da m_2, l'accelerazione è piccola.
Atwood se ne servì per verificare sperimentalmente le leggi del moto uniformemente accelerato.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g}$$

$$\boxed{a_2 = -a_1}$$

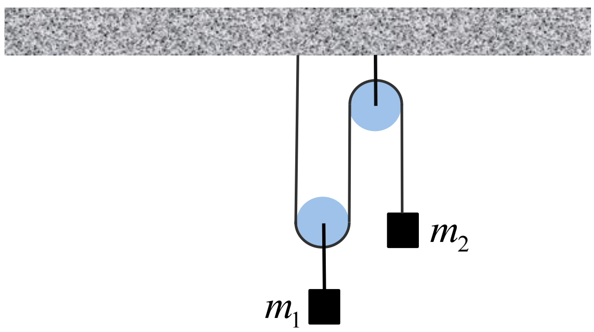
$$\boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g}$$



Se una delle due masse è nulla, l'altra cade liberamente con accelerazione g e la tensione è nulla.

Esercizio suggerito

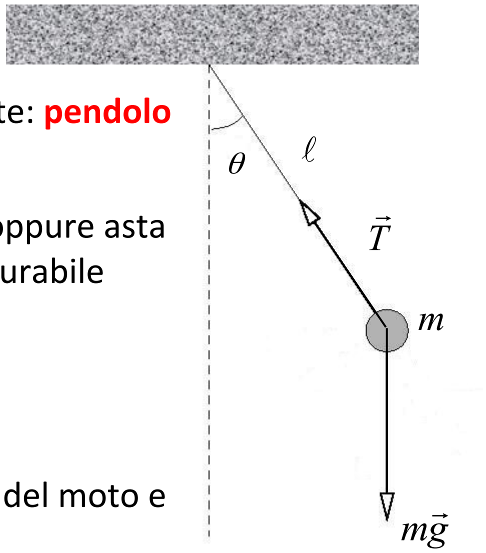
Calcolare le accelerazioni delle masse nel sistema in figura.



Solite ipotesi: fili inestensibili e di massa trascurabile, carrucole di massa trascurabile.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

Altro caso interessante: **pendolo**



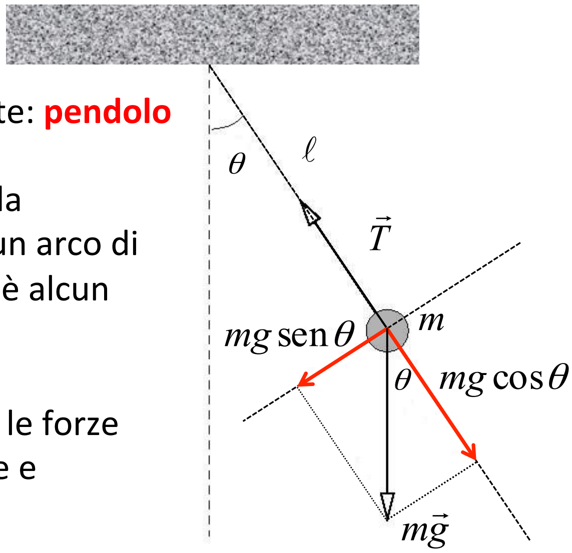
Ipotesi:

- filo inestensibile (oppure asta rigida) di massa trascurabile
- no attriti
- corpo puntiforme

Problema:
Scrivere l' equazione del moto e risolverla.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

Altro caso interessante: **pendolo**



Prima osservazione: la traiettoria è nota; è un arco di circonferenza; non c'è alcun moto radiale.

Conviene scomporre le forze nelle direzioni radiale e tangenziale.

5° esempio: funi, fili, carrucole…

Spostamento lungo l'arco di circonferenza:

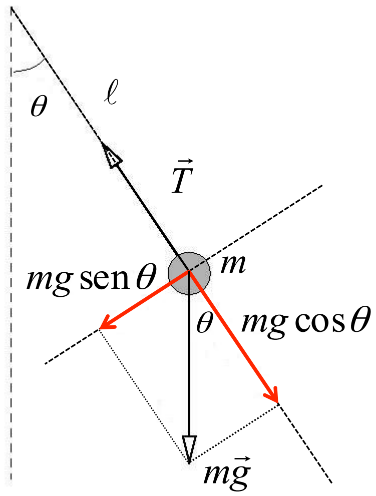
$$ds = \ell d\theta$$

Velocità (tangenziale o scalare):

$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$

Accelerazione (tangenziale):

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



5° esempio: funi, fili, carrucole…

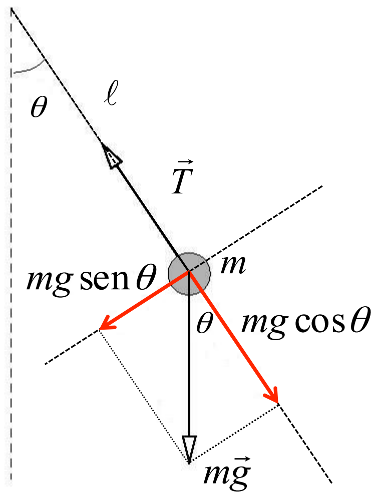
Equazione del moto nella direzione tangenziale:

$$ma = -mg\,\mathrm{sen}\theta$$

la forza si oppone a incrementi dell'angolo

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\mathrm{sen}\theta}$$



5° esempio: funi, fili, carrucole…

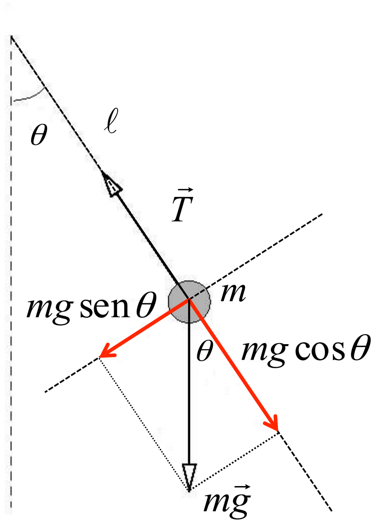
Equazione del moto nella direzione tangenziale:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta}$$

Si può trovare la soluzione generale $\theta(t)$ in forma analitica, ma non è facile!

Caso semplice: **piccoli angoli**

$$\boxed{|\theta| << \pi/2 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cong \theta}$$



5° esempio: funi, fili, carrucole…

Equazione del moto per piccoli angoli:

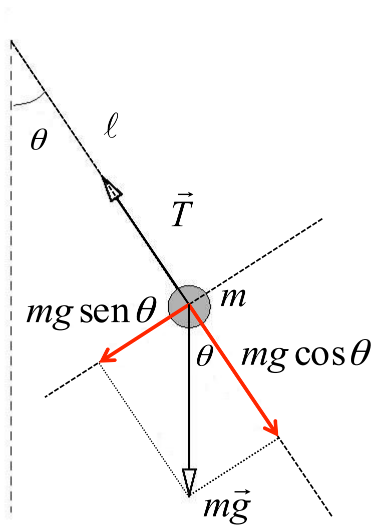
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$$

ovvero

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta} \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

È la solita equazione armonica, con soluzione

$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



5° esempio: funi, fili, carrucole…

Per piccoli angoli il moto del pendolo è armonico

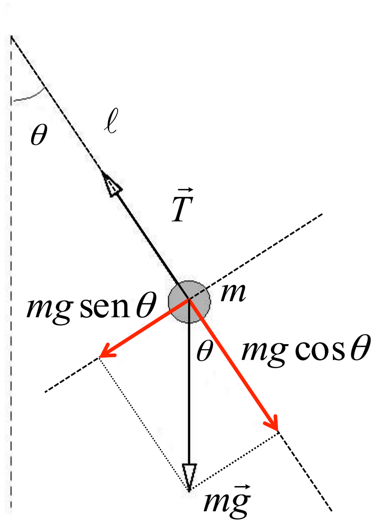
$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

con pulsazione $\omega = \sqrt{g/\ell}$

e periodo

$$\boxed{\text{periodo} = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}}$$

Nota: si può misurare g in modo più preciso che nella caduta dei gravi!!



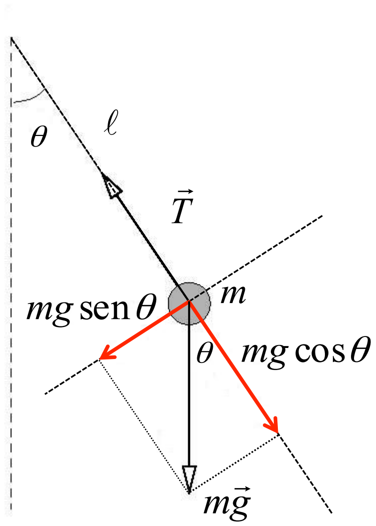
5° esempio: funi, fili, carrucole…

Il fatto che il periodo dovesse essere

$$\text{periodo} \propto \sqrt{\ell/g}$$

si poteva dedurre da considerazioni dimensionali.
[alla lavagna]

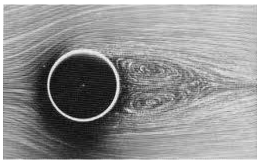
Se si vuole sapere quanto vale la tensione nel tempo, basta risolvere l'equazione del moto nella direzione radiale.
[alla lavagna; occhio all'acc. centripeta,



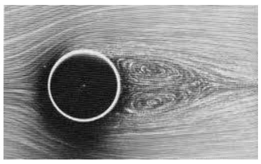
6° esempio: attriti

Finora li abbiamo trascurati.
Si tratta di forze che si oppongono al movimento.
Sono diverse a seconda dei casi.
La loro forma si ricava da leggi empiriche.

Esempio: **attrito viscoso**.
Caratterizza il moto dei fluidi
o il moto di corpi immersi in fluidi



6° esempio: attriti



Esempio: **attrito viscoso**.

Per un corpo che si muove in un fluido viscoso (con velocità non troppo grande) vale la legge empirica:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{attrito}} = -K\eta\vec{v}}$$

velocità del corpo rispetto al fluido

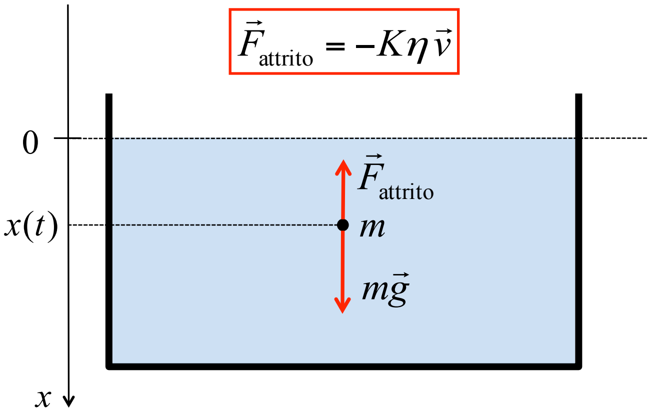
coefficiente di resistenza viscosa (dipende dalla forma e dalle dimensioni del corpo)

coefficiente di viscosità (dipende dal fluido)

6° esempio: attriti

Trattiamo questo caso: particella lasciata cadere verticalmente in un fluido viscoso.

$$\boxed{\vec{F}_{\text{attrito}} = -K\eta\vec{v}}$$



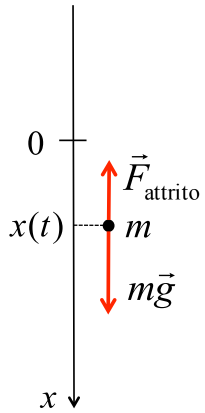
6° esempio: attriti

Equazione del moto: $ma = mg - K\eta v$

ovvero: $m\dfrac{dv}{dt} = mg - K\eta v$

oppure:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K\eta}{m}\left(\frac{mg}{K\eta} - v\right)$$

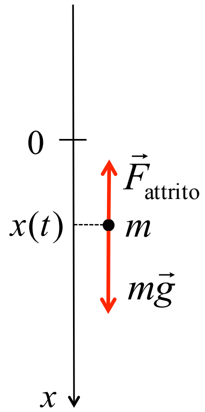


Notiamo che per $v = v_\ell \equiv \dfrac{mg}{K\eta}$ l'accelerazione è nulla.

La chiamiamo **velocità limite**.

6° esempio: attriti

Equazione del moto: $\boxed{\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{K\eta}{m}(v_\ell - v)}$



Si risolve analiticamente per separazione di variabili [*alla lavagna*].
Si ottiene la soluzione generale

$$v(t) = v_\ell + C\,e^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

La costante di integrazione C si fissa con la condizione iniziale $v(0) = 0$, da cui segue

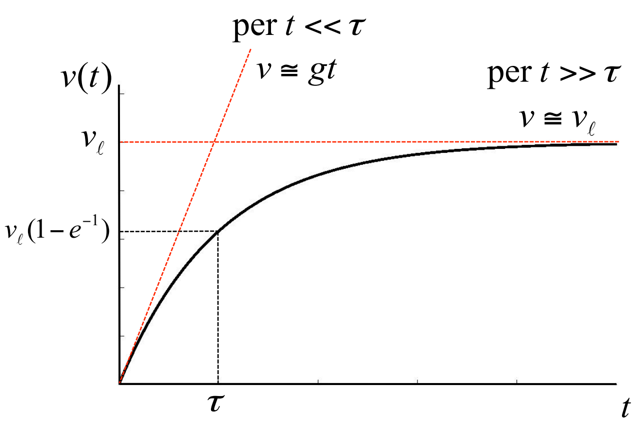
$$\boxed{v(t) = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right)}$$

Volendo $x(t)$ si deve integrare ancora in dt [*alla lavagna*].

6° esempio: attriti

$$v(t) = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right) = v_\ell\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{con} \quad \tau = \frac{m}{K\eta} = \frac{v_\ell}{g}$$

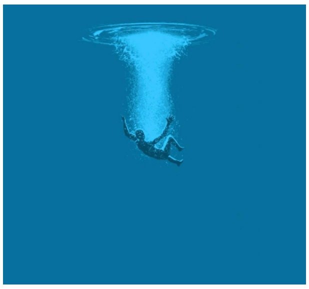
tempo caratteristico del moto della particella nel fluido



6° esempio: attriti $\boxed{\vec{F}_{\text{attrito}} = -K\eta\vec{v}}$

Nota:

- Per ridurre la velocità limite si può aumentare K (esempio: aprire il paracadute) oppure aumentare la viscosità (esempio: passare dall'aria all'acqua).



6° esempio: attriti $\boxed{\vec{F}_{\text{attrito}} = -K\eta\vec{v}}$

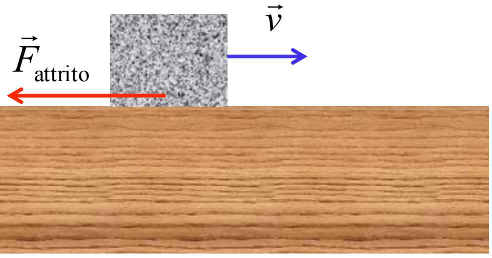
Altre note:

- Se la velocità iniziale ha una componente orizzontale, anche la forza ha una componente orizzontale che si oppone al moto (esempio: riduzione della gittata di un proiettile).

- Se le densità di massa (massa per unità di volume) del corpo e del fluido sono confrontabili, allora bisogna aggiungere una altro tipo di forza, la spinta di Archimede.

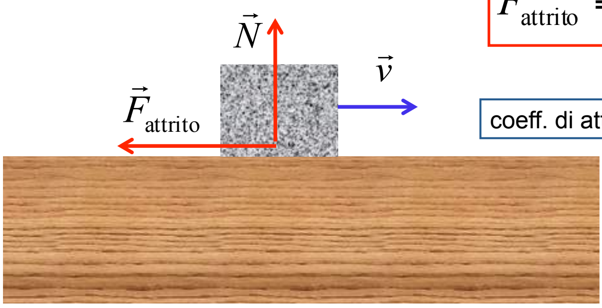
6° esempio: attriti

Un altro tipo di attrito è quello che si esercita tra due corpi solidi che hanno superfici a contatto. Si parla di **attrito radente**.



6° esempio: attriti

Quando un corpo solido scorre lungo una superficie solida la forza di **attrito radente** che agisce è, in buona approssimazione, la seguente:



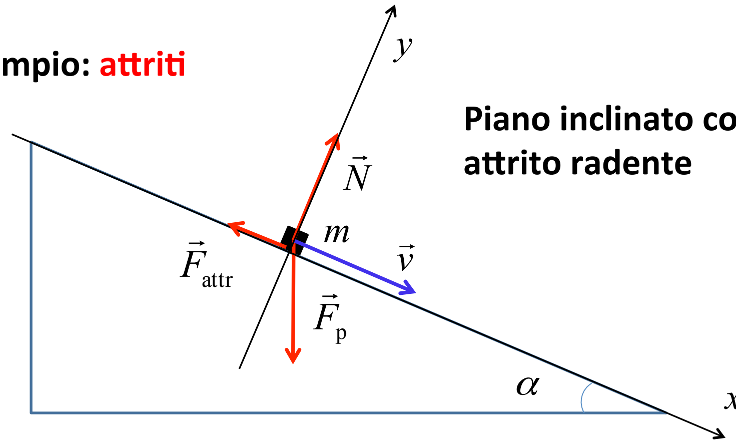
versore della velocità

$$\boxed{\vec{F}_{\text{attrito}} = -\hat{v}\,\mu_d \left|\vec{N}\right|}$$

coeff. di attrito dinamico

reazione vincolare

6° esempio: attriti



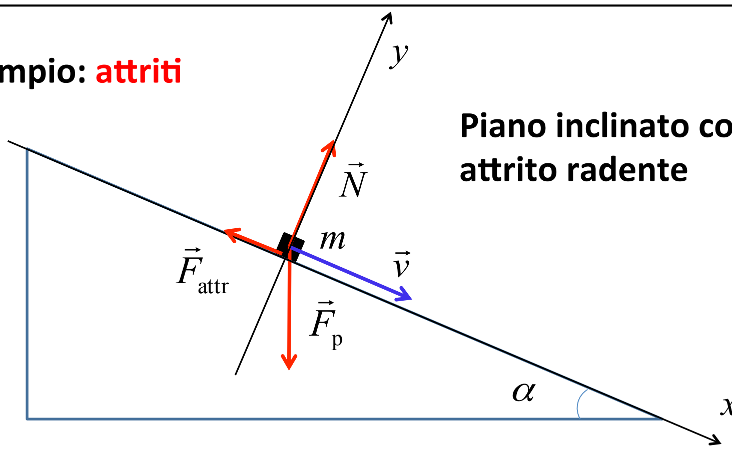
Piano inclinato con attrito radente

Eq. del moto:

$$\begin{cases} ma_x = mg\,\text{sen}\alpha - \mu_d N = mg(\text{sen}\alpha - \mu_d \cos\alpha) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

$$N = mg\cos\alpha$$

6° esempio: attriti



Piano inclinato con attrito radente

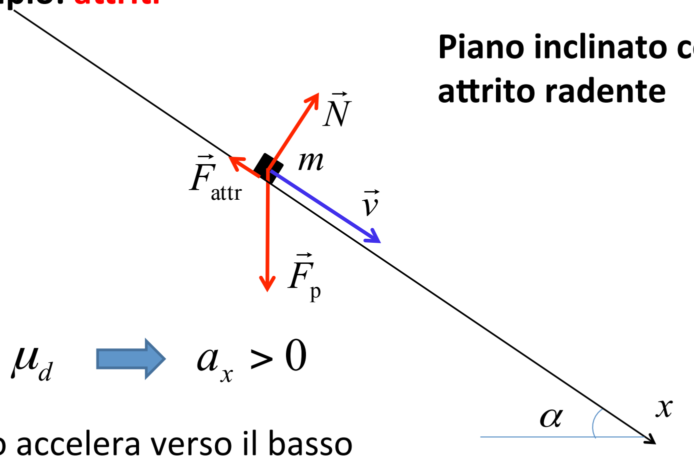
Accelerazione:

$$a_x = g\,\text{sen}\alpha(1 - \mu_d \,\text{cotg}\,\alpha)$$

Dipende dall'angolo e dal coefficiente d'attrito.
È minore di quella senza attrito e può essere negativa.

6° esempio: attriti

Piano inclinato con attrito radente

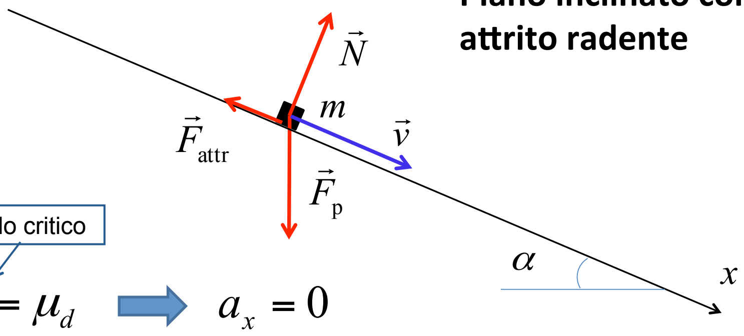


$$\mathrm{tg}\,\alpha > \mu_d \quad \Rightarrow \quad a_x > 0$$

il corpo accelera verso il basso
(la forza peso vince)

6° esempio: attriti

Piano inclinato con attrito radente



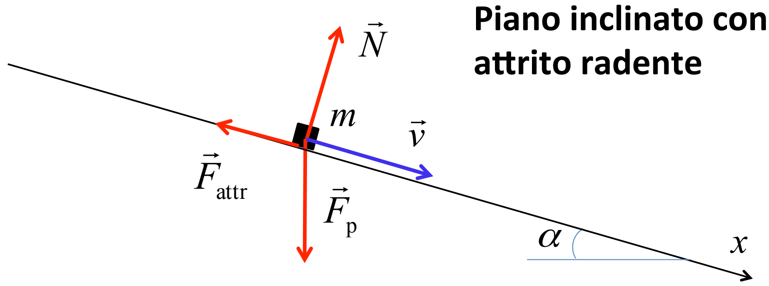
Angolo critico

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mu_d \quad \Rightarrow \quad a_x = 0$$

il corpo scende a velocità costante
(peso e attrito si bilanciano)

6° esempio: attriti

Piano inclinato con attrito radente

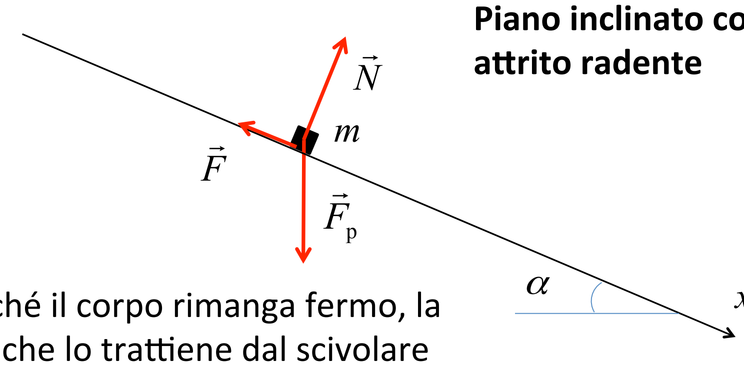


$$\mathrm{tg}\,\alpha < \mu_d \quad \Rightarrow \quad a_x < 0$$

il corpo ha accelerazione negativa e frena (la forza d'attrito vince sul peso) fino a fermarsi. Da quel momento in poi non si ha più **attrito dinamico**, ma bensì **attrito statico**.

6° esempio: attriti

Piano inclinato con attrito radente



Affinché il corpo rimanga fermo, la forza che lo trattiene dal scivolare deve valere $F = mg\,\mathrm{sen}\alpha$
L' attrito statico fornisce questa forza fino ad un valore massimo dato da

$$\boxed{F_{\max} = \underbrace{\mu_s}_{\text{coeff. di attrito statico}} |\vec{N}|}$$

6° esempio: attriti

Attrito dinamico $\boxed{\vec{F}_{\text{attrito}} = -\hat{v}\mu_d\left|\vec{N}\right|}$

Attrito statico $\boxed{F_{\max} = \mu_s\left|\vec{N}\right|}$

In generale si ha $\boxed{\mu_s > \mu_d}$

I coefficienti di attrito sono parametri empirici che variano a seconda del tipo di superfici a contatto tra loro, e possono variare anche di ordini di grandezza.

Forze

Abbiamo visto i seguenti esempi:

- Forza peso
- Forza elastica
- Sovrapposizione di forza peso ed elastica
- Reazioni vincolari (piani inclinati)
- Tensioni di funi, corde, fili,…
- Attriti (viscoso, radente)

Ci manca la più importante, la gravitazione.

Esercizi

Corpo su un piano orizzontale scabro, con velocità iniziale assegnata. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico in funzione della frenata.

Macchina in curva. Calcolo della curvatura minima per evitare la sbandata. Calcolo nel caso di profilo della curva inclinato.

Pendolo conico. Relazione tra velocità e angolo.

[*svolti alla lavagna*]